Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2003. Том 44, № 5

УДК 519.21

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ С ЗАВИСИМЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ В СЛУЧАЕ ТЯЖЕЛЫХ ХВОСТОВ

Д. А. Коршунов, С. Шлегель, Ф. Шмидт

Аннотация: Рассматривается случайное блуждание $\{S_n\}$ с отрицательным сносом, имеющее зависимые приращения с тяжелыми хвостами. Изучается асимптотика вероятностей больших уклонений $\mathbf{P}\{\sup\limits_n S_n > x\}$ при $x \to \infty$. В случае независимых приращений блуждания $\{S_n\}$ точное асимптотическое поведение вероятности $\mathbf{P}\{\sup\limits_n S_n > x\}$ хорошо известно. Здесь же исследуется случай, когда приращения блуждания сформированы асимптотически стационарным процессом скользящих средних. Показывается, что асимптотика хвоста распределения $\sup\limits_n S_n$ существенно зависит от линейных коэффициентов в скользящем среднем.

Ключевые слова: случайное блуждание, зависимые приращения, тяжелые хвосты распределения, субэкспоненциальное распределение, асимптотики хвостов.

§ 1. Введение

В ряде недавних работ (см. [1–6]) изучается асимптотика хвоста распределения супремума случайного блуждания с отрицательным сносом в случае зависимых приращений с тяжелыми хвостами. В настоящей работе мы продолжаем эти исследования и рассматриваем стохастическую модель, которую можно обосновать следующим образом. Пусть номинальный (планируемый) доход в единицу времени некоторого производства или финансовой компании равен некоторой константе $a > 0$. Однако на практике в различных ситуациях реальные доходы за конкретные единичные периоды времени могут отличаться от номинального. Поэтому мы предполагаем, что реальный доход за n-й период времени есть результат некоторых случайных возмущений $\eta_1, \dots, \eta_n$ (с нулевым средним значением), возникающих в n первых единичных периодов времени благодаря неожиданным расходам или дополнительным финансовым поступлениям. Например, возмущение η_n, возникающее в n-й период времени, может быть не полностью учтено (предъявлено к оплате) именно в этот момент времени и может также влиять на доходы в последующие периоды времени. Более точно, в n-й период времени учитывается доля $c_0\eta_n$ от η_n, в $(n+1)$-й период — доля $c_1\eta_n$, в $(n+2)$-й период — доля $c_2\eta_n$ и т. д., где $c_0, c_1, \dots \in [0,1]$, причем $\sum\limits_{i=0}^{\infty} c_i = 1$. Следовательно, если система начинает функционировать в нулевой

Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS (Project Reference Number 00–265), кроме того, работа первого из авторов поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (коды проектов 02–01–00902 и 02–01–00358) и EPSRC (Grant N R58765/01).

момент времени, то реальный доход за k-й период времени дается выражением $a-\sum\limits_{j=1}^{k}c_{k-j}\eta_j$. Кроме того, сумма $S_n=\xi_1+\dots+\xi_n$, где $\xi_k=\sum\limits_{j=1}^{k}c_{k-j}\eta_j-a$, может рассматриваться как итоговый (совокупный) баланс расходов в момент времени n.

Результаты настоящей статьи имеют место при более общих условиях на коэффициенты $c_0,c_1,\dots$. А именно, эти коэффициенты могут быть произвольными фиксированными действительными числами такими, что $\sum\limits_{i=0}^{\infty}|c_i|<\infty$. Коэффициенты, бóльшие единицы и отрицательные, могут трактоваться, например, как предъявление к оплате слишком больших исков и возврат средств в дальнейшем соответственно.

Ответ на вопрос о том, является ли процесс баланса расходов $\{S_n,\ n\ge 1\}$ хорошо контролируемым или опасным, в ряде случаев может быть дан, если достаточно хорошо изучено асимптотическое при $x\to\infty$ поведения хвоста распределения $\mathbf{P}\{\sup\limits_n S_n>x\}$. В настоящей статье мы находим условия, при которых возможно точное определение асимптотического поведения $\mathbf{P}\{\sup\limits_n S_n>x\}$. Оказывается, что искомая асимптотика существенно зависит от выбора коэффициентов $c_0,c_1,\dots$.

1.1. Модель. Пусть $\{\eta_n,\ n=1,2,\dots\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевым средним, $\mathbf{E}\eta_n=0$. Обозначим через F распределение η_n, т. е. $F(x)=\mathbf{P}\{\eta_n\le x\}$ для любого $x\in\mathbf{R}$. Правый хвост распределения F обозначаем через $\overline{F}(x)=1-F(x)$. Для любого $x\ge 0$ определим интегралы

$$G_+(x)=\int\limits_x^{\infty}\overline{F}(y)\,dy \quad \text{и} \quad G_-(x)=\int\limits_x^{\infty}F(-y)\,dy,$$

которые конечны при любом x ввиду конечности среднего значения $\mathbf{E}\eta_n$. Для любых двух действительных чисел $B\ge 0$ и $b\ge 0$, не равных одновременно нулю, рассмотрим функцию $G_{B,b}$, задаваемую следующим равенством (здесь $x/0=\infty$ при $x\ge 0$):

$$G_{B,b}(x)=BG_+(x/B)+bG_-(x/b),\quad x\ge 0.$$

По определению $G_+=G_{1,0}$, $G_-=G_{0,1}$ и

$$G_{B,b}(x)=\int\limits_x^{\infty}(\overline{F}(y/B)+F(-y/b))\,dy.$$

Пусть $a>0$ и $c_k\in\mathbf{R}$, $k\in\mathbf{N}$, — набор констант, из которых хотя бы одна отлична от нуля; $\mathbf{N}=\{0,1,\dots\}$. Определим случайную величину ξ_k равенством

$$\xi_k=\sum_{j=1}^{k}c_{k-j}\eta_j-a.$$

Рассмотрим частичные суммы

$$S_0=0,\quad S_n=\xi_1+\dots+\xi_n,\quad n\ge 1.$$

Определенную таким образом последовательность $\{S_n,\, n \in \mathbf{N}\}$ мы называем *случайным блужданием с асимптотически стационарными зависимыми приращениями и с отрицательным сносом.* Оказывается полезным следующее представление частичных сумм S_n. Введя обозначение

$$\bar{c}_k = \sum_{i=0}^{k} c_i, \quad k \in \mathbf{N}, \tag{1}$$

получаем представление в терминах суммы *взвешенных слагаемых*:

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} \bar{c}_{n-j}\eta_j - na. \tag{2}$$

Всюду предполагаем, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| < \infty. \tag{3}$$

При этом условии последовательность $\{S_n\}$ удовлетворяет усиленному закону больших чисел, т. е. $S_n/n \to -a < 0$ с вероятностью 1 при $n \to \infty$ (соответствующее элементарное доказательство см. ниже в лемме 1). Следовательно, супремум $\sup\limits_{n\in\mathbf{N}} S_n$ случайного блуждания $\{S_n\}$ — корректно определенная случайная величина, конечная с вероятностью 1.

1.2. Основные результаты. Основная цель настоящей статьи — найти условия, при которых асимптотическое поведение хвоста $\mathbf{P}\{\sup\limits_{n\in\mathbf{N}} S_n > x\}$ просто выражается в терминах функций $G_+(x)$ и $G_-(x)$ при $x \to \infty$.

В § 2 выводится асимптотическая оценка снизу для вероятности $\mathbf{P}\{\sup\limits_n S_n > x\}$. В теореме 2 показано, что если взять два любых различных натуральных числа m_1, $m_2 \in \mathbf{N}$ и положить $C = \max\{0, \bar{c}_{m_1}\} \ge 0$ и $c = \min\{0, \bar{c}_{m_2}\} \le 0$, то

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\mathbf{P}\{\sup\limits_n S_n > x\}}{G_{C,|c|}(x)} \ge \frac{1}{a} \tag{4}$$

при условии, что $C + |c| > 0$ и $G_{C,|c|}$ является *функцией с длинным хвостом* (соответствующее определение см. в § 2).

В § 3 мы выводим асимптотически точную верхнюю оценку (теорема 3). Положим $\overline{C} = \sup\{0, \bar{c}_k, k \in \mathbf{N}\} \ge 0$ и $\bar{c} = \inf\{0, \bar{c}_k, k \in \mathbf{N}\} \le 0$, где $\overline{C} + |\bar{c}| > 0$, поскольку не все c_k равны 0. Показано, что если $G_{\overline{C},|\bar{c}|}$ принадлежит классу $\mathscr{S}$ *субэкспоненциальных* распределений (определение см. в § 3), то

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\mathbf{P}\{\sup\limits_n S_n > x\}}{G_{\overline{C},|\bar{c}|}(x)} \le \frac{1}{a}. \tag{5}$$

Объединение оценок (4) и (5) немедленно приводит к следующей асимптотике хвостов $\sup\limits_n S_n$.

Теорема 1. *Пусть выполнено одно из следующих условий:*
(i) *для некоторых m_1 и m_2*

$$\bar{c}_{m_1} = \overline{C} \equiv \sup\{0, \bar{c}_k, k \in \mathbf{N}\} > 0, \quad \bar{c}_{m_2} = \bar{c} \equiv \inf\{0, \bar{c}_k, k \in \mathbf{N}\} < 0;$$

(ii) $\overline{C} = \bar{c}_{m_1} > 0$ *для некоторого* m_1 *и* $\bar{c} = 0$;
(iii) $\overline{C} = 0$ *и* $\bar{c} = \bar{c}_{m_2} < 0$ *для некоторого* m_2.
Тогда если $G_{\overline{C},|\bar{c}|} \in \mathscr{S}$, *то*

$$\mathbf{P}\{\sup_n S_n > x\} \sim a^{-1} G_{\overline{C},|\bar{c}|}(x) \quad \text{при } x \to \infty.$$

В § 4 рассматриваются оставшиеся случаи, не охватываемые теоремой 1, а именно когда $\overline{C} > 0$ и $\overline{C} > \bar{c}_m$ для любого m либо $\bar{c} < 0$ и $\bar{c} < \bar{c}_m$ для любого m. Показывается, что тогда утверждение теоремы 1 остается в силе при дополнительном предположении (почти) правильного изменения на бесконечности хвостов распределений.

Отметим, что формально наши результаты обобщают хорошо известную теорему об асимптотическом поведении хвоста распределения супремума случайного блуждания с независимыми приращениями субэкспоненциального типа с отрицательным сносом, которому соответствует случай $c_0 = 1$, $c_1 = c_2 = \dots = 0$; (см. [7], а также [8–10]). Недавно были доказаны некоторые обобщения этой теоремы на случай случайных блужданий с зависимыми приращениями (см. [1–5]). Одно из этих обобщений, в наибольшей степени коррелирующее с нашими результатами, получено в [6], где предполагается правильное изменение на бесконечности правого и левого хвостов F. Это предположение, сделанное в [6], существенно для использования утверждений типа теоремы Карамата. Мы используем другие методы доказательства (см. § 2, 3), позволяющие избежать в теореме 1 предположения о регулярном изменении распределения F.

1.3. Усиленный закон больших чисел. Сформулируем и докажем элементарный усиленный закон больших чисел для последовательности S_n, определяемой равенством (2).

Лемма 1. *С вероятностью* 1 *при* $n \to \infty$ *имеет место сходимость* $S_n/n \to -a$.

Доказательство. Ввиду условия (3) последовательность $\bar{c}_n$ имеет предел при $n \to \infty$; обозначим этот предел через $c \in \mathbf{R}$. Тогда для любых n и $N \in \mathbf{N}$, связанных неравенством $n \geq N$, имеем равенство

$$\frac{S_n + na}{n} = \frac{c}{n}\sum_{j=1}^{n} \eta_j + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-N} (\bar{c}_{n-j} - c)\eta_j + \sum_{j=0}^{N-1} (\bar{c}_j - c)\frac{\eta_{n-j}}{n}.$$

Так как $\mathbf{E}|\eta_1|$ конечно, в силу стандартного усиленного закона больших чисел $\frac{c}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} \eta_j \to 0$ при $n \to \infty$ с вероятностью 1. Кроме того, $|\eta_{n-j}|/n \to 0$ при $n \to \infty$ с вероятностью 1 для любого фиксированного $j \geq 0$. Поэтому для любого фиксированного $N \in \mathbf{N}$

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \frac{S_n + na}{n} \right| \leq \limsup_{n\to\infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-N} (\bar{c}_{n-j} - c)\eta_j \right|.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ найдется N такое, что $|\bar{c}_n - c| \leq \varepsilon$ для любого $n \geq N$. Следовательно,

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-N} (\bar{c}_{n-j} - c)\eta_j \right| \leq \varepsilon \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} |\eta_j| = \varepsilon \mathbf{E}|\eta_j|,$$

что завершает доказательство леммы, так как $\varepsilon > 0$ можно выбрать сколь угодно малым.

§ 2. Оценки снизу

Сначала сформулируем и докажем некоторые асимптотические свойства распределений с длинными хвостами. Они будут применяться в следующем разделе 2.2 при выводе асимптотической оценки снизу для хвоста распределения супремума сумм.

2.1. Свойства распределений с длинными хвостами. Обозначим через $\mathscr{L}$ совокупность всех невозрастающих функций $f : \mathbf{R} \to (0, \infty)$ таких, что для любого фиксированного $y \in \mathbf{R}$

$$\lim_{x\to\infty} f(x+y)/f(x) = 1.$$

Говорят, что распределение F имеет *длинный правый хвост*, если $\overline{F}(x) \in \mathscr{L}$. Ради простоты будем писать $F \in \mathscr{L}$, если распределение F имеет длинный правый хвост. Отметим, что $F \in \mathscr{L}$ влечет $G_+ \in \mathscr{L}$.

Говорят, что распределение F имеет *длинный левый хвост*, если $F(-x) \in \mathscr{L}$. Обозначим через $\mathscr{L}^-$ семейство всех распределений в $\mathbf{R}$, обладающих этим свойством. Заметим, что распределение F случайной величины η принадлежит классу $\mathscr{L}^-$ тогда и только тогда, когда распределение $-\eta$ принадлежит $\mathscr{L}$.

Лемма 2. *Пусть $f \in \mathscr{L}$. Тогда существует возрастающая функция $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+ = [0, \infty)$ такая, что $g(x) \to \infty$ при $x \to \infty$ и*

$$\lim_{x\to\infty} f(x+g(x))/f(x) = 1.$$

Доказательство. В силу определения класса $\mathscr{L}$ найдется возрастающая последовательность действительных чисел $\{x_n,\ n \ge 1\}$ таких, что $x_n \ge n$ и

$$f(x+n)/f(x) \ge 1 - 1/n \quad \text{для любого } x \ge x_n.$$

Положим

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < x_1, \\ n & \text{при } x_n \le x < x_{n+1}. \end{cases}$$

Поскольку $x_n \to \infty$, имеем $g(x) \to \infty$ при $x \to \infty$ и для любого $x_n \le x < x_{n+1}$

$$f(x+g(x))/f(x) \ge 1 - 1/n,$$

что влечет

$$\liminf_{x\to\infty} f(x+g(x))/f(x) \ge 1.$$

С другой стороны, $f(x+g(x)) \le f(x)$ для любой неотрицательной функции g. Доказательство закончено.

Следствие 1. *Предположим, что $f \in \mathscr{L}$. Тогда для любой функции $g(x)$, доставляемой леммой 2,*

$$\lim_{x\to\infty} \inf_{y \ge x} f(y+g(x))/f(y) = 1.$$

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда в силу леммы 2 существует x_0 такое, что $f(x+g(x))/f(x) \ge 1 - \varepsilon$ для любого $x \ge x_0$. Следовательно, для любого $y \ge x \ge x_0$ монотонность g влечет неравенства

$$f(y+g(x))/f(y) \ge f(y+g(y))/f(y) \ge 1 - \varepsilon.$$

Лемма 3. *Пусть последовательность случайных величин $T_1, T_2, \dots$ такова, что $T_n/n \to 0$ при $n \to \infty$ с вероятностью 1. Тогда найдется неубывающая функция $h : \mathbf{N} \to \mathbf{R}_+$ такая, что $h(n) = o(n)$ при $n \to \infty$ и*

$$\lim_{z\to\infty} \mathbf{P}\Big\{\bigcap_{n\ge 1}\{|T_n| \le z + h(n)\}\Big\} = 1.$$

Доказательство. Поскольку $T_n/n \to 0$ с вероятностью 1, существует последовательность натуральных чисел $\{N_k,\ k \ge 1\}$ такая, что $N_k \to \infty$ и

$$\mathbf{P}\Big\{\bigcup_{n\ge N_k}\{|T_n| > n/k\}\Big\} \le 2^{-k} \tag{6}$$

при любом $k = 1, 2, \dots$, причем, не ограничивая общности, можно считать, что $N_{k+1} \ge N_k + 1$. Положим

$$h^*(n) = \begin{cases} n & \text{при } n < N_1, \\ n/k & \text{при } N_k \le n < N_{k+1}. \end{cases} \tag{7}$$

Поскольку $N_k \to \infty$, то $h^*(n) = o(n)$. Для любого фиксированного $M \in \mathbf{N}$ имеем неравенство

$$\mathbf{P}\Big\{\bigcup_{n\ge 1}\{|T_n| > z + h^*(n)\}\Big\} \le \sum_{n=1}^{N_M - 1} \mathbf{P}\{|T_n| > z\} + \mathbf{P}\Big\{\bigcup_{n\ge N_M}\{|T_n| > h^*(n)\}\Big\}.$$

Следовательно,

$$\limsup_{z\to\infty} \mathbf{P}\Big\{\bigcup_{n\ge 1}\{|T_n| > z + h^*(n)\}\Big\} \le \mathbf{P}\Big\{\bigcup_{n\ge N_M}\{|T_n| > h^*(n)\}\Big\}.$$

Используя (6) и (7), получаем оценки

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\Big\{\bigcup_{n\ge N_M}\{|T_n| > h^*(n)\}\Big\} &\le \sum_{k=M}^{\infty} \mathbf{P}\Big\{\bigcup_{N_k\le n<N_{k+1}}\{|T_n| > h^*(n)\}\Big\} \\ &\le \sum_{k=M}^{\infty} \mathbf{P}\Big\{\bigcup_{n\ge N_k}\{|T_n| > n/k\}\Big\} \le \sum_{k=M}^{\infty} 2^{-k} = 2^{-M+1}.\end{aligned}$$

Так как M можно выбрать произвольным образом, предельный переход при $M \to \infty$ приводит к соотношению

$$\limsup_{z\to\infty} \mathbf{P}\Big\{\bigcup_{n\ge 1}\{|T_n| > z + h^*(n)\}\Big\} = 0,$$

что эквивалентно

$$\lim_{z\to\infty} \mathbf{P}\Big\{\bigcap_{n\ge 1}\{|T_n| \le z + h^*(n)\}\Big\} = 1.$$

Полагая теперь $h(n) \equiv \max\{h^*(k),\ k \le n\}$, получаем неубывающую функцию $h(n) = o(n)$, удовлетворяющую заключению леммы.

Лемма 4. *Пусть $a > 0$ и $n_1 \geq 1$. Пусть $h : \mathbf{N} \to \mathbf{R}_+$ — функция такая, что $h(n) = o(n)$ при $n \to \infty$. Если $G_+ \in \mathscr{L}$, то при $z \to \infty$*

$$\sum_{n=n_1}^{\infty} \overline{F}(z+na) \sim a^{-1}G_+(z); \quad \sum_{n=n_1}^{\infty} \overline{F}(z+na+h(n)) \sim a^{-1}G_+(z).$$

Доказательство. Для любого распределения F имеем

$$\sum_{n=n_1}^{\infty} \overline{F}(z+na) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n-1}^{n} \overline{F}(z+ay)\,dy = \int_{0}^{\infty} \overline{F}(z+ay)\,dy = a^{-1}G_+(z). \tag{8}$$

С другой стороны,

$$\sum_{n=n_1}^{\infty} \overline{F}(z+na) \geq \sum_{n=n_1}^{\infty} \int_{n}^{n+1} \overline{F}(z+ay)\,dy$$

$$= \int_{n_1}^{\infty} \overline{F}(z+ay)\,dy = a^{-1}G_+(z+an_1) \sim a^{-1}G_+(z)$$

при $z \to \infty$, ибо $G_+ \in \mathscr{L}$. Таким образом, первая эквивалентность леммы доказана. Перейдем к доказательству второй эквивалентности. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Прежде всего

$$\sum_{n=n_1}^{\infty} \overline{F}(z+na+h(n)) \leq \sum_{n=n_1}^{\infty} \overline{F}(z+na) \leq a^{-1}G_+(z).$$

Кроме того, поскольку $h(n) = o(n)$, существует $N \geq n_1$ такое, что $h(n) \leq \varepsilon n$ для любого $n \geq N$. Следовательно,

$$\sum_{n=n_1}^{\infty} \overline{F}(z+na+h(n)) \geq \sum_{n=N}^{\infty} \overline{F}(z+n(a+\varepsilon)) \sim (a+\varepsilon)^{-1}G_+(z)$$

при $z \to \infty$ ввиду первой эквивалентности леммы. Так как $\varepsilon > 0$ выбрано произвольным образом, это влечет вторую эквивалентность леммы.

Пусть $b_k \in \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{N}$, — ограниченная сходящаяся последовательность. Тогда, в частности, супремум $b = \sup_k |b_k|$ конечен. Положим

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} b_{n-k}\eta_k$$

и для любых натуральных чисел $n \geq 1$ и $m \geq 0$, $n > m$,

$$T_n^{(m)} = \sum_{k=1}^{n-m-1} b_{n-k}\eta_k.$$

По определению при $n > m$

$$T_n = T_n^{(m)} + \sum_{k=n-m}^{n} b_{n-k}\eta_k.$$

Последовательности $\{T_n\}$ и $\{T_n^{(m)}\}$ удовлетворяют условию леммы 3. Действительно, так как $\mathbf{E}\eta_i = 0$, имеем сходимости $\lim\limits_{n\to\infty} T_n/n = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} T_n^{(m_1)}/n = 0$ с вероятностью 1 в силу усиленного закона больших чисел (см. лемму 1). Следовательно, для любой функции $g(x)$ со свойством $g(x) \to \infty$ найдется функция $h(n)$ со свойством $h(n) = o(n)$ такая, что

$$\lim_{x\to\infty} \mathbf{P}\Big\{\bigcap_{n\ge 1} \{|T_n| \le g(x) + h(n)\}\Big\} = 1, \tag{9}$$

$$\lim_{x\to\infty} \mathbf{P}\Big\{\bigcap_{n\ge m_1} \{|T_n^{(m)}| \le g(x) + h(n)\}\Big\} = 1. \tag{10}$$

Кроме того, для $n > m_1 \in \mathbf{N}$ определим событие

$$\begin{aligned} B_n = &\bigcap_{j=1}^{n-m_1-1} \{|T_j| \le g(x)+h(j)\} \cap \{|T_n^{(m_1)}| \le g(x)+h(n)\} \\ &\cap \{b_{m_1}\eta_{n-m_1} > x+(2+m_1 b)g(x)+na+2h(n)\} \cap \bigcap_{j=n-m_1+1}^{n} \{|\eta_j| \le g(x)\}, \end{aligned}$$

а для $n > m_2 \in \mathbf{N}$ — событие

$$\begin{aligned} B_n^- = &\bigcap_{j=1}^{n-m_2-2} \{|T_j| \le g(x)+h(j)\} \cap \big\{\big|T_n^{(m_2)}\big| \le g(x)+h(n)\big\} \\ &\cap \{b_{m_2}\eta_{n-m_2} > x+(2+m_2 b)g(x)+na+2h(n)\} \cap \bigcap_{j=n-m_2+1}^{n} \{|\eta_j| \le g(x)\}. \end{aligned}$$

Лемма 5. *Пусть $m_1, m_2 \in \mathbf{N}$ — произвольные натуральные числа такие, что $b_{m_1} \ge 0$ и $b_{m_2} \le 0$. Тогда события B_n, $n > m_1$, и B_n^-, $n > m_2$, попарно не пересекаются.*

Доказательство. Рассмотрим для примера любые два события из набора $\{B_n, n > m_1\}$, скажем B_k и B_n, $m_1 < k < n$. Если $n \le k + m_1$, то для $\omega \in B_n$ имеем

$$b_{m_1}\eta_{n-m_1}(\omega) > x + (2+m_1 b)g(x) + na + 2h(n) \ge b_{m_1} g(x),$$

в то время как для $\omega \in B_k$

$$b_{m_1}\eta_{n-m_1}(\omega) \le b_{m_1}|\eta_{n-m_1}(\omega)| \le b_{m_1} g(x).$$

Если $n > k + m_1$, то для $\omega \in B_k$ получим

$$\begin{aligned} T_k(\omega) &= T_k^{(m_1)}(\omega) + b_{m_1}\eta_{k-m_1}(\omega) + \sum_{j=k-m_1+1}^{k} b_{k-j}\eta_j(\omega) \\ &> -g(x) - h(k) + x + (2+m_1 b)g(x) + ka + 2h(k) - m_1 b g(x) \ge g(x) + h(k), \end{aligned}$$

в то время как для $\omega \in B_n$ выполняется неравенство $|T_k(\omega)| \le g(x) + h(k)$. Доказательство завершается подобными же рассуждениями.

Лемма 6. *Пусть $b_{m_1} > 0$ и $G_+ \in \mathscr{L}$. Пусть $g(x) \to \infty$ — функция такая, что*

$$G_+((x + g(x))/b_{m_1}) \sim G_+(x/b_{m_1})$$

при $x \to \infty$. Тогда

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathbf{P}\bigl\{\bigcup\limits_{n>m_1} B_n\bigr\}}{b_{m_1} G_+(x/b_{m_1})} = \frac{1}{a}.$$

Доказательство. Существование такой функции $g(x)$ гарантировано леммой 2. В силу леммы 5

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\Bigl\{\bigcup_{n>m_1} B_n\Bigr\} &= \sum_{n>m_1} \mathbf{P}\{B_n\} \\ &= \sum_{n>m_1} \mathbf{P}\left\{\bigcap_{j=1}^{n-m_1-1} \{|T_j| \le g(x)+h(j)\} \cap \bigl\{\bigl|T_n^{(m_1)}\bigr| \le g(x)+h(n)\bigr\}\right\} \\ &\qquad \times \mathbf{P}^{m_1}\{|\eta_1| \le g(x)\}\mathbf{P}\{b_{m_1}\eta_{n-m_1} > x+(2+m_1 b)g(x)+na+2h(n)\}.\end{aligned}$$

Отсюда вытекают оценка сверху

$$\mathbf{P}\Bigl\{\bigcup_{n>m_1} B_n\Bigr\} \le \sum_{n>m_1} \mathbf{P}\{b_{m_1}\eta_1 > x + na\} \tag{11}$$

и оценка снизу

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\Bigl\{\bigcup_{n>m_1} B_n\Bigr\} \\ &\ge \mathbf{P}\Bigl\{\bigcap_{n\ge 1}\{|T_n| \le g(x)+h(n)\} \cap \bigcap_{n\ge m_1} \bigl\{\bigl|T_n^{(m_1)}\bigr| \le g(x)+h(n)\bigr\}\Bigr\} \\ &\times \mathbf{P}^{m_1}\{|\eta_1| \le g(x)\} \sum_{n>m_1} \mathbf{P}\{b_{m_1}\eta_1 > x+(2+m_1 b)g(x)+na+2h(n)\}.\end{aligned} \tag{12}$$

При $x \to \infty$ справедливы сходимость $\mathbf{P}\{|\eta_1| \le g(x)\} \to 1$, а также сходимости (9) и (10). Следовательно, неравенства (11) и (12), а также лемма 4 при $z = (x + (2+m_1 b)g(x))/b_{m_1}$ влекут искомое утверждение леммы.

Лемма 7. *Пусть $b_{m_1} \ge 0$, $b_{m_2} \le 0$ и $b_{m_1} + |b_{m_2}| > 0$. Пусть $G_{b_{m_1},|b_{m_2}|} \in \mathscr{L}$ и $g(x) \to \infty$ такая функция,* что (здесь $m = \max\{m_1, m_2\}$) *имеет место эквивалентность*

$$G_{b_{m_1},|b_{m_2}|}(x + (2 + mb)g(x)) \sim G_{b_{m_1},|b_{m_2}|}(x)$$

при $x \to \infty$. Тогда

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\mathbf{P}\bigl\{\bigcup\limits_{n>m} (B_n \cup B_n^-)\bigr\}}{G_{b_{m_1},|b_{m_2}|}(x)} \ge \frac{1}{a}.$$

Замечание. Отметим, что $G_{B,b} \in \mathscr{L}$, если $G_+ \in \mathscr{L}$ и $G_- \in \mathscr{L}^-$. Еще одним комплексом условий, достаточных для принадлежности $G_{B,b} \in \mathscr{L}$, является $G_+ \in \mathscr{L}$ и $G_-(x/b) = o(G_+(x/B))$ при $x \to \infty$. Отметим также, что функция $g(x)$ в лемме 7 существует, поскольку наряду с функцией $g(x)$ в лемме 2 всегда можно брать и функцию $(2 + mb)g(x)$.

Доказательство леммы 7. В силу леммы 5

$$\mathbf{P}\Big\{\bigcup_{n>m}(B_n\cup B_n^-)\Big\}=\mathbf{P}\Big\{\bigcup_{n>m}B_n\Big\}+\mathbf{P}\Big\{\bigcup_{n>m}B_n^-\Big\}.$$

Следуя рассуждениям из доказательства леммы 6, выводим, что для любого $\varepsilon>0$ найдется x_0 такое, что для $x\geq x_0$

$$\mathbf{P}\Big\{\bigcup_{n>m_1}B_n\Big\}\geq(1-\varepsilon)\sum_{n>m_1}\mathbf{P}\{b_{m_1}\eta_1>x+(2+mb)g(x)+na+2h(n)\};$$

$$\mathbf{P}\Big\{\bigcup_{n>m_2}B_n^-\Big\}\geq(1-\varepsilon)\sum_{n>m_2}\mathbf{P}\{|b_{m_2}|\eta_1<-x-(2+mb)g(x)-na-2h(n)\}.$$

Значит, ввиду леммы 4

$$\mathbf{P}\Big\{\bigcup_{n>m}(B_n\cup B_n^-)\Big\}\geq(1-\varepsilon)\sum_{n>m}\bigg(\overline{F}\bigg(\frac{x+(2+mb)g(x)+na+2h(n)}{b_{m_1}}\bigg)$$
$$+F\bigg(-\frac{x+(2+mb)g(x)+na+2h(n)}{|b_{m_2}|}\bigg)\bigg)$$
$$\sim(1-\varepsilon)a^{-1}G_{b_{m_1},|b_{m_2}|}(x+(2+mb)g(x))\sim(1-\varepsilon)a^{-1}G_{b_{m_1},|b_{m_2}|}(x).$$

2.2. Асимптотические оценки снизу для хвоста распределения супремума. Теперь мы готовы сформулировать и доказать асимптотическую оценку снизу для хвоста $\mathbf{P}\{\sup_n S_n>x\}$ при $x\to\infty$.

Теорема 2. *Пусть m_1, $m_2\in\mathbf{N}$ — два произвольных различных натуральных числа. Положим $C=\max\{0,\bar c_{m_1}\}\geq 0$ и $c=\min\{0,\bar c_{m_2}\}\leq 0$. Если $C+|c|>0$ и $G_{C,|c|}\in\mathscr{L}$, то*

$$\liminf_{x\to\infty}\frac{\mathbf{P}\{\sup_n S_n>x\}}{G_{C,|c|}(x)}\geq\frac{1}{a}. \tag{13}$$

Доказательство. В лемме 7 положим $b_k=\bar c_k$ и $T_n=S_n+na$. Обозначим $m=\max\{m_1,m_2\}$, и пусть $g(x)\to\infty$ такая функция, что

$$G_{C,|c|}(x+(2+mb)g(x))\sim G_{C,|c|}(x)$$

при $x\to\infty$; ее существование гарантировано леммой 2 (см. замечание после леммы 7). Для $n>m$ рассмотрим события

$$\widetilde{B}_n=\big\{\big|T_n^{(m_1)}\big|\leq g(x)+h(n)\big\}\cap\{C\eta_{n-m_1}>x+(2+m_1b)g(x)+na+2h(n)\}$$
$$\cap\bigcap_{j=n-m_1+1}^{n}\{|\eta_j|\leq g(x)\},$$

$$\widetilde{B}_n^-=\big\{\big|T_n^{(m_2)}\big|\leq g(x)+h(n)\big\}\cap\{|c|\eta_{n-m_2}>x+(2+m_2b)g(x)+na+2h(n)\}$$
$$\cap\bigcap_{j=n-m_2+1}^{n}\{|\eta_j|\leq g(x)\},$$

где $h(n)$ — функция, рассмотренная в (9) и (10). По определению $B_n\subseteq\widetilde{B}_n\subseteq\{S_n>x\}$ и $B_n^-\subseteq\widetilde{B}_n^-\subseteq\{S_n>x\}$. Следовательно,

$$\mathbf{P}\{\sup_n S_n>x\}\geq\mathbf{P}\Big\{\bigcup_n(B_n\cup B_n^-)\Big\}.$$

Теперь искомое утверждение следует из леммы 7.

Из доказательства теоремы 2 немедленно вытекают следующие утверждения.

Следствие 2. *Пусть* $\bar{c}_m > 0$ *для некоторого* $m \geq 0$ *и* $G_+ \in \mathscr{L}$. *Тогда*

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\mathbf{P}\{\sup\limits_n S_n > x\}}{\bar{c}_m G_+(x/\bar{c}_m)} \geq \frac{1}{a}.$$

Следствие 3. *Пусть* $\bar{c}_m < 0$ *для некоторого* $m \geq 0$ *и* $G_- \in \mathscr{L}^-$. *Тогда*

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\mathbf{P}\{\sup\limits_n S_n > x\}}{|\bar{c}_m| G_-(x/|\bar{c}_m|)} \geq \frac{1}{a}.$$

§ 3. Оценка сверху

Начнем с определения класса субэкспоненциальных распределений, используемого в настоящем параграфе при выводе асимптотических при $x \to \infty$ оценок сверху для хвоста $\mathbf{P}\{\sup\limits_n S_n > x\}$.

Распределение G в $\mathbf{R}_+$ называется *субэкспоненциальным*, если $G(x) < 1$ для любого $x \geq 0$ и

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{G * G}(x)}{\overline{G}(x)} = 2, \tag{14}$$

где $\overline{G * G}(x)$ обозначает хвост свертки

$$G * G(x) = \int\limits_0^x G(x-y)\, G(dy).$$

Класс всех субэкспоненциальных распределений обозначаем через $\mathscr{S}$. Хорошо известно, что $\mathscr{S} \subset \mathscr{L}$.

Ради простоты будем писать $G_{B,b} \in \mathscr{S}$, когда $G_{B,b}(x)/G_{B,b}(0)$, $x \geq 0$, представляет собой хвост субэкспоненциального распределения. В частности, $G_+ \in \mathscr{S}$, если *интегральный хвост* $G_+(x)/G_+(0)$, $x \geq 0$, распределения $F(x)$ является хвостом субэкспоненциального распределения.

Хорошо известно, что асимптотическое поведение хвоста распределения супремума частичных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин описывается соотношением

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{n\geq 1}\left\{\sum_{k=1}^n \eta_k - na\right\} > x\right\} \sim a^{-1} G_+(x) \quad \text{при } x \to \infty \tag{15}$$

при условии $G_+ \in \mathscr{S}$ (см. [7], а также [8–10]). При этом оказывается, что $G_+ \in \mathscr{S}$ является не только достаточным, но и необходимым условием для выполнения (15) (см. [11]).

Лемма 8. *Пусть* $b_k \in \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{N}$, $B \geq \sup\{0, b_k, k \in \mathbf{N}\}$ *и* $b \leq \inf\{0, b_k, k \in \mathbf{N}\}$. *Пусть существует предел*

$$\lim_{k\to\infty} b_k = \tilde{b}. \tag{16}$$

Тогда если $B + |b| > 0$ *и* $G_{B,|b|} \in \mathscr{S}$, *то*

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\mathbf{P}\left\{\sup\limits_n \left\{\sum\limits_{k=1}^n b_{n-k}\eta_k - na\right\} > x\right\}}{G_{B,|b|}(x)} \leq \frac{1}{a}.$$

Замечание. Условие $G_{B,|b|} \in \mathscr{S}$ выполнено, если, например, $G_+ \in \mathscr{S}$ и $G_-(x/b) = (\gamma + o(1))G^+(x/B)$ для некоторого $\gamma \geq 0$ при $x \to \infty$.

Доказательство леммы 8. Наше доказательство основано на использовании метода срезок. Для любого действительного $z > 0$ и любой случайной величины η с распределением F положим

$$\eta^{[z]}(\omega) \equiv \begin{cases} B\eta(\omega) & \text{при } \eta(\omega) > z, \\ \tilde{b}\eta(\omega) & \text{при } -z \leq \eta(\omega) \leq z, \\ b\eta(\omega) & \text{при } \eta(\omega) < -z. \end{cases}$$

Если $x > \max\{B, -b, |\tilde{b}|\}z$, то

$$\mathbf{P}(\eta^{[z]} > x) = \mathbf{P}(B\eta > x) + \mathbf{P}(b\eta > x) = \overline{F}(x/B) + F(-x/|b|). \tag{17}$$

Поскольку $G_{B,|b|} \in \mathscr{S}$, интегральный хвост распределения $\eta_1^{[z]}$ является субэкспоненциальным. Далее, для любых $\omega \in \Omega$ и $b' \in [b, B]$ имеем

$$b'\eta(\omega) \leq \begin{cases} B\eta(\omega) & \text{при } \eta(\omega) > z, \\ b'\eta(\omega) & \text{при } -z < \eta(\omega) \leq z, \\ b\eta(\omega) & \text{при } \eta(\omega) < -z \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \eta^{[z]}(\omega) & \text{при } \eta(\omega) > z, \\ \eta^{[z]}(\omega) + (b' - \tilde{b})\eta(\omega) & \text{при } -z < \eta(\omega) \leq z, \\ \eta^{[z]}(\omega) & \text{при } \eta(\omega) < -z \end{cases}$$

$$\leq \eta^{[z]}(\omega) + |\tilde{b} - b'|z.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n} b_{n-k}\eta_k \leq \sum_{k=1}^{n} \eta_k^{[z]} + z\sum_{k=0}^{n-1} |\tilde{b} - b_k|.$$

Фиксируем $\varepsilon \in (0, a/2)$. Поскольку $b_k \to \tilde{b}$, существует K такое, что $|b_k - \tilde{b}| \leq \varepsilon$ для любого $k \geq K$. Поэтому

$$\sum_{k=1}^{n} b_{n-k}\eta_k \leq \sum_{k=1}^{n} \eta_k^{[z]} + z\sum_{k=0}^{K} |\tilde{b} - b_k| + n\varepsilon \equiv \sum_{k=1}^{n} \eta_k^{[z]} + \hat{b}z + n\varepsilon,$$

где

$$\hat{b} \equiv \sum_{k=0}^{K} |\tilde{b} - b_k|.$$

Так как $\mathbf{E}\eta_1 = 0$, найдется достаточно большое $z > 0$ такое, что $\mathbf{E}\eta_1^{[z]} \leq \varepsilon$. Ввиду (15) и (17)

$$\mathbf{P}\left(\sup_{n\geq 1}\left\{\sum_{k=1}^{n} \eta_k^{[z]} - na\right\} > x\right) \sim \frac{1}{a - \mathbf{E}\eta_1^{[z]}} G_{B,|b|}(x)$$

при $x \to \infty$. Тем самым

$$\mathbf{P}\left(\sup_{n}\left\{\sum_{k=1}^{n} b_{n-k}\eta_k - na\right\} > x\right) \leq \mathbf{P}\left(\sup_{n}\left\{\sum_{k=1}^{n} \eta_k^{[z]} - n(a-\varepsilon)\right\} > x - \hat{b}z\right)$$

$$\leq \frac{1 + o(1)}{a - 2\varepsilon} G_{B,|b|}(x - \hat{b}z) \sim \frac{1}{a - 2\varepsilon} G_{B,|b|}(x).$$

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ доказательство закончено.

Из последней леммы вытекает следующая асимптотическая верхняя оценка для хвоста $\mathbf{P}\{\sup_n S_n > x\}$.

Теорема 3. *Пусть*

$$\overline{C} = \sup\{0, \bar{c}_k, k \in \mathbf{N}\} \geq 0, \quad \bar{c} = \inf\{0, \bar{c}_k, k \in \mathbf{N}\} \leq 0.$$

Тогда если $G_{\overline{C},|\bar{c}|} \in \mathscr{S}$, *то*

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\mathbf{P}\{\sup_n S_n > x\}}{G_{\overline{C},|\bar{c}|}(x)} \leq \frac{1}{a}. \tag{18}$$

Доказательство вытекает из леммы 8, если положить $b_k = \bar{c}_k$, $B = \overline{C}$ и $b = \bar{c}$. При этом условие (16) выполнено ввиду (3).

В случае, когда все коэффициенты $\bar{c}_k$ неотрицательны или все неположительны, мы немедленно получаем следующие два следствия теоремы 3.

Следствие 4. *Предположим, что* $\bar{c}_k \geq 0$ *для любого* $k \in \mathbf{N}$. *Пусть* $G_+ \in \mathscr{S}$ *и* $\overline{C} = \sup_k \bar{c}_k > 0$. *Тогда*

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\mathbf{P}\{\sup_n S_n > x\}}{\overline{C} G_+(x/\overline{C})} \leq \frac{1}{a}.$$

Следствие 5. *Предположим, что* $\bar{c}_k \leq 0$ *для любого* $k \in \mathbf{N}$. *Пусть* $G_- \in \mathscr{S}$ *и* $\bar{c} = \inf_k \bar{c}_k < 0$. *Тогда*

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\mathbf{P}\{\sup_n S_n > x\}}{|\bar{c}| G_-(x/|\bar{c}|)} \leq \frac{1}{a}.$$

§ 4. Асимптотики в случае правильно меняющихся хвостов

Настоящий параграф посвящен случаям, оставшимся вне рассмотрения в теореме 1.

Функция $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ называется *почти правильно меняющейся*, если

$$\lim_{\delta\downarrow 0} \lim_{x\to\infty} \frac{f(x(1+\delta))}{f(x)} = 1. \tag{19}$$

Обозначим через $\mathscr{I}\mathscr{R}$ класс всех функций, удовлетворяющих (19). Правильно меняющиеся на бесконечности функции дают пример функций класса $\mathscr{I}\mathscr{R}$. Если распределение G имеет почти правильно меняющийся хвост, то $G \in \mathscr{S}$.

Теорема 4. *Пусть* $G_{\overline{C},|\bar{c}|} \in \mathscr{S}$. *Предположим, что выполнено одно из следующих условий:*

(i) $\overline{C} > 0$, $\overline{C} > \bar{c}_m$ *для любого* m, $\bar{c} = \bar{c}_{m_2} < 0$ *для некоторого* m_2 *и* $G_+ \in \mathscr{I}\mathscr{R}$;

(ii) $\overline{C} = \bar{c}_{m_1} > 0$ *для некоторого* m_1, $\bar{c} < 0$, $\bar{c} < \bar{c}_m$ *для любого* m *и* $G_- \in \mathscr{I}\mathscr{R}$;

(iii) $\overline{C} > 0$, $\overline{C} > \bar{c}_m$ *для любого* m, $\bar{c} < 0$, $\bar{c} < \bar{c}_m$ *для любого* m *и* $G_{\overline{C},|\bar{c}|} \in \mathscr{I}\mathscr{R}$.

Тогда

$$\mathbf{P}\{\sup_n S_n > x\} \sim a^{-1} G_{\overline{C},|\bar{c}|}(x) \quad \textit{при } x \to \infty. \tag{20}$$

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и предположим, что выполнено условие (i). В силу (19) существуют $\delta \in (0, \varepsilon]$ и $x_0 > 0$ такие, что для $x \geq x_0$

$$\frac{G_+(x/(\overline{C}-\delta))}{G_+(x/\overline{C})} \geq 1 - \varepsilon. \tag{21}$$

Поскольку $\sup\limits_{k\geq 0} \bar{c}_k = \overline{C}$, найдется k_0 такое, что $\bar{c}_{k_0} \geq \overline{C} - \delta$. Из (13) вытекает, что

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\mathbf{P}\{\sup_n S_n > x\}}{G_{\bar{c}_{k_0},|\bar{c}_{m_2}|}(x)} \geq \frac{1}{a}. \tag{22}$$

Принимая во внимание равенства

$$\frac{G_{\bar{c}_{k_0},|\bar{c}_{m_2}|}(x)}{G_{\overline{C},|\bar{c}|}(x)} = \frac{G_{\bar{c}_{k_0},|\bar{c}|}(x)}{G_{\overline{C},|\bar{c}|}(x)} = \frac{\bar{c}_{k_0} G_+(x/\bar{c}_{k_0}) + |\bar{c}| G_-(x/|\bar{c}|)}{\overline{C} G_+(x/\overline{C}) + |\bar{c}| G_-(x/|\bar{c}|)}$$

и (21), получаем при $x \geq x_0$ оценку

$$\frac{G_{\bar{c}_{k_0},|\bar{c}_{m_2}|}(x)}{G_{\overline{C},|\bar{c}|}(x)} \geq \frac{(\overline{C}-\delta)(1-\varepsilon) G_+(x/\overline{C}) + |\bar{c}| G_-(x/|\bar{c}|)}{\overline{C} G_+(x/\overline{C}) + |\bar{c}| G_-(x/|\bar{c}|)}$$
$$\geq (\overline{C}-\delta)(1-\varepsilon)/\overline{C} \geq (\overline{C}-\varepsilon)(1-\varepsilon)/\overline{C}.$$

Так как $\varepsilon > 0$ выбрано произвольным образом, из (22) следует, что

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\mathbf{P}\{\sup_n S_n > x\}}{G_{\overline{C},|\bar{c}|}(x)} \geq \frac{1}{a}.$$

Объединяя это неравенство с верхней оценкой (18), приходим к (20). В случаях (ii) и (iii) доказательство проводится таким же образом.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Asmussen S., Henriksen L. Flfie, Klüppelberg C.* Large claims approximations for risk processes in a Markovian environment // Stochastic Process. Appl. 1994. V. 54. P. 29–43.
2. *Asmussen S., Hfijgaard B.* Ruin probability approximations for Markov-modulated risk processes with heavy tails // Theory Random Proc. 1996. V. 2. P. 96–107.
3. *Asmussen S., Schmidli H., Schmidt V.* Tail probabilities for non-standard risk and queueing processes with subexponential jumps // Adv. Appl. Probab. 1999. V. 31. P. 422–447.
4. *Baccelli F., Schlegel S., Schmidt V.* Asymptotics of stochastic networks with subexponential service times // Queueing Systems. Theory Appl. 1999. V. 33. P. 205–232.
5. *Jelenković P. R., Lazar A. A.* A network multiplexer with multiple time scale and subexponential arrivals // Stochastic Networks: Stability and Rare Events. New York: Springer, 1996. P. 215–235.
6. *Mikosch T., Samorodnitsky G.* The supremum of a negative drift random walk with dependent heavy-tailed steps // Ann. Appl. Probab. 2000. V. 10. P. 1025–1064.
7. *Embrechts P., Veraverbeke N.* Estimates for the probability of ruin with special emphasis on the possibility of large claims // Insurance Math. Econom. 1982. V. 1. P. 55–72.
8. *Asmussen S.* Ruin probabilities. Singapore: World Sci. Publ. Co., 2000.
9. *Embrechts P., Klüppelberg C., Mikosch T.* Modelling extremal events for insurance and finance. Berlin: Springer-Verl., 1997.

10. *Rolski T., Schmidli H., Schmidt V., Teugels J.* Stochastic processes for insurance and finance. Chichester: John Wiley & Sons, 1999.
11. *Korshunov D.* On the distribution tail of the maxima of a random walk // Stochastic Proc. Appl. 1997. V. 72. P. 97–103.

Статья поступила 11 апреля 2003 г.

Коршунов Дмитрий Алексеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
korshunov@math.nsc.ru

Шлегель Сабина (Sabine Schlegel)
EURANDOM, P.O. Box 513, NL-5600 MB Eindhoven, The Netherlands
schlegel@eurandom.tue.nl

Шмидт Фолкер (Volker Schmidt)
Department of Stochastics, University of Ulm, D-89069 Ulm, Germany
schmidt@mathematik.uni-ulm.de