Сибирский математический журнал
Июль—август, 2003. Том 44, № 4

УДК 517.574

КРИТЕРИИ (СУБ–)ГАРМОНИЧНОСТИ И ПРОДОЛЖЕНИЕ (СУБ–)ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Б. Н. Хабибуллин

Аннотация: Получены критерии гармоничности и субгармоничности функции в области из $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, в терминах специальных мер Аренса — Зингера и Йенсена. Также установлен критерий (суб-)гармоничности δ-субгармонической функции в терминах ассоциированного заряда Рисса и специальных функций Аренса — Зингера и Йенсена. При этом используется полученная в работе теорема о продолжении (суб-)гармонических функций на полярные множества.

Ключевые слова: гармоническая функция, субгармоническая функция, мера Йенсена, мера Аренса — Зингера

Введение и основные результаты

Всюду ниже Ω — область в $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$; $|x|$ — евклидова норма точки $x \in \mathbb{R}^d$; m — лебегова мера на $\mathbb{R}^d$; $(\mathbb{R}^d)^* = \mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$ — одноточечная компактификация Александрова для $\mathbb{R}^d$.

Через $H(\Omega)$ (соответственно $SH(\Omega)$) обозначаем семейство всех гармонических (соответственно субгармонических локально интегрируемых по m) функций на Ω. В частности, функции из $SH(\Omega)$ не могут быть тождественно равны $-\infty$.

Положительность или неотрицательность (соответственно отрицательность или неположительность) всюду понимается как ≥ 0 (соответственно ≤ 0).

Пусть T — подмножество в Ω. Через $\mathscr{M}(T)$ (соответственно $\mathscr{M}^+(T)$ или $\mathscr{M}_1^+(T)$) обозначаем класс всех вещественнозначных (соответственно положительных или вероятностных) борелевских мер μ с компактным в $\mathbb{R}^d$ носителем $\operatorname{supp}\mu \subset T$.

Определение 1 (ср. [1–8]). Меру $\mu \in \mathscr{M}^+(\Omega)$ называем *мерой Йенсена* (соответственно *мерой Аренса — Зингера*) для точки $x \in \Omega$ на Ω, если

$$u(x) \leq \int u\, d\mu \quad \text{для всех } u \in SH(\Omega),$$

соответственно

$$u(x) = \int u\, d\mu \quad \text{для всех } u \in H(\Omega).$$

Работа выполнена при поддержке гранта NSERC–46443–96 (McGill University, Montreal) и частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 00–01–00770).

Класс всех мер Йенсена (соответственно мер Аренса — Зингера) для точки $x \in \Omega$ на Ω обозначаем через $J_x(\Omega)$ (соответственно $AS_x(\Omega)$). При этом полагаем

$$J_x(\Omega;T) \stackrel{\text{def}}{=} J_x(\Omega) \cap \mathscr{M}(T), \quad AS_x(\Omega;T) \stackrel{\text{def}}{=} AS_x(\Omega) \cap \mathscr{M}(T), \quad T \subset \Omega.$$

Очевидны строгие включения $J_x(\Omega) \subset AS_x(\Omega) \subset \mathscr{M}_1^+(\Omega)$.

Тривиальные примеры введенных мер: мера Дирака δ_x, т. е. единичная масса, сосредоточенная в точке x; вероятностная мера s_x^t, сосредоточенная на сфере достаточно малого радиуса t с центром в точке x и инвариантная относительно вращений с центром в точке p, т. е. мера, действующая как усреднение по этой сфере; вероятностная мера m_x^t, сосредоточенная на открытом шаре $B(x,t)$ достаточно малого радиуса $t > 0$ с центром в точке x и инвариантная относительно вращений с центром в точке x, т. е. мера, действующая как усреднение по этому шару; гармоническая мера $\omega(\cdot, x)$ для относительно компактной области ω в Ω в точке $x \in \Omega$. Менее очевидные примеры мер из определения 1 (иногда неявно или косвенно определенных) можно найти в [2–7, 9–11].

Первоначально эти специальные меры возникли в связи с потребностями теории равномерных алгебр и теории аппроксимации на компактах (см., в частности, [1–3]), а позже нашли применение и в различных вопросах теории функций, определенных в фиксированной области (см., в частности, [4–11]).

Первый критерий (суб-)гармоничности. *Функция u принадлежит $SH(\Omega)$ (соответственно $H(\Omega)$) тогда и только тогда, когда она полунепрерывна сверху (соответственно непрерывна) в Ω и для каждой точки $x \in \Omega$ и каждого шара $B(x,1/n)$, $n \in \mathbb{N}$, найдется мера Йенсена (соответственно Аренса — Зингера) $\mu_x^n \neq \delta_x$ для x на Ω такая, что $\operatorname{supp}\mu_x^n \subset B(x,1/n)$ и*

$$u(x) \le \int u\, d\mu_x^n \quad (\textit{соответственно } u(x) = \int u\, d\mu_x^n). \tag{0.1}$$

Конечно, известны и гораздо более тонкие условия гармоничности, если меры μ_x^n имеют специальный вид. В частности, их может быть всего две или даже одна для каждой точки x, но одного и того же вида (см. обзор [12] и особенно серию совместных работ В. Хансена и Н. Надирашвили [9] и др. по проблеме Литтлвуда). В нашем же критерии все меры μ_x^n, вообще говоря, различные и произвольные в $J_x(\Omega)$ (соответственно $AS_x(\Omega)$) для каждого $x \in \Omega$.

Определение 2 (ср. [2, 4, 6, 7]). Функцию $V : (\mathbb{R}^d)^* \setminus \{x\} \to [-\infty, +\infty)$ называем *функцией Аренса — Зингера для точки* $x \in \Omega$ на Ω, если выполнены следующие три условия:

(1) существует компакт K в Ω такой, что $x \in K$ и $V \equiv 0$ вне компакта K;

(2) функция V субгармоническая в $(\mathbb{R}^d)^* \setminus \{x\}$;

(3) выполнено соотношение

$$V(y) \le -\log|y-x| + O(1), \quad y \to 0, \quad y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{x\}, \tag{0.2}$$

$$V(y) \le |y-x|^{2-d}, \quad y \in \mathbb{R}^d \setminus \{x\}, \quad d > 2. \tag{0.3}$$

Если функция Аренса — Зингера для точки $x \in \Omega$ на Ω неотрицательна всюду на $(\mathbb{R}^d)^* \setminus \{x\}$, то называем ее *функцией Йенсена* для точки $x \in \Omega$ на Ω.

Класс всех функций Йенсена (соответственно Аренса — Зингера) для точки $x \in \Omega$ на Ω обозначаем через $PJ_x(\Omega)$ (соответственно $PAS_x(\Omega)$). Через

$PJ_x(\Omega;T)$ (соответственно $PAS_x(\Omega;T)$), где $T\subset\Omega$, обозначаем классы функций Йенсена (соответственно Аренса — Зингера) для точки $x\in\Omega$ на Ω, тождественно равные нулю вне T.

Эти классы функций первоначально появились, по-видимому, в книге Т. Гамелина [2, теоремы 3.2, 3.3] как потенциалы мер Йенсена и Аренса — Зингера (при $d=2$ и в несколько иной форме) в связи с потребностями теории равномерных алгебр, а позже нашли применения в случае $\Omega=\mathbb{C}$ при исследовании различных вопросов теории целых и мероморфных функций [4, 6, 13, 14], а также голоморфных функций в односвязных областях из $\mathbb{C}^n$ [7]. Фактически функции Йенсена или, более общо, Аренса — Зингера есть не что иное, как обобщение продолженных функций Грина для относительно компактных в Ω областей D с полюсом в точке x. Нетрадиционные примеры функций Йенсена, отличных от функций Грина, можно найти, например, в [6, 7].

Следуя [15], δ-субгармоническую функцию u на открытом подмножестве $\Omega\subset\mathbb{R}^d$, $d\geq 2$, определяем как разность $u=u_1-u_2$ каких-либо двух субгармонических в Ω функций u_1 и u_2. Каждая δ-субгармоническая функция однозначно определена и принимает значения из $[-\infty,+\infty]$ на Ω вне некоторого полярного множества. Каждой δ-субгармонической функции u однозначно сопоставляется вещественнозначная борелевская мера $\nu_u=\frac{1}{c_d}\cdot\Delta u$, где оператор Лапласа Δ действует в смысле теории обобщенных функций, $c_d=2\max\{1,d-2\}\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$. Эту меру ν_u называют (ассоциированным) распределением зарядов Рисса функции u.

Следующая теорема дает критерий (суб-)гармоничности δ-субгармонической функции в терминах распределения зарядов Рисса этой функции.

Второй критерий (суб-)гармоничности. *Пусть u — δ-субгармоническая функция на открытом подмножестве $\Omega\subset\mathbb{R}^d$, $d\geq 2$, с распределением зарядов Рисса ν_u. Функция u продолжается как субгармоническая (соответственно гармоническая) на все Ω тогда и только тогда, когда для какого-либо полярного множества E, вне которого значения функции u определены, выполнены следующие условия:*

(1) *функция u локально ограничена сверху (соответственно локально ограничена) в $\Omega\setminus E$;*

(2) *функция u полунепрерывна сверху в $\Omega\setminus E$;*

(3) *для каждой точки $x\in\Omega\setminus E$ и каждого шара $B(x,1/n)$, $n\in\mathbb{N}$, найдется функция Йенсена V_x^n для точки x на Ω такая, что $V_x^n\not\equiv 0$ в $\mathbb{R}^d\setminus\{x\}$, $V_x^n\equiv 0$ вне шара $B(x,1/n)$ и выполнено соотношение*

$$\int\limits_{B(x,1/n)\setminus\{x\}} V_x^n\,d\nu_u \geq (\textit{соответственно } =)\ 0,\quad x\in\Omega\setminus E. \tag{0.4}$$

Это продолжение, если оно существует, единственно.

Доказательство этого критерия использует теорему о продолжении (суб-)гармонических функций на полярные множества из § 3, обобщающую или дополняющую известные результаты подобного типа (см. [16, теорема 5.18; 17, 1.V.5; 18]) и в определенном направлении уточняющую первый критерий (суб-)гармоничности.

Если во втором критерии «пробные» функции Йенсена V_x^n являются сдвигами одних и тех же функций Йенсена V^n, то этот критерий можно рассматривать как критерий положительности заряда.

Критерий положительности заряда. *Пусть ν — заряд, т. е. вещественнозначная борелевская мера, на области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Заряд ν — положительная мера тогда и только тогда, когда при каждом n найдется функция Йенсена V^n для нуля на шаре $B(0, 1/n)$, $n = 1, 2, \dots$, такая, что $V^n \not\equiv 0$ на $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ и для почти всех по мере m точек $x \in \Omega$ выполнено*

$$\int V^n(x+y)\,d\nu(y) \geq 0 \quad \text{п. в. по } m, \quad n \geq n(x). \tag{0.5}$$

В первых двух параграфах статьи устанавливаются вспомогательные свойства мер и функций Йенсена и Аренса — Зингера в несколько большей общности, чем необходимо для наших целей. В последнем § 3 доказываются сформулированные выше критерии.

Часть результатов настоящей статьи анонсирована в [19, 20]. Для односвязных областей $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ некоторые утверждения из § 1, 2 установлены и применялись в [6, 7]. Отметим, не останавливаясь здесь на этом подробно, что результаты из § 1, 2 позволяют распространить часть утверждений из [6, 8] на многосвязные области.

Автор выражает глубокую признательность П. Кусису за поддержку, внимание к работе и плодотворные обсуждения, П. Готье и К. Говрисанкарану за полезные консультации, Т. Рансфорду за стимулирующие контакты, Ю. Н. Гололобову за техническое содействие.

§ 1. Двойственность между мерами и функциями Йенсена и Аренса — Зингера

Покажем, что между классами мер Йенсена (соответственно Аренса — Зингера) и классами функций Йенсена (соответственно Аренса — Зингера) существует естественная биекция, соответствующая известной взаимосвязи между гармоническими мерами и функциями Грина.

Замыкание множества B (в соответствующем пространстве) обозначаем через $\overline{B}$. Подмножество $B \subset \Omega$ называется Ω-*ограниченным*, если $\overline{B}$ в Ω есть компактное подмножество области Ω.

Пусть F — замкнутое подмножество в Ω. *«Дырой»* (hole) в F относительно Ω будем называть, следуя, например, [21, 22], всякую Ω-ограниченную связную компоненту в $\Omega \setminus F$. В частности, когда в качестве множества F рассматривается компакт K в Ω, то дыра в K (относительно Ω) — это всякая ограниченная в $\mathbb{R}^d$ связная компонента дополнения $\mathbb{R}^d \setminus K$, которая целиком содержится в Ω. Через $\widehat{F}(\Omega)$ обозначаем объединение замкнутого множества $F \subset \Omega$ со всеми дырами в F относительно Ω. Это обозначение часто используется в вопросах гармонической аппроксимации на замкнутых подмножествах в Ω (см. [21, 22]). Легко показать, что если K — компакт в Ω, то множество $\widehat{K}(\Omega)$ также компакт в Ω и его дополнение $\mathbb{R}^d \setminus \widehat{K}(\Omega)$ состоит из конечного числа компонент связности [21; 6.3]. Подмножество F называем Ω-*допустимым*, если в дополнении $\Omega \setminus F$ нет дыр. Ω-допустимость подмножества F полностью характеризуется равенством $F = \widehat{F}(\Omega)$. Очевидно, подмножество $F = \Omega$ является Ω-допустимым.

Через $\Omega^* = \Omega \cup \{*\}$ обозначаем одноточечную компактификацию Александрова открытого множества Ω (для $\mathbb{R}^d$ добавляемую при его одноточечной компактификации идеальную точку $*$ обозначаем как ∞). Хотя для компакта $K \subset \Omega$ множество $\mathbb{R}^d \setminus \widehat{K}(\Omega)$, вообще говоря, несвязно, множество $\Omega^* \setminus \widehat{K}(\Omega)$ уже является связным в $(\mathbb{R}^d)^*$ [21; 23, гл. IV, § 1C, лемма].

В контексте рассматриваемых в § 1, 2 вопросов, как правило, неважно, какая точка $x \in \Omega$ в определениях 1, 2 рассматривается. Поэтому в § 1, 2, не умаляя общности, предполагаем, что начало координат $0 \in \Omega$ и $x = 0$. При $x = 0 \in \Omega$ в обозначениях классов мер и функций Йенсена или Аренса — Зингера для нуля на Ω индекс 0 чаще всего будем опускать и будем говорить просто о мерах и функциях Йенсена (соответственно Аренса — Зингера).

Предложение 1.1. *Если μ — мера Йенсена или Аренса — Зингера для 0 на области Ω, то мера μ соответственно такая же на любой области ω, содержащей компакт $\widehat{K}_\mu(\Omega)$, где*

$$K_\mu = \{0\} \cup \operatorname{supp} \mu \subset \Omega. \tag{1.1}$$

Доказательство. Ввиду связности $\Omega^* \setminus \widehat{K}_\mu(\Omega)$ и компактности $\widehat{K}_\mu(\Omega)$ в Ω по теоремам о продолжении субгармонических функций (см., например, [21, теорема 6.1; 24, теорема 1] или [22, теорема 16]) для каждой субгармонической в Ω функции найдется субгармоническая в ω функция v такая, что $v = u$ на $\widehat{K}_\mu(\Omega)$. Отсюда $u(0) = v(0) \le \int v\, d\mu = \int u\, d\mu$ для меры $\mu \in J(\Omega)$, т. е. $\mu \in J(\omega)$. Если u гармоническая в ω, то в силу связности множества $\Omega^* \setminus \widehat{K}_\mu(\Omega)$ и компактности $\widehat{K}_\mu(\Omega)$ в Ω существует последовательность $\{u_n\}$ гармонических функций в Ω [21, теорема 1.7], которая сходится к u равномерно на компакте $\widehat{K}_\mu(\Omega)$. Отсюда для меры $\mu \in AS(\Omega)$ имеем

$$u(0) = \lim_{n\to\infty} u_n(0) = \lim_{n\to\infty} \int u_n\, d\mu = \int u\, d\mu,$$

т. е. $\mu \in AS(\omega)$.

Определение 3. Пусть $\mu \in \mathscr{M}_1^+(\mathbb{R}^d)$. Функцию

$$V_\mu(y) \overset{\text{def}}{=} \int h(y-x)\, d\mu(x) - h(y), \quad y \ne 0, \quad V_\mu(\infty) \overset{\text{def}}{=} 0,$$

где

$$h(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \log|x| & \text{при } d = 2, \\ -|x|^{2-d} & \text{при } d > 2, \end{cases}$$

будем называть V_μ-*потенциалом меры* μ.

По построению V_μ-потенциал меры $\mu \in \mathscr{M}_1^+(\mathbb{R}^d)$ всегда субгармоническая функция в $(\mathbb{R}^d)^* \setminus \{0\}$, гармоническая вне компакта $K_\mu = \operatorname{supp}\mu \cup \{0\}$, в частности, в окрестности точки ∞ (см., например, [25, приложение, пп. 24, 26]), и выполнены соотношения (0.2) или (0.3) при $x = 0$ с заменой V на V_μ (см. [2, 6, 7]). Распределением масс Рисса субгармонической функции V_μ в $(\mathbb{R}^d)^* \setminus \{0\}$ служит сужение меры μ на $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, т. е. мера

$$\mu_\infty \overset{\text{def}}{=} \mu - \mu(\{0\})\delta_0. \tag{1.2}$$

Предложение 1.2 (обобщенная формула Пуассона — Йенсена)**.** *Пусть μ — мера Аренса — Зингера для нуля на Ω и компакт K_μ определен, как в (1.1). Тогда для любой субгармонической в открытой окрестности компакта $\widehat{K}_\mu(\Omega) \subset \Omega$ функции u_ν, $u_\nu(0) \ne -\infty$, с распределением масс Рисса ν имеет место представление*

$$u_\nu(0) = \int u_\nu\, d\mu - \int V_\mu\, d\nu_u. \tag{1.3}$$

Доказательство. По предложению 1.1 μ — мера Аренса — Зингера для нуля на любой области $\omega \subset \Omega$, содержащей компакт $\widehat{K}_\mu(\Omega)$, замыкание которой — компактное подмножество в Ω.

Из условия $u_\nu(0) \neq -\infty$ и классической формулы Пуассона — Йенсена [16; теорема 3.14], примененной в шаре из Ω достаточно малого радиуса с центром в нуле, следует, что конечен интеграл

$$\int\limits_{\overline{\omega}} h(y)\, d\nu_u(y). \tag{1.4}$$

Уменьшая при необходимости область ω, можем считать, что граница $\partial\omega$ — гладкая поверхность (см. доказательство в [21, лемма 1.8]). В силу конечности интеграла (1.4) представление Рисса для функции u_ν, субгармонической в некоторой окрестности замыкания $\overline{\omega}$, можем записать в виде

$$u_\nu(x) = \int\limits_{\overline{\omega}} (h(x-y) - h(y))\, d\nu_u(y) + H(x), \quad x \in \omega, \tag{1.5}$$

где H — гармоническая в ω функция и $H(0) = u_\nu(0)$. Из последнего равенства для меры Аренса — Зингера μ для нуля на ω имеем

$$\int\limits_{\omega} H\, d\mu = H(0) = u_\nu(0). \tag{1.6}$$

Кроме того, по теореме Фубини о повторных интегралах [21, теорема 3.5] (она применима в силу конечности интеграла (1.4)) получаем

$$\int\limits_{\omega} \int\limits_{\overline{\omega}} (h(x-y) - h(y))\, d\nu_u(y)\, d\mu(x) = \int V_\mu\, d\nu_u.$$

Интегрируя (1.5) по мере μ, из последнего равенства и из (1.6) получаем (1.3).

Предложение 1.3 (ср. [2, 6, 7]). *Если μ — мера Йенсена или, более общо, мера Аренса — Зингера для 0 на области Ω, то $V_\mu \equiv 0$ на $\mathbb{R}^d \setminus \widehat{K}_\mu(\Omega)$, где компакт K_μ из* (1.1). *Если μ — мера Йенсена, то $V_\mu \geq 0$ всюду в $(\mathbb{R}^d)^* \setminus \{0\}$.*

Доказательство. Свойство неотрицательности V_μ для меры Йенсена сразу следует из субгармоничности функции $h(y-x)$ по x в $\mathbb{R}^d$ и соотношений

$$V_\mu(y) = \int h(y-x)\, d\mu(x) - h(y) \geq h(y) - h(y) = 0.$$

Если $\mu \in AS(\Omega)$ и $y \in \mathbb{R}^d \setminus \widehat{K}_\mu(\Omega)$, то по предложению 1.1 для области $\omega \subset \Omega$, включающей в себя компакт $\widehat{K}_\mu(\Omega)$, $y \notin \omega$, мера μ принадлежит $AS(\omega)$. Из гармоничности функции $h(y-x)$ по x в ω получаем

$$V_\mu(y) = \int h(y-x)\, d\mu(x) - h(y) = h(y) - h(y) = 0$$

для всех $y \notin \omega$. Так как $\omega \supset \widehat{K}_\mu(\Omega)$ произвольное, предложение доказано.

Далее рассматриваем отображение $\mathscr{P}$, строящееся по правилу

$$\mathscr{P}(\mu) = V_\mu, \quad \mu \in \mathscr{M}_1^+(\mathbb{R}^d). \tag{1.7}$$

Очевидно, отображение $\mathscr{P}$ аффинное на классе мер Йенсена или Аренса — Зингера в том смысле, что

$$t\mathscr{P}(\mu) + (1-t)\mathscr{P}(\nu) = \mathscr{P}(t\mu + (1-t)\nu), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Предложение 1.4. *Пусть T — замкнутое подмножество области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $0 \in T$, и V — функция Аренса — Зингера или Йенсена для нуля на Ω, тождественно равная нулю вне T. Тогда найдется единственная мера μ такая, что*

(1) $\operatorname{supp} \mu \subset T$ *и* $\mu \in \mathscr{M}_1^+(\Omega)$;

(2) $V = V_\mu = \mathscr{P}(\mu)$;

(3) *функция V тождественно равна нулю вне компакта $\widehat{K}_\mu(\Omega)$;*

(4) *обратное к $\mathscr{P}$ отображение $\mathscr{P}^{-1}$ определяется по правилу*

$$\mathscr{P}^{-1}(V) = \frac{1}{c_d} \cdot \Delta V + \left(1 - \limsup_{y \to 0} \frac{V(y)}{-h(y)}\right) \cdot \delta_0. \tag{1.8}$$

Доказательство. Инъективность $\mathscr{P}$ тривиальна [26, теоремы 1.12, 1.12′].

Укажем теперь построение меры μ. Исключительно для ссылок на известные факты из теории субгармонических функций на плоскости и в пространстве нам удобно перейти к преобразованию Кельвина функции V. Полагаем

$$V^\star(y^\star) \stackrel{\text{def}}{=} |y|^{d-2} V(y), \quad y^\star \stackrel{\text{def}}{=} y/|y|^2 \in \mathbb{R}^d.$$

Преобразование Кельвина сохраняет субгармоничность. Следовательно, по определению 2 функция $V^\star$, субгармоническая в $\mathbb{R}^d$, удовлетворяет оценкам

$$V^\star(\zeta) \le \log|\zeta| + O(1), \quad \zeta \to \infty,\ \zeta \in \mathbb{C}, \tag{1.9}$$

$$V^\star(y) \le 1, \quad y \in \mathbb{R}^d,\ d > 2, \tag{1.10}$$

и тождественно равна нулю вне множества

$$T^\star \stackrel{\text{def}}{=} \{y/|y|^2 : y \in T\} \subset (\mathbb{R}^d)^*, \tag{1.11}$$

а также вне некоторого компактного подмножества из области $\Omega^\star \subset (\mathbb{R}^d)^*$, не включающего определенную открытую окрестность нуля. В частности,

$$V^\star(0) = 0. \tag{1.12}$$

Пусть $\mu^\star_\infty$ — распределение масс Рисса субгармонической функции $V^\star$ в $\mathbb{R}^d$. Тогда при $d = 2$ имеет место представление Адамара для субгармонической на плоскости функции [16, теорема 4.2]

$$V^\star(\zeta) = \int \log\left|1 - \frac{\zeta}{z}\right| d\mu^\star_\infty(z) + C, \quad \zeta, z \in \mathbb{C}, \tag{1.13}$$

где $C = 0$ ввиду (1.12). При этом согласно (1.9) и [27, теорема 6.32] имеем

$$\mu^\star_\infty(\mathbb{C}) \le 1. \tag{1.14}$$

При $d > 2$ для ограниченной ввиду (1.10) субгармонической в пространстве $\mathbb{R}^d$ функции $V^\star$ получим [16, теорема 3.20]

$$V^\star(y) = C - \int |x - y|^{2-d}\, d\mu^\star_\infty(x), \quad d > 2, \tag{1.15}$$

где постоянная C — точная верхняя грань в $\mathbb{R}^d$ этой функции. Вследствие (1.12)

$$C = \int |x|^{2-d}\, d\mu^\star_\infty(x) \le 1, \quad d > 2. \tag{1.16}$$

Мера $\mu_\infty^\star$ по ее определению сосредоточена на пересечении множества $T^\star \setminus \{\infty\}$ и некоторого компактного подмножества из открытого множества $\Omega^\star$, так как функция $V^\star$ тождественно равна нулю вне некоторого компактного подмножества из открытого множества $\Omega^\star \subset (\mathbb{R}^d)^*$, не включающего определенную открытую окрестность нуля.

Применение преобразования Кельвина к функции $V^\star$ дает снова первоначальную субгармоническую в $(\mathbb{R}^d)^* \setminus \{0\}$ функцию V с распределением масс Рисса $\mu_\infty \in \mathscr{M}_1^+(\Omega)$, сосредоточенным на $T \setminus \{0\}$ и определенным через борелевские множества $B \subset (\mathbb{R}^d)^* \setminus \{0\}$ по правилу [26, гл. IV, § 5]

$$\int\limits_B |x|^{2-d}\, d\mu_\infty^\star(x) = \int\limits_{B^\star} d\mu_\infty(x), \tag{1.17}$$

где $B^\star$ определено, как в (1.11).

Ввиду (1.13), где $C = 0$, и в силу (1.15) и (1.16) получим представление

$$V(y) = \int h(y-x)\, d\mu_\infty(x) - \mu_\infty(\mathbb{R}^d)h(y), \quad y \neq 0, \quad V(\infty) = 0, \tag{1.18}$$

причем вследствие (1.17), (1.12) и (1.14) выполнено $\mu_\infty((\mathbb{R}^d)^* \setminus \{0\}) \leq 1$. С помощью последнего соотношения и очевидного тождества

$$0 = \int h(y-x)\, d\delta_0(x) - h(y), \quad y \neq 0,$$

для меры

$$\mu \overset{\text{def}}{=} \mu_\infty + (1 - \mu_\infty(\mathbb{R}^d))\delta_0 \in \mathscr{M}_1^+(T) \cap \mathscr{M}_1^+(\Omega) \tag{1.19}$$

из (1.18) по (1.7) получаем $V = V_\mu = \mathscr{P}(\mu)$ и (1.2). Таким образом, для меры μ установлены свойства (1) и (2) предложения 1.4.

По определению компакта $\widehat{K}_\mu(\Omega)$ в каждой связной компоненте дополнения $\mathbb{R}^d \setminus \widehat{K}_\mu(\Omega)$ есть точки множества из $(\mathbb{R}^d)^* \setminus \Omega$, где функция Аренса — Зингера или Йенсена V обращается в нуль. По определению этих функций в каждой такой связной компоненте есть открытая окрестность, где функция V обращается в нуль. Так как функция V гармоническая вне K_μ, по известной теореме единственности для гармонических в области функций V — тождественный нуль вне $\widehat{K}(\Omega)$, т. е. установлено (3).

Используя представления (1.13) и (1.15) (см. [27, теорема 6.32; 16, 3.10.1]), можно получить, что

$$\mu_\infty^\star(\mathbb{C}) = \limsup_{\zeta\to\infty} \frac{V^\star(\zeta)}{\log|\zeta|} \quad \text{при } d = 2,$$

$$\int |x|^{2-d}\, d\mu_\infty^\star(x) = \limsup_{y\to\infty} V^\star(y) = \sup_{y\in\mathbb{R}^d} V^\star(y) \quad \text{при } d > 2.$$

Отсюда по определению преобразования Кельвина согласно (1.17) имеем

$$\mu_\infty(\mathbb{R}^d) = \limsup_{y\to 0} \frac{V(y)}{-h(y)}.$$

Следовательно, в силу определения распределения масс Рисса через оператор Лапласа по построению (1.19) меры μ обратное к $\mathscr{P}$ отображение $\mathscr{P}^{-1}$ определяется по правилу (1.8).

Теорема двойственности. *Пусть T — замкнутое Ω-допустимое подмножество открытого множества $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $0 \in T$. Тогда отображение $\mathscr{P}$, определенное в* (1.7)*, задает аффинную биекцию $J(\Omega; T)$ на $PJ(\Omega; T)$ и $AS(\Omega; T)$ на $PAS(\Omega; T)$. При этом $\mathscr{P}^{-1}$ определяется по правилу* (1.8).

Доказательство. Из Ω-допустимости T, предложения 1.3 и очевидного выполнения по определению 3 соотношения (0.2), (0.3) для $x = 0$ и $V = V_\mu$ следуют включения $\mathscr{P}(AS(\Omega; T)) \subset PAS(\Omega; T)$ и $\mathscr{P}(J(\Omega; T)) \subset PJ(\Omega; T)$. Инъективность отображения $\mathscr{P}$ отмечена в предыдущем предложении.

Меру $\mu = \mathscr{P}^{-1}(V)$ выбираем, как в предложении 1.4. Для доказательства сюръективности отображения $\mathscr{P} : AS(\Omega; T) \to PAS(\Omega; T)$ можно воспользоваться следующей леммой.

Лемма 1.1 [21, лемма 1.8]. *Пусть F — компактное подмножество в $\mathbb{R}^d$, функция u гармоническая в окрестности F и $\varepsilon > 0$. Тогда найдутся точки $y_1, y_2, \dots, y_m$ в $\mathbb{R}^d \setminus F$ и постоянные $a_1, a_2, \dots, a_m$ такие, что*

$$\left| u(x) - \sum_{k=1}^{m} a_k h(x - y_k) \right| < \varepsilon, \quad x \in F.$$

Применяя эту лемму к компакту $F = \widehat{K}_\mu(\Omega)$ и функции u, гармонической в окрестности $\widehat{K}_\mu(\Omega)$, для произвольного $\varepsilon > 0$ получаем

$$\left| (u(x) - u(0)) - \sum_{k=1}^{m} a_k (h(x - y_k) - h(y_k)) \right| < 2\varepsilon, \quad x \in \widehat{K}_\mu(\Omega),$$

где точки $y_1, y_2, \dots, y_m$ лежат вне $\widehat{K}_\mu(\Omega)$. Отсюда, интегрируя по мере μ и учитывая, что по предложению 1.4 $V(y_k) = 0$ при $y_k \notin \widehat{K}_\mu(\Omega)$, имеем

$$\begin{aligned} \left| \int (u(x) - u(0))\, d\mu(x) \right| &= \left| \int (u(x) - u(0))\, d\mu(x) - \sum_{k=1}^{m} a_k V(y_k) \right| \\ &= \left| \int (u(x) - u(0))\, d\mu(x) - \sum_{k=1}^{m} a_k \int (h(x - y_k) - h(y_k))\, d\mu(x) \right| \\ &\le \int \left| (u(x) - u(0)) - \sum_{k=1}^{m} a_k \int (h(x - y_k) - h(y_k))\, d\mu(x) \right| \le 2\varepsilon. \end{aligned}$$

В силу произвола в выборе $\varepsilon > 0$ получаем $\int (u(x) - u(0))\, d\mu = 0$, т. е. μ — мера Аренса — Зингера для нуля на любой области $\omega \supset \widehat{K}_\mu(\Omega)$.

Ввиду очевидного включения $PJ(\Omega; T) \subset PAS(\Omega; T)$ из доказанного следует, что

$$\mathscr{P}^{-1}(PJ(\Omega; T)) \subset AS(\Omega; T). \tag{1.20}$$

Докажем равенство

$$\mathscr{P}^{-1}(PJ(\Omega; T)) = J(\Omega; T). \tag{1.21}$$

Пусть u — субгармоническая непрерывная функция в области, содержащей компактное подмножество $\widehat{K}_\mu(\Omega) \subset T$, и $V = V_\mu \in PJ(\Omega; T)$. Здесь мера μ по-прежнему построена по предложению 1.4 и последнее включение выполнено согласно условию Ω-допустимости для T. По обобщенной формуле Пуассона — Йенсена и уже доказанного соотношения (1.20) для меры $\mu \in AS(\Omega; T)$ из (1.3) имеем $u(0) = \int u\,d\mu - \int V\,d\nu$, где ν — распределение масс Рисса функции u. Отсюда ввиду неотрицательности функции Йенсена V сразу вытекает, что

$$u(0) \le \int u\,d\mu \tag{1.22}$$

для любой субгармонической непрерывной в открытой окрестности компакта $\widehat{K}(\Omega)$ функции u. Для произвольной функции $u \in SH(\Omega)$ найдется убывающая к u последовательность $\{u_n\}$ субгармонических в окрестности $\widehat{K}(\Omega)$ и непрерывных функций [16, теорема 3.8]. Применяя (1.22) к каждой из функций последовательности $\{u_n\}$ и переходя к пределу по $n \to \infty$, получим (1.22) для произвольной функции $u \in SH(\Omega)$, т. е. $\mathscr{P}^{-1}(V) = \mu \in J(\Omega; T)$.

Соотношение (1.21), а значит, и теорема двойственности доказаны.

Замечание. Отметим топологические свойства отображений $\mathscr{P}$ и $\mathscr{P}^{-1}$, которые продиктованы теоремой двойственности и известными взаимосвязями между сходимостями мер и их потенциалов. Пусть по-прежнему T — замкнутое и Ω-допустимое подмножество области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $0 \in T$.

1. Если последовательность мер $\{\mu_n\}$ содержится в $AS(\Omega; T)$ (соответственно в $J(\Omega; T)$), сходится в слабой топологии в $\mathscr{M}(\Omega)$ (в смысле [26]) к мере μ и носители всех мер μ_n содержатся в одном компактном подмножестве из Ω, то квазивсюду, т. е. вне полярного множества,

$$\limsup_{n\to\infty} \mathscr{P}(\mu_n)(x) = \mathscr{P}(\mu)(x).$$

При этом здесь полунепрерывная сверху регуляризация левой части совпадает всюду вне нуля с правой частью, а также $\mu \in AS(\Omega; T)$ и $\mathscr{P}(\mu) \in PAS(\Omega; T)$ (соответственно $\mu \in J(\Omega; T)$ и $\mathscr{P}(\mu) \in PJ(\Omega; T)$) (см. [26, гл. III, § 3]).

При тех же условиях на последовательность мер $\{\mu_n\}$ последовательность $\mathscr{P}(\mu_n)$ сходится к $\mathscr{P}(\mu_n)$ по $(\alpha+d-2)$-мере Хаусдорфа — Карлесона на каждом компакте из Ω при любом $\alpha > 0$ (см. [28, лемма 4.4.4; 29, теорема 2.7.4.5]).

2. Если последовательность функций $\{V_n\}$ содержится в $PAS(\Omega; T)$ (соответственно в $PJ(\Omega; T)$), сходится в топологии пространства $\mathscr{D}'(\Omega)$ обобщенных функций на Ω и все функции V_n тождественно равны нулю вне некоторого фиксированного компактного подмножества из Ω, то последовательность мер $\mu_n = \mathscr{P}^{-1}(V_n)$ слабо сходится к некоторой мере μ из $AS(\Omega; T)$ (соответственно в $J(\Omega; T)$). При этом функция $V = \mathscr{P}(\mu) \in PAS(\Omega; T)$ (соответственно $\in J(\Omega; T)$) есть предел в $\mathscr{D}'(\Omega)$ или в $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ последовательности $\{V_n\}$, квазивсюду $\limsup\limits_{n\to\infty} V_n(x) = V(x)$, где полунепрерывная сверху регуляризация левой части совпадает всюду вне нуля с правой частью и последовательность $\{V_n\}$ сходится к функции V по $(\alpha + d - 2)$-мере Хаусдорфа — Карлесона на каждом компакте из Ω при любом $\alpha > 0$.

Этот пункт следует из (1.8), непрерывности оператора Лапласа в $\mathscr{D}'(\Omega)$ и [28, теорема 4.4.1; 29, теорема 2.7.4.1; 30, теорема 4.1.9 и предложение 16.1.2].

§ 2. О носителе мер Йенсена и Аренса — Зингера

По-прежнему $0 \in \Omega$. Ниже через $h_0(K, \Omega)$ обозначаем объединение всех тех дыр в K относительно Ω, для которых точка 0 есть граничная или внутренняя точка (очевидно, в последнем случае такая дыра единственная).

Мы используем следующее определение неразреженного (non-thin) множества в теории потенциала.

Определение 4 [21, 7.1; 16; 25]. Пусть $x_0 \in (\mathbb{R}^d)^* = \mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$. Множество $E \subset (\mathbb{R}^d)^*$ *неразреженное в* x_0, если для любой окрестности W точки x_0 и любой ограниченной сверху субгармонической в $W \setminus \{x_0\}$ функции u выполнено равенство

$$\limsup_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} u(x) = \limsup_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E \setminus \{x_0\}}} u(x).$$

Знаменитый критерий Винера позволяет сформулировать последнее понятие исключительно в терминах емкости [21, 27, 31, 32].

Следующее определение — незначительная модификация определения из [33, с. 73].

Определение 5. Точка $x \in \mathbb{R}^d$ *связана через* $E \subset \mathbb{R}^d$ с непустым множеством $A \subset \mathbb{R}^d$, если $x \in E$, множества E и $E \setminus \{x\}$ связные и $A \cap E \neq \varnothing$.

Условие связности множества E в этом определении можно заменить условием предельности точки x для $E \setminus \{x\}$ в $\mathbb{R}^d$ (см. [33, IV.1, теорема 1.2]).

Теорема о носителе. *Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, такая, что $0 \in \Omega$, и $\mu \in \mathscr{M}^+(\Omega)$, $\mu \neq \delta_0$. Пусть E — подмножество в $\mathbb{R}^d$ такое, что при выполнении условий $d \geq 3$, $0 \in \operatorname{supp} \mu$ оно неразреженное в точке* 0.

Если μ — мера Йенсена или Аренса — Зингера для точки 0 на Ω и точка 0 связана через E с множеством

$$\mathbb{R}^d \setminus (\{0\} \cup h_0(\operatorname{supp} \mu, \Omega)) \tag{2.1}$$

или, менее общо, с множеством $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$, то

$$(E \setminus \{0\}) \cap \operatorname{supp} \mu \neq \varnothing. \tag{2.2}$$

В частности, при $d = 2$, т. е. в $\mathbb{C}$, каждая непрерывная кривая с началом в нуле, пересекающая множество (2.1)*, пересекает и* $\operatorname{supp} \mu$ *вне нуля.*

Обратно, если точка 0 не связана через компактное множество $E \subset \mathbb{R}^d$ с множеством $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$ или множество $E \subset \mathbb{R}^d$ разреженное в точке 0, то найдется мера Йенсена $\mu \neq \delta_0$ такая, что (2.2) *неверно.*

Доказательство прямого утверждения. Напомним, что связное множество в $\mathbb{C}$, содержащее более одной точки, неразреженное в каждой точке его замыкания [32, теорема 3.8.3]. Кроме того, если в условиях теоремы о носителе $d \geq 3$ и дополнительно $0 \notin \operatorname{supp} \mu$, а условие неразреженности множества E в точке 0 не выполнено, то к множеству E можно добавить достаточно малую окрестность точки 0, не пересекающую $\operatorname{supp} \mu$. Тогда вновь полученное множество уже неразреженное в точке 0 и другие условия теоремы не изменяются. При этом достаточно доказать теорему двойственности, когда роль E играет построенное объединение. Таким образом, по условию теоремы о носителе подмножество E, через которое по условию связаны точка 0 и множество (2.1), можно считать неразреженным в точке 0 при всех $d \geq 2$ и μ.

По построению множество (2.1) всегда включает в себя множество $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$.

Доказательство первой части теоремы проведем от противного.

(**Д**) Допустим, что множество $E_0 = E \setminus \{0\}$ не пересекает $\operatorname{supp} \mu$.

Лемма 2.1. *В условиях теоремы о носителе и при нашем предположении* (**Д**) *пересечение множеств E_0 и $\widehat{K}_\mu(\Omega)$ пусто и множество E_0 целиком лежит в одной из связных компонент дополнения $\mathbb{R}^d \setminus \widehat{K}_\mu(\Omega)$ с предельной точкой* 0.

Доказательство леммы 2.1. Если $x \in \widehat{K}_\mu(\Omega)$ и $x \in E_0$, то точка x не может лежать на $\operatorname{supp}\mu$ и принадлежит некоторой дыре W для K_μ относительно Ω. Отметим, что граница каждой дыры компакта включена в этот компакт (см. [34, замечание 3.5]).

Для дыры W возможны только две ситуации.

Первая — когда точка 0 не является предельной для дыры W. Тогда на E_0 есть как точка из W, так и точка, лежащая вне W, ибо 0 — предельная точка для E_0 (см. замечание после определения 5).

Лемма 2.2 (см. [33, IV.1, теорема 1.3]). *Если связное множество точек в $\mathbb{R}^d$ пересекает как множество A, так и его дополнение $\mathbb{R}^d \setminus A$, то оно пересекает и границу ∂A множества A.*

По этой лемме связное множество E_0 пересекает и границу ∂W, а значит, и K_μ. Это пересечение не может быть точкой $0 \notin E_0$, следовательно, это пересечение содержит точку из $\operatorname{supp}\mu$. Противоречие предположению (**Д**)!

Таким образом, возможна только одна ситуация: точка 0 предельная для дыры W, если такие дыры существуют. Иначе говоря, $W \subset h_0(K_\mu, \Omega)$. Для дыры W и связного множества E_0 есть общая точка x, и в то же время по условию (2.1) связное множество E_0 пересекает и дополнение $\mathbb{R}^d \setminus W$, поскольку $h_0(K_\mu, \Omega) \subset h_0(\operatorname{supp}\mu, \Omega)$. Вновь по лемме 2.2 это противоречит предположению (**Д**)!

Доказано, что $\widehat{K}_\mu(\Omega) \cap E_0 = \varnothing$. Следовательно, связное множество E_0 имеет общую точку с некоторой связной компонентой дополнения $\mathbb{R}^d \setminus \widehat{K}_\mu(\Omega)$. Объединение двух связных множеств с общей точкой снова связное [33, IV.1, следствие 2], значит, множество E_0 содержится в этой связной компоненте. Точка 0 предельная для E_0, а тем самым и для этой связной компоненты.

Лемма 2.1 доказана.

Завершим доказательство первой части теоремы о носителе. При этом мы следуем подходу к терминологии и обозначениям из [34].

Через $C(K)$, как обычно, обозначаем банахово пространство всех непрерывных вещественнозначных функций на компакте $K \subset \mathbb{R}^d$ с равномерной нормой. Напомним, что функция $u \in C(K)$ *имеет пик в точке* $a \in K$, если

$$u(a) = 1, \quad u(x) < 1 \ \text{ для всех } x \in K \setminus \{a\}. \tag{2.3}$$

Пусть L — замкнутое подпространство в $C(K)$. Говорят, что $a \in K$ — *точка пика* для L, если существует функция $u \in L$, имеющая пик в точке a. Через $\overline{H}_K(\Omega)$ обозначаем замыкание $H(\Omega)$ в $C(K)$. Ниже нам потребуется

Лемма 2.3 [34, теорема 2.2(c)]. *Точка $a \in \mathbb{R}^d$ — точка пика для $\overline{H}_K(\Omega)$, если и только если множество $\Omega \setminus \widehat{K}(\Omega)$ неразреженное в точке a.*

Рассмотрим в качестве компакта K компакт $\widehat{K}_\mu(\Omega)$, а в качестве точки a точку 0, которая при предположении (**Д**) по лемме 2.1 есть граничная точка этого компакта. Так как по лемме 2.1 множество E_0 лежит вне этого компакта и точка 0 предельная для него, множество $\Omega \setminus \widehat{K}_\mu(\Omega)$ неразреженное в точке 0 в силу неразреженности множества E_0 в точке 0. Отсюда по лемме 2.3 точка

0 — точка пика пространства $\overline{H}_K(\Omega)$ при нашем выборе компакта K. Поэтому найдется функция u, являющаяся равномерным пределом гармонических в Ω функций, удовлетворяющая условиям (2.3). По определению меры Аренса — Зингера для $a = 0$ имеем $1 = u(0) = \int\limits_K u\,d\mu$. Отсюда ввиду (2.3) для вероятностной меры μ сразу следует, что $\mu = \delta_0$. Получено противоречие с условием $\mu \neq \delta_0$, следовательно, предположение (**Д**) неверно.

В случае непрерывной кривой $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(0) = 0$, пересекающей множество (2.1), возможно, отбрасывая часть кривой (точнее, ее образа), можно считать, что

$$\gamma(t) \neq 0 \quad \text{при } t > 0. \tag{2.4}$$

Выберем в этом случае $E = \gamma([0,1])$. Ввиду (2.4) $E_0 = E \setminus \{0\} = \gamma((0,1])$ также связное, а эта ситуация уже рассмотрена.

Первая часть теоремы о носителе до обратного утверждения доказана.

Доказательство обратного утверждения. Для пустого множества E утверждение очевидно. Поэтому ниже $E \neq \varnothing$.

1. Рассмотрим в этом пункте случай, когда точка 0 не связана через компактное множество $E \subset \mathbb{R}^d$ с множеством $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$.

Если $0 \notin E$, то в качестве требуемой меры Йенсена можно взять вероятностную меру s_0^t или m_0^t при достаточно малом $t > 0$. Поэтому ниже в этом пункте считаем, что $0 \in E$.

Если $E \subset \Omega$, то существует относительно компактная область ω в Ω с достаточно гладкой границей, содержащая компакт E и точку 0. Тогда в качестве искомой меры Йенсена можно выбрать гармоническую меру $\omega(\cdot, 0)$ для области ω в точке 0.

Если компакт E имеет непустое пересечение с множеством $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$, то нам потребуется

Лемма 2.4 [33, теорема 5.6]. *Если X и Y — непустые замкнутые подмножества компакта E такие, что нет связных компонент компакта E, одновременно пересекающих X и Y, то существует разбиение $E = H_1 \cup H_2$ на два непересекающихся замкнутых в E подмножества такое, что $X \subset H_1$ и $Y \subset H_2$.*

Выберем в нашем случае в качестве X одноточечное множество $\{0\}$, а в качестве множества Y пересечение $E \cap (\mathbb{R}^d \setminus \Omega)$. Тогда замкнутое в E множество H_1, которое существует по лемме 2.4, содержит точку $\{0\}$ и не пересекает $Y = \mathbb{R}^d \setminus \Omega$, т. е. содержится в Ω. Множество H_1 как замкнутое подмножество компакта компактно, а значит, H_1 — компактное подмножество в Ω. Таким образом, мы вернулись к предыдущей ситуации, если в качестве E рассматривать уже множество H_1.

Случай несвязного множества E рассмотрен полностью.

2. Рассмотрим в этом пункте случай, когда множество $E \subset \mathbb{R}^d$ разреженное в точке 0.

Если $d = 2$, то ввиду разреженности E по свойству Лебега — Берлинга [31, предложение IX.6] существуют окружности $\{z \in \mathbb{C} : |z| = t\}$ сколь угодно малого радиуса $t > 0$, не пересекающие E. Поэтому при $d = 2$ в качестве требуемой меры Йенсена можно взять меру s_0^t для достаточно малого $t > 0$.

Пусть $d > 2$. Для этого случая продемонстрируем технику применения теоремы двойственности.

Если 0 не принадлежит замыканию $\overline{E}$, то приходим к ситуации предыдущего пункта. Поэтому ниже в этом пункте считаем, что 0 является предельной точкой для E.

Инверсия $E^\star$ множества E есть множество, разреженное в точке $\infty \in (\mathbb{R}^d)^*$ [27, теорема 7.13]. По определению разреженности [27] существует субгармоническая в окрестности W точки ∞ функция u такая, что

$$\limsup_{x\to\infty} u(x) = a > 0; \quad u(x) \le 0, \quad x \in (W \cap E^\star) \setminus \{\infty\}. \tag{2.5}$$

Лемма 2.5 [27, теорема 7.2]. *Допустим, что $u(x)$ — субгармоническая функция в $\{x \in \mathbb{R}^d : r < |x| < \infty\}$, $d \ge 3$. Тогда если $r' > r$, то существует субгармоническая в $\mathbb{R}^d$ функция $v(x)$, постоянная при $|x| \le r$ и такая, что для $|x| \ge r'$ имеет место равенство*

$$v(x) = u(x) - \alpha|x|^{2-d}, \tag{2.6}$$

где α — положительная постоянная.

Пусть v — функция, построенная по этой лемме для нашей функции u, и $v \equiv c$ при $|x| \le r$, где $r > 0$ выбрано так, что

$$\overline{B}(0, 1/r) \subset \Omega; \quad ((\mathbb{R}^d)^* \setminus B(0, r)) \subset W. \tag{2.7}$$

Из вида (2.6) функции v следует, что для v сохраняются свойства (2.5). В частности, v — непостоянная функция, и

$$v(x) \le 0, \quad x \in (W \cap E^\star) \setminus \{\infty\}. \tag{2.8}$$

Непостоянная субгармоническая в $\mathbb{R}^d$ функция v не может достигать супремума в шаре $B(0, r)$. Следовательно, $c < a$. Выберем число b так, что

$$c^+ \overset{\text{def}}{=} \max\{c, 0\} < b < a. \tag{2.9}$$

Полагаем $V^\star = ((v - b)/(a - b))^+$. По построению функция $V^\star$ непостоянная положительная субгармоническая и согласно (2.5) и (2.6) удовлетворяет условиям

$$\limsup_{y\to\infty} V^\star(y) = 1; \quad V^\star(y) \equiv 0, \quad |y| \le r. \tag{2.10}$$

Кроме того, по выбору (2.9) числа b ввиду (2.8) и полунепрерывности сверху функции $V^\star$ выполнено $V^\star \equiv 0$ в некоторой открытой окрестности множества $(W \cap E^\star) \setminus \{\infty\}$. Из (2.10) по принципу максимума следует (1.10).

Применяя преобразование Кельвина к функции $V^\star$, получаем непостоянную положительную субгармоническую в $(\mathbb{R}^d)^* \setminus \{0\}$ функцию V, которая удовлетворяет (0.3) для $x = 0$. Кроме того, согласно (2.7) и (2.10) функция V — тождественный нуль вне замкнутого шара $\overline{B}(0, 1/r) \subset \Omega$ и $V \equiv 0$ в некоторой открытой окрестности множества $\overline{B}(0, 1/r) \cap E$. Следовательно, по теореме двойственности существует единственная мера Йенсена μ для точки $0 \in \Omega$ на любой области $\omega \supset \overline{B}(0, 1/r)$, лежащей в Ω, такая, что $V_\mu = V$. Очевидно, что тогда $\mu \in J(\Omega)$. По свойствам функции V ввиду (1.8) носитель меры μ содержится в шаре $\overline{B}(0, 1/r)$ и не пересекает множество $\overline{B}(0, 1/r) \cap E$. При этом $\mu \ne \delta_0$, так как функция $V = V_\mu$ непостоянна. Тем самым требуемая мера Йенсена, не пересекающая $E \setminus \{0\}$, построена и обратное утверждение теоремы о носителе полностью доказано.

Приведем некоторые следствия теоремы о носителе.

Следствие 1. *Пусть* Ω — *область в* $\mathbb{R}^d$ *и* $0 \in \Omega$. *Если* μ — *мера Йенсена или Аренса — Зингера для точки* 0 *на* Ω,

$$\operatorname{supp}\mu \neq \{0\}, \tag{2.11}$$

а также при $d \geq 3$ *дополнение* $\mathbb{R}^d \setminus \operatorname{supp}\mu$ *неразреженное в точке* 0, *то точка* 0 *не может быть предельной для неограниченной связной компоненты дополнения* $\mathbb{R}^d \setminus \operatorname{supp}\mu$.

Доказательство. Рассмотрим множество E, построенное как объединение точки 0 и неограниченной связной компоненты дополнения $\mathbb{R}^d \setminus \operatorname{supp}\mu$. Если точка 0 предельная для этой компоненты, то множество E также связное [33, IV.1, теорема 1.2]. Следовательно, точка 0 связана через E с (2.1) и не пересекает $\operatorname{supp}\mu$ вне нуля, что противоречит теореме о носителе.

При $d = 2$ по теореме о носителе каждый луч с началом в нуле пересекает носитель меры Йенсена или Аренса — Зингера, если эта мера не мера Дирака в нуле. При $d \geq 3$ это, вообще говоря, не так. Например, если E — луч в $\mathbb{R}^3$ с началом в нуле или $(d-2)$-мерное подпространство в $\mathbb{R}^d$, $d \geq 4$, то E разреженное в нуле [31; гл. IX, п. 3] и связное вместе с $E \setminus \{0\}$. При этом для любого открытого множества Ω, $0 \in \Omega$, по заключительной части теоремы о носителе существует мера Йенсена μ вида (2.11), не пересекающая E вне нуля.

Для формулировки соответствующего результата для системы лучей при $d \geq 3$ воспользуемся некоторыми понятиями из [27, 7.3.4].

Пусть ξ — точка на единичной сфере в $\mathbb{R}^d$, т. е. $|\xi| = 1$. Определим лучи

$$L(\xi) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^d : x = r\xi\}, \quad 0 \leq r < \infty. \tag{2.12}$$

Отождествим множество лучей

$$\{L(\xi) : \xi \in e\} \tag{2.13}$$

с соответствующим множеством $e \subset \partial B(0,1)$. Говорим, что некоторое свойство выполнено почти на всех лучах, если оно имеет место на множестве (2.13) и дополнение $\partial B(0,1) \setminus e$ имеет нулевую внутреннюю $(d-2)$-емкость.

Следствие 2. *Пусть* Ω — *область в* $\mathbb{R}^d$, $d \geq 3$, *и* $0 \in \Omega$. *Если* μ — *мера Йенсена или Аренса — Зингера для точки* 0 *на* Ω *вида* (2.1), *то почти на всех лучах вида* (2.12) *есть точки множества*

$$\operatorname{supp}\mu \setminus \{0\}. \tag{2.14}$$

Доказательство. Допустим, что утверждение следствия неверно. Тогда существует подмножество $e \in \partial B(0,1)$ такое, что

$$\mathrm{Cap}_* e \geq \varepsilon > 0, \tag{2.15}$$

где $\mathrm{Cap}_* e$ обозначает внутреннюю $(d-2)$-емкость множества e, и ни один из лучей системы (2.14) не пересекает множество (2.14). Дополним множество (2.15) до множества $E = \{x \in \mathbb{R}^d : x \in L(\xi),\ \xi \in e\} \cup \partial B(0,R)$, где $R > 1$ выбрано столь большим, что шар $B(0,R)$ содержит носитель меры μ. Очевидно, множества E и $E \setminus \{0\}$ связны, и точка 0 связана через E с неограниченной связной компонентой дополнения $\mathbb{R}^d \setminus (\operatorname{supp}\mu \cup \{0\})$, т. е. точка 0 связана через E с множеством (2.1). Если мы покажем, что множество E неразреженное в точке 0, то по теореме о носителе ввиду выбора R множество E пересекает множество (2.14) в точках на лучах системы (2.13), что влечет противоречие.

Для доказательства неразреженности E в нуле воспользуемся критерием Винера. Положим

$$E_n = E \cap \{x \in \mathbb{R}^d : 2^{-n-1} \le |x| \le 2^{-n}\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots.$$

Из неравенства [26, теорема 7.16]

$$\mathrm{Cap}_* e \le 2^{n+1} \mathrm{Cap}^* E_n,$$

где $\mathrm{Cap}^* E_n$ обозначает внешнюю $(d-2)$-емкость множества E_n, ввиду предположения (2.15) следует, что

$$\sum_n (2^{n+1} \mathrm{Cap}^* E_n)^{d-2} \ge \sum_n (\mathrm{Cap}_* e)^{d-2} \ge \sum_n \varepsilon^{d-2} = \infty.$$

По критерию Винера [21, 27, 31, 32] расходимость левой части эквивалентна неразреженности множества E в нуле.

Следствие доказано.

§ 3. Доказательства критериев

Доказательство первого критерия (суб-)гармоничности. По определению 1 необходимость очевидна. Докажем достаточность условий (0.1) для субгармоничности u.

Достаточно показать, что если $\overline{B}$ — замкнутый шар, $\overline{B} \subset \Omega$, h — гармоническая функция в $\mathbb{R}^d$ и $u \le h$ на границе шара $\partial\overline{B}$, то $u \le h$ в $\overline{B}$ [30, предложение 16.1.4].

Предположим, что $M = \sup\limits_{B}(u-h) > 0$. Верхняя грань достигается в замкнутом подмножестве F шара $\overline{B}$, поскольку функция $u-h$ полунепрерывна сверху. По предположению расстояние σ от F до $\partial\overline{B}$ положительно. Пусть $x \in F$ и расстояние от x до $\partial\overline{B}$ равно σ. Выберем $n \in \mathbb{N}$ столь большим, что шар $B(x, 1/n)$ содержится в шаре $\overline{B}$. Пусть $\mu_x^n \ne \delta_0$ — мера, для которой выполнено первое из соотношений в (0.1). По теореме о носителе каждый конус вращения с вершиной в нуле и непустой внутренностью пересекает носитель меры μ_x^n вне точки x, поскольку такой конус неразрежен в вершине [31, гл. IX, п. 2]. Среди таких конусов найдется конус такой, что расстояние от любой точки этого конуса, лежащей в $B(x, 1/n) \setminus \{x\}$, до $\partial\overline{B}$ меньше σ. Следовательно, найдется точка $y \in B(x, 1/n) \setminus \{x\}$ такая, что $y \in \operatorname{supp} \mu_x^n$ и $u-h < M$ в некоторой открытой окрестности точки y. Поэтому

$$\int (u-h)\, d\mu_x^n < M \int d\mu_x^n = M = (u-h)(x).$$

Отсюда в силу включения $J_x(\Omega) \subset AS_x(\Omega)$ следует $\int u\, d\mu_x^n < u(x)$, что противоречит определению меры Йенсена. Таким образом, предположение $M > 0$ неверно, и $M = 0$, что и требовалось.

Применяя такие же рассуждения к функциям u и $-u$, при выполнении второго из соотношений в (0.1) аналогично получаем критерий гармоничности.

Теорема о продолжении (ср. [16, теорема 5.18; 17, 1.V.5; 18]). *Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^d$, E — полярное множество в $\mathbb{R}^d$ и функция $u : \Omega \setminus E \to [-\infty, +\infty)$, $u \not\equiv -\infty$, удовлетворяет условиям:*

(1) *функция u локально ограничена сверху (соответственно локально ограничена) в $\Omega \setminus E$;*

(2) *функция u полунепрерывна сверху в $\Omega \setminus E$;*

(3) *для каждой точки $x \in \Omega \setminus E$ и каждого шара $B(x, 1/n)$, $n \in \mathbb{N}$, найдется мера Йенсена μ_x^n для точки x на Ω такая, что $\{x\} \neq \operatorname{supp} \mu_x^n \subset B(x, 1/n)$ и имеет место соотношение*

$$(1 - \mu_x^n(\{x\}))u(x) \leq \int\limits_{\Omega \setminus (E \cup \{x\})} u \, d\mu_x^n \tag{3.1}$$

$$(\textit{соответственно} \;\; (1 - \mu_x^n(\{x\}))u(x) = \int\limits_{\Omega \setminus (E \cup \{x\})} u \, d\mu_x^n). \tag{3.2}$$

Тогда существует единственное субгармоническое (соответственно гармоническое) продолжение u' функции u в Ω, $u' = u$ на $\Omega \setminus E$, доопределенное на E по правилу

$$u'(x) = \limsup_{\substack{y \to x \\ y \in \Omega \setminus E}} u(y), \quad x \in \Omega \cap E. \tag{3.3}$$

При доказательстве этой теоремы придерживаемся схемы из [17, 1.V.5].

Доказательство. (Суб-)гармоническое продолжение u' функции u на $\Omega \cap E$ обязано строиться по правилу (3.3), если оно существует, так как полярное множество E имеет нулевую лебегову меру в $\mathbb{R}^d$ (см. [17, 1.II(6.1)]). Следовательно, достаточно доказать существование.

Лемма 3.1 [5, следствие 1.8]. *Для любой меры Йенсена μ для точки x на Ω и любого множества нулевой внешней емкости E выполнено $\mu(E \setminus \{x\}) = 0$.*

Полярное множество E имеет нулевую внешнюю емкость [16, теорема 5.32]. По лемме 3.1 интегрирование в (3.1) и (3.2) можно заменить интегрированием по множеству $\Omega \setminus \{x\}$. Кроме того, каждую меру Йенсена μ_x^n для точки x на Ω в этих соотношениях можно заменить вероятностными мерами

$$\frac{1}{1 - \mu_x^n(\{x\})} \cdot \left(\mu_x^n - \mu_x^n(\{x\})\delta_x\right). \tag{3.4}$$

Легко видеть, что меры из (3.4) по-прежнему являются мерами Йенсена для точки x на Ω с теми же свойствами, что и исходные, но в отличие от них обязательно сосредоточены вне точки x. Таким образом, сохраняя для этих вновь введенных мер обозначение μ_x^n, условия (3.1) и (3.2) согласно лемме 3.1 можем записать в виде

$$u'(x) = u(x) \leq (\text{ соответственно } =) \int\limits_{B(x,1/n)} u' \, d\mu_x^n, \quad x \in \Omega \setminus E, \quad \mu_x^n(\{x\}) = 0. \tag{3.5}$$

Из определения (3.3) функции u' и из (3.5) в силу леммы 3.1 и того, что меры μ_x^n вероятностные, легко следует полунепрерывность сверху функции u' всюду в Ω (ср. доказательства в [16, теорема 5.18; 17, 1.V.5]).

Если существование (суб-)гармонического продолжения функции u верно локально, то оно верно и в целом. Поэтому далее достаточно рассматривать случай, когда Ω — шар в $\mathbb{R}^d$.

Так как множество E полярное, существует субгармоническая отрицательная в Ω функция v, которая тождественно равна $-\infty$ на множестве $\Omega \cap E$ и конечна в некоторой точке из $\Omega \setminus E$, где конечна функция u [17, 1.V.4]. Рассмотрим функции

$$u_\varepsilon = u' + \varepsilon v, \tag{3.6}$$

где ε — положительное число. Каждая такая функция полунепрерывна сверху и в силу (3.5) удовлетворяет неравенствам

$$u_\varepsilon(x) \le \int u_\varepsilon \, d\mu_x^n, \quad x \in \Omega \setminus E, \quad n \ge n(x). \tag{3.7}$$

Поскольку $u_\varepsilon(x) = -\infty$ при $x \in \Omega \cap E$, то для каждого $x \in \Omega \cap E$ можно подобрать, вообще говоря произвольно, последовательность мер Йенсена μ_x^n для точки x на Ω такую, что $\{x\} \ne \operatorname{supp} \mu_x^n \subset B(x, 1/n) \subset \Omega$, $n > n(x)$, и тогда неравенства (3.7) имеют место при всех $x \in \Omega$. По первому критерию субгармоничности все функции u_ε субгармоничны при $\varepsilon > 0$.

Рассмотрим функцию $u_0(x) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(x)$, $x \in \Omega$, которая по построению (3.6) равна функции u квазивсюду, т. е. значения $u(x)$ и $u_0(x)$ совпадают вне некоторого полярного множества, являющегося в точности множеством тех точек, где v обращается в $-\infty$.

Тогда полунепрерывная сверху регуляризация u_0^* функции u_0 уже субгармоническая функция в Ω и равна u_0 квазивсюду [17, основная теорема сходимости].

Из полунепрерывности сверху субгармонической функции u_0^* по определению мер Йенсена μ_x^n имеем

$$\limsup_{n \to +\infty} \int u_0^* \, d\mu_x^n \le u_0^*(x) \le \liminf_{n \to +\infty} \int u_0^* \, d\mu_x^n.$$

Отсюда ввиду леммы 3.1 и совпадения u_0^* и u_0 квазивсюду

$$u_0^*(x) = \lim_{n \to +\infty} \int u_0^* \, d\mu_x^n = \lim_{n \to +\infty} \int u_0 \, d\mu_x^n, \quad x \in \Omega. \tag{3.8}$$

Аналогично из полунепрерывности сверху функции u вне E и из (3.5) с учетом леммы 3.1 и совпадения u и u_0 квазивсюду

$$u(x) = \lim_{n \to +\infty} \int u \, d\mu_x^n = \lim_{n \to +\infty} \int u_0 \, d\mu_x^n, \quad x \in \Omega \setminus E.$$

Отсюда и из (3.8) функция u_0^* совпадает с u вне E и требуемое субгармоническое продолжение построено.

В случае выполнения условия (3.2) для локально ограниченной полунепрерывной сверху функции u на $\Omega \setminus E$ доказательство существования гармонического продолжения этой функции на множество E выводится из доказанного выше дословно так же, как в [17, 1.V.5 (специальный случай)].

Доказательство второго критерия (суб-)гармоничности. Если функция u продолжается как (суб-)гармоническая на все Ω, то необходимость условий (1) и (2) очевидна. Условие (3) сразу следует из неотрицательности функций Йенсена и свойства $\nu_u \geq 0$ для субгармонической (соответственно $\nu_u = 0$ для гармонической) функции u.

Обратно, пусть выполнены условия (1)–(3) и $u = u_1 - u_2$ — представление δ-субгармонической функции в виде разности субгармонических функций u_1 и u_2 в Ω, E_0 — полярное множество, на котором функция u_1 или u_2 принимают значение $-\infty$.

Сопоставим каждой функции Йенсена $V_x^n \in PJ(\Omega)$ однозначно определенную меру Йенсена μ_x^n по правилу, продиктованному теоремой двойственности. По условиям на функции Йенсена V_x^n имеем

$$\{x\} \neq \operatorname{supp} \mu_x^n \subset B(x, 1/n). \tag{3.9}$$

Применяя затем обобщенную формулу Пуассона — Йенсена в точках $x \in \Omega \setminus E_0$ отдельно к каждой функции u_1 и u_2, для функции u приходим к равенству

$$\int V_x^n \, d\nu_u = \int u \, d\mu_x^n - u(x), \quad x \in \Omega \setminus E_0. \tag{3.10}$$

Для точек x из $\Omega \setminus E_0$, где функции u_1 и u_2 конечны, очевидно, $\nu_u\{x\} = 0$, поэтому интеграл в левой части (3.10) на самом деле можно брать по множеству $B(x, 1/n) \setminus \{x\}$.

Ниже $E' = E \cup E_0$ (также полярное множество).

Из (3.10) с учетом леммы 3.1 и неравенств в (0.4) получаем

$$0 \leq \int\limits_{B(x,1/n)\setminus\{x\}} V_x^n \, d\nu_u = \int\limits_{\Omega\setminus(E'\cup\{x\})} u \, d\mu_x^n - \bigl(1 - \mu_x^n(\{x\})\bigr) u(x), \quad x \in \Omega \setminus E'.$$

Таким образом, по условиям критерия (1)–(3) согласно (3.9) выполнены соответствующие условия теоремы о продолжении. Следовательно, найдется субгармоническая в Ω функция u', которая является субгармоническим (соответственно гармоническим) продолжением функции u с $\Omega \setminus E'$ на Ω и однозначно строится по правилу (3.3) с заменой E на E'. В силу известных свойств субгармонических функций [9, 1.II.6(f)], учитывая, что множества E' и E как полярные имеют нулевую лебегову меру, получаем

$$\begin{aligned} u'(x) = \lim_{r\to 0} \int\limits_{B(x,r)\setminus E'} u' \, dm_x^{(r)} &= \lim_{r\to 0} \int\limits_{B(x,r)\setminus E'} (u_1 - u_2) \, dm_x^{(r)} \\ &= \lim_{r\to 0} \int\limits_{B(x,r)\setminus E} (u_1 - u_2) \, dm_x^{(r)}, \quad x \in \Omega, \end{aligned}$$

где правая часть при $x \notin E$ равна $u_1(x) - u_2(x) = u(x)$. Таким образом, u' на самом деле является субгармоническим (соответственно гармоническим) и единственным продолжением функции u с $\Omega \setminus E$ на Ω.

Доказательство критерия положительности заряда. Рассмотрим свертку $\nu^{(r)} = \alpha^{(r)} * \nu$, где $\alpha \not\equiv 0$ — гладкая финитная положительная функция, $\operatorname{supp} \alpha \subset B(0,1)$, $\alpha^{(r)}(x) = \alpha(x/r)$, $r > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$. Тогда в открытом множестве $\Omega^{(r)}$, составленном из точек Ω, удаленных от границы $\partial\Omega$ множества Ω на расстояние $> r$, определена гладкая δ-субгармоническая функция $u^{(r)}$ с распределением зарядов $\nu^{(r)}$ [15]. Из условия (0.5) следует, что

$$\int V^n(x+y) \, d\nu^{(r)}(y) = \int\int V^n(x+y+z) \, d\nu(y) \alpha^{(r)}(z) \, dz \geq 0$$

уже для всех точек $x \in \Omega$. Отсюда по второму критерию субгармоничности функция $u^{(r)}$ субгармоническая и $\nu^{(r)} \geq 0$. При $r \to 0$ система положительных мер $\nu^{(r)}$ слабо сходится к заряду ν, следовательно, $\nu \geq 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гамелин Т.* Равномерные алгебры. М.: Мир, 1973.
2. *Gamelin T. W.* Uniform algebras and Jensen measures. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1978.
3. *Function Algebras.* Proc. Intern. sympos. function algebras /Birtel F., Ed. Chicago: Scott, Foresman and Co., 1966.
4. *Koosis P.* Leçons sur le théorème de Beurling et Malliavin. Montréal: Les Publications CRM, 1996.
5. *Cole B. J., Ransford T. J.* Subharmonicity without upper semicontinuity // J. Funct. Anal. 1997. V. 147. P. 420–442.
6. *Хабибуллин Б. Н.* Множества единственности в пространствах целых функций одной переменной // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1991. Т. 55, № 5. С. 1101–1123.
7. *Хабибуллин Б. Н.* Оценки объема нулевых множеств голоморфных функций // Изв. вузов. Математика. 1992. № 3. С. 58–63.
8. *Хабибуллин Б. Н.* О нулевых множествах для целых функций и представлении мероморфных функций // Мат. заметки. 1996. Т. 59, № 4. С. 611–617.
9. *Hansen W., Nadirashvili N.* Mean values and harmonic functins // Math. Ann. 1993. V. 297. P. 157–170.
10. *Bu S., Schachermayer W.* Approximation of Jensen measures by image measures under holomorphic functions and applications // Trans. Amer. Math. Soc. 1992. V. 331, N 2. P. 585–608.
11. *Poletsky E. A.* Holomorphic Currents // Indiana U. Math. J. 1993. V. 42, N 1. P. 85–144.
12. *Netuka I., Vesely J.* Mean value property and harmonic functions // Classical and modern potential theory and applications. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1994. P. 359–398.
13. *Хабибуллин Б. Н.* О типе целых и мероморфных функций // Мат. сб. 1992. Т. 183, № 11. С. 35–44.
14. *Хабибуллин Б. Н.* Неконструктивные доказательства теоремы Берлинга — Мальявена о радиусе полноты и теоремы неединственности для целых функций // Изв. РАН. Сер. мат. 1994. Т. 58, № 4. С. 125–148.
15. *Arsove M. G.* Functions representable as differences of subharmonic functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1953. V. 75. P. 327–365.
16. *Хейман У., Кеннеди П.* Субгармонические функции. М.: Мир, 1980.
17. *Doob J. L.* Classical potential theory and its probabilistic counterpart. New York: Springer-Verl., 1984.
18. *Watson N. A.* Superharmonic extensions, mean values and Riesz measures // Potential Anal. 1993. V. 2. P. 269–294.
19. *Хабибуллин Б. Н.* Меры Йенсена на открытых множествах // Вестн. Башкирск. ун-та. 1999. Т. 2. С. 3–6.
20. *Хабибуллин Б. Н.* Критерии субгармоничности в терминах мер и функций Йенсена // Материалы школы-конференции «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы». Казань: Казанское мат. о-во, 1999. С. 236–237.
21. *Gardiner S. J.* Harmonic approximation. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.
22. *Gauthier P. M.* Uniform approximation // Complex Potential Theory. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 1994. P. 235–271.
23. *Гайер Д.* Лекции по теории аппроксимации в комплексной области. М.: Мир, 1986.
24. *Gautier P. M.* Subharmonic extensions and approximations // Canad. Math. Bull. 1994. V. 37, N 5. P. 46–53.
25. *Брело М.* Основы классической теории потенциала. М.: Мир, 1964.
26. *Ландкоф Н. С.* Основы современной теории потенциала. М.: Наука, 1966.
27. *Hayman W. K.* Subharmonic functions. London: Acad. Press, 1989. V. II.
28. *Азарин В. С.* Об асимптотическом поведении субгармонических функций конечного порядка // Мат. сб. 1979. Т. 108, № 2. С. 147–167.
29. *Азарин В. С.* Теория роста субгармонических функций: Текст лекций. Харьков: Изд-во Харьковск. ун-та, 1978.

30. *Хёрмандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. М.: Мир, 1986. Т. 1, 2.
31. *Брело М.* О топологиях и границах в теории потенциала. М.: Мир, 1974.
32. *Ransford T. J.* Potential theory in the complex plane. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.
33. *Newman M. H. A.* Elements of the topology of plane of points. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1964.
34. *Bagby T., Gautier P. M.* Harmonic approximation on closed subsets of Riemannian manifolds // Complex potential theory. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 1994. P. 75–89.

Статья поступила 14 августа 2001 г.

Хабибуллин Булат Нурмиевич
Башкирский гос. университет, математический факультет,
ул. Фрунзе, 32, Уфа 450074,
Институт математики УНЦ РАН, ул. Чернышевского, 112, Уфа 450077
`khabib-bulat@mail.ru`