Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2003. Том 44, № 3

УДК 515.122: 517.987

ГАММА–КОМПАКТИФИКАЦИЯ ИЗМЕРИМЫХ ПРОСТРАНСТВ

А. И. Жданок

Аннотация: Определяются и изучаются устройство и свойства гамма-компактификации произвольного измеримого пространства в общем и в топологическом случаях. Вводится и исследуется понятие гамма-расширения одной точки в топологическом пространстве. Рассматривается процедура продолжения конечно-аддитивных мер с исходного пространства до регулярных счетно-аддитивных на его гамма-компактификации.

Ключевые слова: компактификация измеримых пространств, компактификация топологических пространств, компактное расширение точки, конечно-аддитивная мера, чисто конечно-аддитивная мера, счетно-аддитивная мера, продолжение мер

§ 1. Используемый аппарат и обсуждение проблемы

Пусть X — произвольное множество и Σ — некоторая алгебра или σ-алгебра его подмножеств. Будем обозначать через $\sigma(\Sigma)$ σ-алгебру, порожденную алгеброй Σ. Если X — топологическое пространство с топологией $\tau = \tau_X$, то $\mathscr{A} = \mathscr{A}_X = \mathscr{A}_\tau$ и $\mathscr{B} = \mathscr{B}_X = \mathscr{B}_\tau$ — борелевские алгебра и σ-алгебра в X, порожденные топологией τ. Всюду в статье будем полагать, что Σ содержит все одноточечные множества из X. Для топологического X всегда предполагаем его минимальную T_1-отделимость, т. е. считаем, что все его одноточечные множества замкнуты. Тогда его борелевские алгебра $\mathscr{A}$ и σ-алгебра $\mathscr{B}$ содержат все одноточечные множества. Встречающиеся далее хаусдорфовы, регулярные, нормальные и метрические пространства являются T_1-отделимыми.

Пусть X произвольно. Обозначим через $B(X)$ банахово пространство всех ограниченных функций $f : X \to R$ с sup-нормой.

Пусть в X задана алгебра его подмножеств Σ. Обозначим через $H(X,\Sigma)$ линейное пространство всех конечных линейных комбинаций характеристических функций χ_E множеств E из Σ и через $B(X,\Sigma)$ — замыкание пространства $H(X,\Sigma)$ в пространстве $B(X)$, т. е. добавим к $H(X,\Sigma)$ все равномерные пределы последовательностей функций из $H(X,\Sigma)$. Очевидно, $B(X,\Sigma)$ — банахово пространство и $H(X,\Sigma) \subset B(X,\Sigma) \subset B(X)$. Если Σ является σ-алгеброй, то $B(X,\Sigma)$ — это банахово пространство всех Σ-измеримых ограниченных функций. Если алгебра Σ не σ-алгебра, то не все функции из $B(X,\Sigma)$ Σ-измеримы.

Если X — топологическое пространство, то $C(X)$ — банахово пространство всех непрерывных ограниченных функций на X с sup-нормой. Очевидно, $C(X) \subset B(X,\mathscr{B})$.

Следуя символике из книги Н. Данфорда и Дж. Шварца [1], будем обозначать через $ba(X,\Sigma)$ банахово пространство всех конечно-аддитивных ограниченных мер $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}$ с нормой, равной полной вариации меры μ на X: $\|\mu\| =$

$\mathrm{Var}(\mu, X)$; через $ca(X, \Sigma)$ — банахово пространство всех счетно-аддитивных ограниченных мер $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}$ с той же нормой. Если X — топологическое пространство, то меру $\mu \in ba(X, \Sigma)$ (алгебра Σ не обязательно связана с топологией) называют *регулярной*, если для любых $E \in \Sigma$ и $\varepsilon > 0$ существуют $F, G \in \Sigma$ такие, что $\overline{F} \subset E \subset \overset{\circ}{G}$ и $\mathrm{Var}(\mu, G \setminus F) < \varepsilon$ (здесь $\overline{F}$ — замыкание F, $\overset{\circ}{G}$ — внутренность G). Обозначим через $rba(X, \Sigma)$ и $rca(X, \Sigma)$ банаховы подпространства всех регулярных мер в соответствующих пространствах мер. Для метрического пространства X всегда выполняется $ca(X, \mathscr{B}) = rca(X, \mathscr{B})$, а для хаусдорфова компакта верно $rba(X, \mathscr{A}) = rca(X, \mathscr{B})$ (это знаменитая теорема А. Д. Александрова). В литературе конечно-аддитивные меры называют также *зарядами* (*charges*).

Определение 1.1 [2]. Неотрицательная конечно-аддитивная мера $\mu \in ba(X, \Sigma)$ называется *чисто конечно-аддитивной*, если для любой счетно-аддитивной меры $\lambda \in ca(X, \Sigma)$ такой, что $0 \le \lambda \le \mu$, следует $\lambda = 0$. Произвольная мера $\mu \in ca(X, \Sigma)$ называется *чисто конечно-аддитивной*, если в ее разложении Жордана $\mu = \mu^+ - \mu^-$ обе неотрицательные меры μ^+ и μ^- чисто конечно-аддитивны.

В первом систематическом исследовании конечно-аддитивных мер — в работах А. Д. Александрова [3–5] — была получена в частном случае, а затем в общем случае в работе К. Иосиды и Е. Хьюитта [2] следующая

Теорема 1.1. *Любая конечно-аддитивная мера $\mu \in ba(X, \Sigma)$ единственным образом представима в виде $\mu = \mu_1 + \mu_2$, где $\mu_1 \in ca(X, \Sigma)$ — счетно-аддитивная, а $\mu_2 \in ba(X, \Sigma)$ — чисто конечно-аддитивная меры.*

Заметим, что тождественно равная нулю мера является и счетно-аддитивной и чисто конечно-аддитивной.

Чисто конечно-аддитивные меры так же, как и счетно-аддитивные, образуют в $ba(X, \Sigma)$ линейное подпространство $pfa(X, \Sigma)$. Теорему 1.1 можно трактовать как утверждение о разложении пространства мер в прямую сумму:

$$ba(X, \Sigma) = ca(X, \Sigma) \oplus pfa(X, \Sigma).$$

Чисто конечно-аддитивная мера равна нулю на любом конечном множестве. В [2] со ссылкой на Биркгофа отмечается, что на счетном множестве существует $2^{2^{\aleph_0}} = 2^c$ (c — континуум) попарно сингулярных конечно-аддитивных мер.

Для произвольных $f \in B(X, \Sigma)$ и $\mu \in ba(X, \Sigma)$ сохраняется обычная конструкция интеграла Лебега (т. е. интегрируемы и неизмеримые функции из $B(X, \Sigma)$), который мы будем обозначать по-разному:

$$\int\limits_X f(x)\mu(dx) = \int f d\mu = \langle \mu, f \rangle = f(\mu) = \mu(f).$$

Напомним, что пространства функций и мер находятся в определенной двойственной связи [1]: для произвольного (X, Σ) верно $B^*(X, \Sigma) = ba(X, \Sigma)$, для нормального топологического X верно $C^*(X) = rba(X, \mathscr{A})$, для компактного хаусдорфова X верно $C^*(X) = rca(X, \mathscr{B})$, где знак равенства означает изометрический изоморфизм, а слева стоят топологически сопряженные пространства к соответствующим пространствам функций.

В пространствах мер M будем рассматривать четыре «естественные» топологии: τ_M — сильная (метрическая) топология в M; τ_{M^*} — слабая топология в

M, порожденная сопряженным пространством M^*; τ_B — слабая топология в M, порожденная пространством $B(X,\Sigma)$ (т. е. $*$-слабая для $M = ba(X,\Sigma)$); τ_C — слабая топология в M, порожденная пространством $C(X)$ для топологического X (т. е. $*$-слабая топология для $M = rba(X,\mathscr{A})$).

Перечисленные топологии для фиксированного топологического X сравнимы: $\tau_C \prec \tau_B \prec \tau_{M^*} \prec \tau_M$. Все топологии τ_{M^*}, τ_B, τ_C задаются тихоновской базой топологии с системой окрестностей точки $\mu \in M$ вида

$$V(\mu,\varepsilon;\xi_1\dots,\xi_n) = \{\eta \in M : |\xi_i(\mu-\eta)| < \varepsilon,\ i = 1,2,\dots,n\};\quad n \in \mathbb{N},\ \varepsilon > 0.$$

Здесь $\xi_1,\dots,\xi_n$ — линейные функционалы из соответствующих пространств M^*, $B(X,\Sigma)$, $C(X)$. В последних двух пространствах ξ_i — любая функция из $B(X,\Sigma)$ или из $C(X)$, понимаемая как линейный функционал на $ba(X,\Sigma)$ вида

$$f(\mu) = \langle f,\mu\rangle = \int f d\mu.$$

Теперь после введения основных базовых понятий мы можем схематично на понятийном уровне обрисовать изучаемую в данной работе проблему.

В общей топологии рассматривают различные компактификации bX топологического и некомпактного X, но всегда при одном условии: пространство X *гомеоморфно и плотно* вкладывается в bX. В такой постановке всегда существуют минимальная одноточечная александровская компактификация αX и максимальная стоун-чеховская компактификация βX, т. е. для всех компактификаций bX выполняется $\alpha X \subset bX \subset \beta X$. Если X уже является компактом, то можно считать $X = \alpha X = \beta X$.

Есть ряд других подходов к построению стоун-чеховской компактификации βX. Самая прозрачная трактовка βX определяет его как *минимальное* компактное расширение исходного топологического некомпактного X, при котором все непрерывные ограниченные функции из $C(X)$ имеют единственное непрерывное продолжение с X на $\beta X \supset X$. Например, если $X = (0,1) \subset \mathbb{R}$, то при компактификации βX добавляются множества точек «около» нуля и «около» единицы, причем в большом количестве — мощности 2^c. Делается это для того, чтобы, например, непрерывно продолжить влево функцию $\sin(\frac{1}{x})$.

Совершенно естественно поставить вопрос шире (на примере $X = (0,1)$): как нужно расширить $X = (0,1)$ до минимального компакта $bX \supset X$ так, чтобы все непрерывные ограниченные функции $f : X \to \mathbb{R}^1$ с разрывом (например) в точке $x = \frac{1}{2}$ имели бы единственное непрерывное ограниченное продолжение на компакт $bX \supset X$? Очевидно, для этого нужно «около» точки $x = \frac{1}{2}$ добавить такой же нарост, как и «около» точек «0» или «1» при построении $\beta(0,1)$. Если же мы хотим продолжить все разрывные (измеримые по Борелю) функции $f : (0,1) \to \mathbb{R}^1$ до непрерывных на некотором компактном расширении $b(0,1)$ пространства $(0,1)$, то в $b(0,1)$ нужно включить указанные «элементарные» наросты и «около» каждой точки $x \in (0,1)$. Очевидно, получаемый компакт $b(0,1)$ как множество окажется строго больше «максимальной» стоун-чеховской компактификации βX.

В общей постановке для топологического X задача выглядит так: построить и изучить минимальное компактное расширение bX пространства X (т. е. X взаимно однозначно и плотно вкладывается в bX) такое, что любая $f \in B(X,\mathscr{B})$ имеет единственное непрерывное продолжение $\tilde{f}$ на bX, т. е. $\tilde{f} \in C(bX)$. Такое компактное расширение bX называется у нас *«гамма-компактификацией»* исходного (пока топологического) пространства X и обозначается через γX.

Поскольку компактификация γX больше, чем «максимальная» компактификация bX, то вложение $X \subset \gamma X$ не может быть гомеоморфным. Отметим, что в общей топологии традиционно изучают лишь гомеоморфные вложения $X \subset bX$ при компактных расширениях, чем и обусловлена недостаточная изученность компактификации γX.

Поставим вопрос еще шире. Поскольку мы теперь вышли за рамки гомеоморфных вложений $X \subset bX$, то, сохраняя функциональную суть задачи, можно вообще отказаться от задания топологии в исходном пространстве X. Пусть в X задана некоторая σ-алгебра Σ (или алгебра). Требуется построить и изучить такое минимальное топологическое компактное пространство $\gamma X = \gamma_\Sigma X$, что X взаимно однозначно и плотно вкладывается в γX, при этом все Σ-измеримые ограниченные функции $f \in B(X, \Sigma)$ имеют единственное непрерывное продолжение $\tilde{f}$ на γX, т. е. $\tilde{f} \in C(\gamma X)$. В такой постановке говорить о гомеоморфности вложения $X \subset \gamma X$ уже просто не имеет смысла, поскольку в X нет топологии, и вся конструкция выпадает из традиционной сферы интересов топологов.

«Обговоренный» выше «новый» объект γX на самом деле хорошо известен в функциональном анализе уже с давних пор. Для произвольного измеримого (X, Σ) пространство $B(X, \Sigma)$ является одновременно банаховой алгеброй относительно естественных операций сложения и умножения функций. В гельфандовской теории нормированных колец (в теории банаховых алгебр) устанавливается изометрический изоморфизм r между $B(X, \Sigma)$ и банаховой алгеброй $C(Q)$ всех ограниченных непрерывных функций $f : Q \to \mathbb{R}$ на некотором компакте Q. Компакт Q является пространством максимальных идеалов алгебры $B(X, \Sigma)$ с гельфандовской топологией. Компакт Q может быть представлен и в других терминах: «мультипликативные функционалы», «крайние точки», «двузначные меры», «ультрафильтры», «стоуновский компакт булевой алгебры Σ» и т. д.

Изометрический изоморфизм $r : B(X, \Sigma) \to C(Q)$ сопровождается взаимно однозначным плотным вложением $s : X \to Q$, $\overline{s(X)} = Q$. Принято отождествлять точки $x \in X$ и $s(x) \in Q$, т. е. считать $s(x) = x \in Q$. Таким образом, можно говорить, что изоморфизм r обеспечивает продолжение измеримых функций, вообще говоря, с нетопологического X до непрерывных функций на некотором компакте $Q \supset X$. При этом такое продолжение в рамках описанной конструкции единственно. Таким образом, компакт Q и играет роль описанного выше расширения γX.

В общей гельфандовской теории нормированных колец (банаховых алгебр) пространство максимальных идеалов $Q = \gamma_\Sigma X$ банаховой алгебры $B(X, \Sigma)$ является всего лишь одним частным случаем в ряду многочисленных представлений общих колец и алгебр. Возможно, поэтому структурные и топологические свойства пространства $\gamma_\Sigma X$ подробно не изучались и в этом разделе математики.

Следует отметить, что и стоун-чеховская компактификация βX топологического X также может быть описана как пространство максимальных идеалов банаховой алгебры $C(X)$.

В настоящей работе изучаются устройство и свойства гамма-компактификации γX в общем (X, Σ) и в топологическом $(X, \mathscr{B})$ случаях. Вводится и исследуется понятие *гамма-расширения* одной точки в топологическом X. Рассматривается процедура продолжения конечно-аддитивных мер с пространства (X, Σ) до регулярных счетно-аддитивных на пространстве $(\gamma X, \mathscr{B}_{\gamma X})$.

Интерес автора к указанной задаче связан не столько с малой изученностью объекта γX, сколько с вполне конкретными нуждами использования всей конструкции гамма-компактификации в теории общих цепей Маркова. В работе автора [6] показано, что для изучения произвольной цепи Маркова на общем «фазовом» измеримом пространстве (X,Σ) можно перейти к некоторой изоморфной «феллеровской» цепи на компакте $(\gamma X,\mathscr{B}_{\gamma X})$, где ответ на многие вопросы можно получить проще, а затем вернуться и переформулировать добытые сведения уже для исходного пространства (X,Σ). Метод, предложенный в [6], оказался плодотворным, и в дальнейшем автором был получен и опубликован еще ряд теорем эргодического типа для произвольных цепей Маркова с использованием конструкции гамма-компактификации (см. [7, 8]). Однако в данной статье мы не будем касаться цепей Маркова и других возможных использований гамма-компактификаций, а будем изучать непосредственно ее как некую самоценность, лежащую на стыке общей топологии, теории нормированных колец, теории меры и функционального анализа.

Вместе с тем, возможный интерес специалистов по теории вероятности к гамма-компактификации и побудил нас выше поместить на неформальном и нестрогом языке подробное предварительное обсуждение относящихся к построению γX деталей. Для специалистов по функциональному анализу вышеизложенные факты хорошо известны.

Следует отметить, что в случае нетопологического (X,Σ) существует специальная процедура, позволяющая описать γX и в рамках гомеоморфных расширений, т. е. в топологических традициях. Делается это при помощи компактификации Уолмэна — Шанина [9], при которой в (X,Σ) вводится некоторая искусственная топология. Однако устройство γX при таком подходе оказывается глубоко спрятанным за набором специальных технических средств и интересующая нас информация в работе [9] и к ней примыкающих не просматривается. В данной работе мы не используем подход Уолмэна — Шанина.

Изучение гамма-компактификации возможно в рамках теории булевых алгебр, а также в терминах нестандартного анализа, чем мы в данной статье не пользуемся.

В работе [10] дано адекватное построение гамма-компактификации на языке ультрафильтров (о такой возможности было хорошо известно и ранее). Однако эта техника позволила в основном дать лишь новые трактовки уже полученных ранее автором результатов [11, 12] и дальнейшего развития у нас не получила. Язык ультрафильтров в данной статье не используется.

§ 2. Общая конструкция гамма-компактификации

Пространства $B(X,\Sigma)$ и $C(X)$ являются банаховыми алгебрами с определенными свойствами, которых мы не будем касаться. Из общих теорем о представлении банаховых алгебр (см., например, [13, 14]) вытекает следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Пространство $B(X,\Sigma)$ изометрически и алгебраически изоморфно пространству $C(Q)$, где Q является компактным топологическим пространством и может быть представлено (гомеоморфно) в следующих формах:*

1) *Q является пространством максимальных идеалов алгебры $B(X,\Sigma)$ в гельфандовской топологии;*

2) *Q является пространством мультипликативных функционалов в $B^*(X,\Sigma)$ в $*$-слабой топологии.*

Напомним, что мультипликативным называется функционал $\xi \in B^*(X,\Sigma)$ такой, что $\xi(fg) = \xi(f)\xi(g)$ для любых $f, g \in B(X,\Sigma)$.

Поскольку $B^*(X,\Sigma) = ba(X,\Sigma)$, то мультипликативным функционалам из $B^*(X,\Sigma)$ соответствует множество конечно-аддитивных мер из $ba(X,\Sigma)$. Свойства множества таких мер мы уточним в следующем параграфе. Сейчас же сразу можно отметить, что все меры Дирака δ_x с одноточечными носителями $x \in X$ определяют часть мультипликативных функционалов из Q.

Определение 2.1. Пусть дано произвольное измеримое пространство (X,Σ). Назовем *гамма-компактификацией пространства* (X,Σ) множество $\gamma_\Sigma X = \gamma X$ всех максимальных идеалов банаховой алгебры $B(X,\Sigma)$ с гельфандовской топологией или, что эквивалентно, множество всех мультипликативных функционалов в сопряженном пространстве $B^*(X,\Sigma)$ в $*$-слабой топологии. Будем употреблять также сокращенную запись «γ-компактификация». Топологию в γX обозначим через $\tau_\gamma = \tau_{\gamma X}$.

Таким образом, γX и является компактом Q из теоремы 2.1.

Приведем общие сведения о построении расширения γX, ориентируясь на [1, гл. IV, 6, 9], где изометрический изоморфизм $r : B(X,\Sigma) \to C(\gamma X)$ сопровождается двумя естественными отображениями. *Первое* из них — взаимно однозначное плотное вложение $s : X \to \gamma X$. Мы будем часто отождествлять точки $s(x) = x$ при $x \in X$. Его можно трактовать как сопоставление каждому $x \in X$ меры Дирака $\delta_x = s(x) \in ba(X,\Sigma) = B^*(X,\Sigma)$, вырожденной в точке $x \in X$. Под $s(E)$ понимаем образ $E \in \Sigma$ при поточечном отображении s. В τ_γ-топологии $\overline{s(X)} = \gamma X$. Если X — дискретное топологическое пространство, т. е. $\tau_X = 2^X$ и все подмножества в X открыто-замкнуты, то отображение s непрерывно и $\gamma X = \beta X$. Для недискретного топологического X и $\Sigma = \mathscr{B}$ отображение $s : X \to \gamma X$ разрывно и расширение γX в определенном смысле больше множества βX.

Изометрия $r : B(X,\Sigma) \to C(\gamma X)$ является также алгебраическим изоморфизмом, т. е. $r(f_1 + f_2) = r(f_1) + r(f_2)$ и $r(f_1 f_2) = r(f_1) r(f_2)$. В частности, $r(f^2) = [r(f)]^2$. Пусть $E \in \Sigma$ и $\chi_{_E}$ — характеристическая функция множества E. Тогда $r([\chi_{_E}]^2) = [r(\chi_{_E})]^2 = r(\chi_{_E})$. Следовательно, $r(\chi_{_E})$ может принимать только два значения 0 и 1, т. е. $r(\chi_{_E}) \in C(\gamma X)$ также является характеристической функцией некоторого множества $E_1 \subset \gamma X$, $r(\chi_{_E}) = \chi_{_{E_1}}$. Функция $\chi_{_{E_1}}$ может быть непрерывной, только если множество E_1 открыто-замкнуто в γX. Следовательно, изоморфизм r порождает некоторое *второе* отображение t множеств $E \in \Sigma$ из X в класс открыто-замкнутых множеств $\mathscr{N}_{\gamma X}$. При этом $r(\chi_{_E}) = \chi_{_{t(E)}}$ для всех $E \in \Sigma$.

В [1, гл. IV, 9, лемма 10] доказывается, что отображение t является алгебраическим изоморфизмом алгебры Σ на весь класс $\mathscr{N}_{\gamma X}$, который оказывается алгеброй в γX и, более того, базой топологии τ_γ в γX. Таким образом, гамма-компактификация $(\gamma X, \tau_\gamma)$ является вполне несвязным пространством.

Алгебраические свойства изоморфизма для $t : \Sigma \to \mathscr{N}_{\gamma X}$ означают, что для любых $E_1, E_2 \in \Sigma$ выполняется

$$t(E_1 \cup E_2) = t(E_1) \cup t(E_2), \quad t(E_1 \cap E_2) = t(E_1) \cap t(E_2), \quad t(E_1^\perp) = [t(E_1)]^\perp,$$

где $\perp$ означает взятие дополнения к множеству.

Определение 2.2. Пусть (X,τ) — топологическое пространство. Определим класс Z-множеств $\mathbf{Z} = \{Z \subset X : \exists f \in C(X),\ Z = f^{-1}(0)\}$. Назовем порожденные классом $\mathbf{Z}$ алгебру $\mathscr{A}_Z$ и σ-алгебру $\mathscr{B}_Z$ *бэровскими алгеброй и σ-алгеброй. Бэровскими* будем называть множества из $\mathscr{B}_Z$.

Для метрических и некоторых других пространств бэровская σ-алгебра $\mathscr{B}_Z$ совпадает с борелевской $\mathscr{B}$. В общем случае $\mathscr{B}_Z \subset \mathscr{B}$ и равенство может не выполняться. Известно [15, гл. X, § 51]), что в хаусдорфовом компактном вполне несвязном пространстве бэровская σ-алгебра $\mathscr{B}_Z$ порождается алгеброй открыто-замкнутых множеств $\mathscr{N}_{\gamma X}$, т. е. $\mathscr{B}_Z = \sigma(\mathscr{N}_{\gamma X})$. В таких пространствах, за исключением тривиальных случаев, бэровская σ-алгебра строго меньше борелевской σ-алгебры. Отметим, что алгебра $\mathscr{N}_{\gamma X}$, вообще говоря, не является σ-алгеброй и в том случае, когда Σ является σ-алгеброй. Поскольку всегда $\mathscr{N}_{\gamma X} = t(\Sigma)$, можно сказать, что отображение t сохраняет конечные теоретико-множественные операции, но может не сохранять бесконечные (счетные) операции, т. е. не является непрерывной функцией в теоретико-множественном смысле.

Для сопряженных пространств функций имеем изоморфизмы $B^*(X,\Sigma) = ba(X,\Sigma)$, $C^*(\gamma X) = rca(\gamma X, \mathscr{B}_{\gamma X})$. Сопряженным к изоморфизму $r : B(X,\Sigma) \to C(\gamma X)$ является изоморфизм $r^* : C^*(\gamma X) \to B^*(X,\Sigma)$, т. е. $r^* : rca(\gamma X, \mathscr{B}_{\gamma X}) \to ba(X,\Sigma)$. Следовательно, изоморфизм $[r^*]^{-1}$ осуществляет единственное продолжение конечно-аддитивных мер $\mu \in ba(X,\Sigma)$ с пространства (X,Σ) до регулярных счетно-аддитивных мер $\tilde{\mu} = [r^*]^{-1}\mu \in rca(\gamma X, \mathscr{B}_{\gamma X})$ на пространстве $(\gamma X, \mathscr{B}_{\gamma X})$. В [1] устанавливаются следующие соотношения: $\tilde{\mu}(E) = \mu(t^{-1}(E))$ для $E \in \mathscr{N}_{\gamma X}$ и $\tilde{\mu}(tG) = \mu(G)$ для $G \in \Sigma$. Существует единственное продолжение меры $\tilde{\mu}$, уже определенной на алгебре $\mathscr{N}_{\gamma X}$, до регулярной счетно-аддитивной меры на бэровской $\mathscr{B}_Z$ и борелевской $\mathscr{B}_{\gamma X}$ σ-алгебрах.

Из определения отображений s и t вытекают следующие очевидные импликации, которые для удобства соберем в «таблицу». Полагаем, что $E, F \in \Sigma$.

Свойства 2.1. 1. $E = X \iff t(E) = \gamma X \iff s(E) = X$.
2. $E = \varnothing \iff t(E) = \varnothing \iff s(E) = \varnothing$.
3. $E \subset F \iff t(E) \subset t(F) \iff s(E) \subset s(F)$.
4. $E \neq F \iff t(E) \neq t(F) \iff s(E) \neq s(F)$.
5. $E \cap F = \varnothing \iff t(E) \cap t(F) = \varnothing \iff s(E) \cap s(F) = \varnothing$.

В [6] приводится следующее несложное утверждение, которое мы здесь поместим без доказательства.

Теорема 2.2. 1^0. *Для конечного $E \in \Sigma$ выполняется $s(E) = t(E)$.*
2^0. *Для бесконечного $E \in \Sigma$ выполняется $s(E) \neq t(E)$.*
3^0. *Для любого $E \in \Sigma$ выполняется $s(E) \subset t(E)$, $\overline{s(E)} = t(E)$.*
4^0. *Для всех $E \subset X$ выполняется $s(E)^\circ = s(E) \in \tau_{\gamma X} \subset \mathscr{B}_{\gamma X}$; в частности $s(\Sigma) \subset \tau_{\gamma X} \subset \mathscr{B}_{\gamma X}$.*

Следствие 2.1. *X — открытое всюду плотное подмножество в γX.*

Следствие 2.2. *$s(2^X) = 2^{s(X)} \subset \tau_{\gamma X}$, т. е. $s(X) = X$ является дискретным подпространством в γX в топологии $\tau_{\gamma X}$.*

Следствие 2.3. *$s(2^X) \subset \mathscr{B}_{\gamma X}$.*

Теперь после обсуждения основных известных и нужных нам конструкций переходим к дальнейшему изучению устройства гамма-компактификации. Нарост $\gamma X \setminus X$ гамма-компактификации содержит некие наросты или расширения, производимые около каждой точки $x \in X$. Ниже мы строим и изучаем такие «элементарные» наросты для топологических пространств.

Определение 2.3. Пусть X — топологическое пространство с топологией τ и $x_0 \in X$. Обозначим через $\mathbf{U} = \mathbf{U}(x_0)$ класс всех открытых окрестностей точки $x_0 : \mathbf{U}(x_0) = \{U \in \tau : x_0 \in U\}$. Определим в $\gamma_{\mathscr{B}}$ множество

$$\gamma(x_0) \geq \bigcap_{U \in \mathbf{U}(x_0)} t(U),$$

которое назовем *гамма-расширением точки* x_0 (относительно пространства (X, τ)), а множество $\gamma(x_0) \setminus \{x_0\}$ назовем *гамма-наростом точки* x_0.

В теории булевых алгебр возникают объекты, подобные нашему гамма-расширению точки, называемые у Р. Сикорского [16, гл. II, § 22] *дефектными множествами*.

Пусть $\mathbf{W}(x_0)$ — база открытых окрестностей точки $x_0 \in X$ в топологии τ. Тогда несложно проверить, что

$$\gamma(x_0) = \bigcap_{U \in \mathbf{W}(x_0)} t(U).$$

Если (X, τ) удовлетворяет первой аксиоме счетности, т. е. для каждой точки $x_0 \in X$ существует счетная база окрестностей $\mathbf{W}(x_0) = \{U_1, U_2, \dots\}$, то

$$\gamma(x_0) = \bigcap_{n=1}^{\infty} t(U_n).$$

Теорема 2.3. *Пусть (X, τ) — топологическое пространство. Для любого $x_0 \in X$ выполняются утверждения:*

1^0) $x_0 = s(x_0) \in \gamma(x_0)$ *и, следовательно,* $\gamma(x_0) \neq \varnothing$;

2^0) $\gamma(x_0)$ *замкнуто в* $(\gamma_{\mathscr{B}}, \tau_\gamma)$ *и, следовательно, компактно в* $(\gamma_{\mathscr{B}}, \tau_\gamma)$;

3^0) $\gamma(x_0) \in \mathscr{B}_{\gamma X}$, $\gamma(x_0) \setminus \{x_0\} \in \mathscr{B}_{\gamma X}$.

Доказательство тривиально, и мы его опускаем.

Теорема 2.4. *Пусть (X, τ) — нормальное топологическое пространство. Тогда $\gamma(x_0) \cap X = \{x_0\}$ для любой $x_0 \in X$, т. е. гамма-нарост каждой точки целиком содержится в гамма-наросте пространства (X, τ). Если $x_1 \neq x_2$, то $\gamma(x_1) \cap \gamma(x_2) = \varnothing$.*

Доказательство. Пусть $x_1, x_2 \in X$ и $x_1 \neq x_2$. В силу нормальности (X, τ) существуют две открытые окрестности $U_1(x_1)$ и $U_2(x_2)$ такие, что $U_1(x_1) \cap U_2(x_2) = \varnothing$. По свойствам отображения t выполняется $t(U_1(x_1)) \cap t(U_2(x_2)) = \varnothing$. Следовательно, по построению $\gamma(x_1) \cap \gamma(x_2) = \varnothing$. Поскольку $x_1 \in \gamma(x_1)$, то $x_1 \notin \gamma(x_2)$. Отсюда следуют оба утверждения.

Теорема 2.5. *Пусть (X, τ) — T_1-отделимое топологическое пространство. Тогда равносильны следующие утверждения:*

1) $\gamma(x)$ *открыто в* γX;

2) $\{x\}$ *открыто в* X;

3) $\gamma(x) = \{x\}$.

Доказательство. Пусть $\{x_0\}$ открыто в X, т. е. мы предполагаем, что $\{x_0\}$ открыто-замкнуто в X. Тогда $\{x_0\} \in \mathbf{U}(x_0)$, т. е. $\{x_0\}$ является открытой окрестностью точки $x_0 \in X$ и, очевидно, $t(\{x_0\}) = \{s(x_0)\} = \{x_0\}$ и $\gamma(x_0) = \{s(x_0)\} = \{x_0\}$. Поскольку $t : \mathscr{B}_X \to \mathscr{N}_{\gamma X}$, то $t(\{x_0\}) = \{x_0\} = \gamma(x_0)$ является и открытым множеством. Достаточность доказана.

Пусть теперь $\gamma(x_0)$ открыто в $(\gamma_{\mathscr{B}}X, \tau_\gamma)$. Тогда по теореме 2.3 $\gamma(x_0)$ — открыто-замкнутое множество и $\gamma(x_0) \in \mathscr{N}_{\gamma X}$. Так как t является изоморфизмом $\mathscr{B}_X$ на $\mathscr{N}_{\gamma X}$, существует $E \in \mathscr{B}_X$ такое, что $t(E) = \gamma(x_0)$. Если E одноточечное, то, очевидно, $E = \{x_0\}$, и теорема доказана.

Предположим, что существуют $x_1, x_2 \in E$ и $x_1 \neq x_2$. Тогда $t(\{x_1\}) = \{x_1\} \subset t(E) = \gamma(x_0)$, $t(\{x_2\}) = \{x_2\} \subset t(E) = \gamma(x_0)$ и $\gamma(x_0) \cap X \supset \{x_1, x_2\}$, что противоречит теореме 2.4. Следовательно, E одноточечно и $\gamma(x_0) = t(\{x_0\}) = \{x_0\}$.

Следствие 2.4. *Нормальное топологическое пространство (X, τ) дискретно, т. е. $\tau = 2^X$, тогда и только тогда, когда для каждой $x \in X$ выполняется $\gamma(x) = \{x\}$, т. е. гамма-нарост каждой точки из X пуст.*

Заметим, что для бесконечного дискретного пространства гамма-нарост самого пространства $\gamma X \setminus X$ непуст. Отсюда вытекает, что, вообще говоря,

$$\gamma X \neq \bigcup_{x \in X} \gamma(x), \quad \bigcup_{x \in X} \gamma(x) \subset \gamma X.$$

В частности, для пространства натуральных чисел $\mathbb{N}$, рассматриваемого в дискретной топологии, гамма-компактификация $\gamma\mathbb{N}$ совпадает со стоун-чеховской компактификацией $\beta\mathbb{N}$. При этом нарост $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ имеет мощность 2^c (гиперконтинуум). Однако $\gamma(n) = \{n\}$ для каждого $n \in \mathbb{N}$ и гамма-нарост в каждой точке пуст. Получаем

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \gamma(n) = \mathbb{N} \neq \gamma\mathbb{N} = \beta\mathbb{N}.$$

Следствие 2.5. *Пусть $x_0 \in X$ и одноточечное множество $\{x_0\}$ не является открытым в исходной топологии τ_X в X. Тогда не существует $E \in \mathscr{B}_X$ такого, что $t(E) = \gamma(x_0)$.*

Теорема 2.6. *Пусть (X, τ) является нормальным пространством с первой аксиомой счетности. Тогда для каждого $x_0 \in X$ множества $\gamma(x_0)$ и $\gamma(x_0) \setminus \{x_0\}$ являются бэровскими в $(\gamma X, \tau_\gamma)$, т. е. $\gamma(x_0) \in \mathscr{B}_Z$, $\gamma(x_0) \setminus \{x_0\} \in \mathscr{B}_Z$.*

Доказательство легко следует из предыдущих определений.

Мы вернемся к гамма-расширению точки после следующего параграфа.

§ 3. Продолжение мер на гамма-компактификацию

В настоящем параграфе изучается процедура продолжения конечно-аддитивных мер с исходного измеримого пространства на его гамма-компактификацию и устанавливаются свойства продолженных мер.

Свойства мер, продолженных на стоун-чеховскую компактификацию βX, при тех или иных условиях изучались, например, в [17–19]. Начало изучения мер на γX было положено в [2].

Поскольку $B(X, \Sigma) = C(\gamma X, \mathscr{B}_{\gamma X})$, то и $B^*(X, \Sigma) = C^*(\gamma X, \mathscr{B}_{\gamma X})$, т. е. $ba(X, \Sigma) = rca(\gamma X, \mathscr{B}_{\gamma X})$ (с точностью до изометрического изоморфизма). Таким образом, конечно-аддитивные меры на (X, Σ) при их продолжении на $(\gamma X, \mathscr{B}_{\gamma X})$ становятся регулярными счетно-аддитивными.

Определение 3.1. Пусть X — топологическое пространство, и пусть $\mu \in ca(X, \mathscr{B})$, $\mu \geq 0$. Множество $K_\mu = \overline{K_\mu} \subset X$ будем называть *носителем меры*

μ, если $\mu(X \setminus K_\mu) = 0$, и для любой открытой окрестности $U(x)$ произвольного $x \in K_\mu$ выполняется $\mu(U(x)) > 0$.

Если X локально компактно, то для любой $\mu \in ca(X, \mathscr{B})$, $\mu \geq 0$, существует носитель [20, гл. III, § 2]. В частности, существует носитель K_η для любой $\eta \in rca(\gamma X, \mathscr{B}_{\gamma X})$, $\eta \geq 0$.

Если определение 3.1 применить к конечно-аддитивным мерам, то для них носитель может не существовать. Не имеет носителя в смысле определения 3.1 любая чисто конечно-аддитивная мера на любом $(X, \mathscr{B})$. При этом неверно говорить, что носитель пуст.

Поскольку каждое одноточечное множество $\{x\}, x \in X$, открыто в γX, сразу из определения носителя получаем

Следствие 3.1. *Пусть $\eta \in rca(\gamma X, \mathscr{B}_{\gamma X}), \eta \geq 0$, и K_η — носитель меры η. Тогда $\eta(\{x\}) > 0$ для любого $x \in K_\eta \cap X$ и множество $K_\eta \cap X$ счетно (конечные и пустое множества мы также относим к счетным).*

Теорема 3.1. *Пусть (X, Σ) произвольно, $\mu \in ba(X, \Sigma)$, $\mu \geq 0$, $\mu(X) = 1$, $\tilde{\mu} = [r^*]^{-1}\mu$ и $K_{\tilde{\mu}}$ — носитель меры $\tilde{\mu}$ в γX. Тогда если $K \in \Sigma$, $\mu(K) = 1$, $Z = \{x \in K : \mu(\{x\}) = 0\}$, то*

$$\overline{s(K \setminus Z)} \subset K_{\tilde{\mu}} \subset t(K) \setminus s(Z).$$

Если при этом $Z \in \Sigma$, то

$$t(K \setminus Z) \subset K_{\tilde{\mu}} \subset t(K) \setminus s(Z).$$

Доказательство. Пусть $x \in K \setminus Z$. Тогда $\widetilde{\mu}(t(\{x\}) = \mu(\{x\}) > 0$ и $t(\{x\}) \in K_{\widetilde{\mu}}$. Так как $t(\{s\}) = s(x)$, то $s(x) \in K_{\widetilde{\mu}}$ и $s(K \setminus Z) \subset K_{\widetilde{\mu}}$. Поскольку $K_{\widetilde{\mu}}$ замкнуто, то $\overline{s(K \setminus Z)} \subset K_{\widetilde{\mu}}$. Если при этом $Z \in \Sigma$, то $K \setminus Z \in \Sigma$ и по теореме 2.2 $t(K \setminus Z) = \overline{s(K \setminus Z)} \subset K_{\widetilde{\mu}}$. Итак, первое включение в обеих формулах доказано.

Докажем второе включение. Так как $\widetilde{\mu}(t(K)) = \mu(K) = 1$ и $t(K)$ замкнуто, то $K_{\widetilde{\mu}} \subset t(K)$. Пусть $y \in K_{\widetilde{\mu}}$. Если $\{y\} \in \mathscr{N}_{\gamma X}$, то множество $\{y\}$ есть открытая окрестность точки y и, следовательно, по определению 3.1 $0 < \widetilde{\mu}(\{y\}) = \mu(t^{-1}\{y\})$. Это означает, что $t^{-1}(y) = s^{-1}(y) \notin Z$, т. е. $y \notin s(Z)$ и $y \in t(K) \setminus s(Z)$. Если же $\{y\} \notin \mathscr{N}_{\gamma X}$, то $y \notin s(X)$ и тем более $y \notin s(Z)$, т. е. $y \in t(K) \setminus s(Z)$. Теорема доказана.

Если X — топологическое пространство и μ счетно-аддитивна, то в качестве K в теореме 3.1 можно взять носитель меры μ, если таковой существует. Он будет служить для «первого приближения» при оценке носителя $K_{\tilde{\mu}}$ меры $\tilde{\mu}$ в смысле формулы теоремы.

Проиллюстрируем применение формулы теоремы 3.1 на трех примерах. Пусть $X = [0, 1]$ и $\Sigma = \mathscr{B}$. Возьмем меру Дирака $\delta_{\frac{1}{2}} \in ca(X, \mathscr{B})$, вырожденную в точке $x = \frac{1}{2}$, т. е. с носителем $K = \{\frac{1}{2}\}$, и соответствующую ей меру $\widetilde{\delta}_{\frac{1}{2}} \in rca(\gamma X, \mathscr{B}_{\gamma X})$ с носителем $\widetilde{K} \in \mathscr{B}_{\gamma X}$. Тогда $Z = \varnothing$ и $t(K) \subset \widetilde{K} \subset t(K) = t(\{\frac{1}{2}\}) = s(\{\frac{1}{2}\}) = \{\frac{1}{2}\}$, т. е. $\widetilde{K} = \{\frac{1}{2}\}$. Таким образом, при продолжении меры Дирака $\delta_{\frac{1}{2}}$ с пространства $([0, 1], \mathscr{B})$ на $(\gamma X, \mathscr{B}_{\gamma X})$ она переходит в меру Дирака с тем же одноточечным носителем в X. Данный пример показывает, что равенство во включениях теоремы 3.1 может достигаться.

Рассмотрим теперь меру Лебега λ на $([0, 1], \mathscr{B})$ и ее продолжение $\tilde{\lambda}$ на $(\gamma X, \mathscr{B}_{\gamma X})$. Для λ имеем $K = [0, 1]$, $Z = K = [0, 1]$, откуда $t(\varnothing) \subset K_{\tilde{\lambda}} \subset$

$t([0,1]) \setminus s([0,1]) = \gamma([0,1]) \setminus [0,1]$. Таким образом, носитель меры $\tilde{\lambda}$ полностью уходит в нарост γ-компактификации исходного пространства.

Возьмем теперь пример чисто конечно-аддитивной меры $\mu \in ba([0,1], \mathscr{B})$, $\mu \geq 0$, с условием: $\mu([0,1]) = \mu((0,\varepsilon)) = 1$ для всех $\varepsilon \in (0,1)$. Тогда для $K = (0,\varepsilon)$ будет $Z = (0,\varepsilon)$ и для носителя $K_{\tilde{\mu}}$ продолжения $\tilde{\mu}$ меры μ на γX получим при всех $\varepsilon \in (0,1)$

$$K_{\tilde{\mu}} \subset t((0,\varepsilon)) \setminus (0,\varepsilon) \subset \gamma X \setminus X,$$

т. е. и в этом случае носитель меры $\tilde{\mu}$ целиком уходит в нарост $\gamma X \setminus X$.

Приведенные три примера являются в некотором роде эталонными, и они подсказывают путь к установлению общих фактов о взаимосвязи мер μ и $\tilde{\mu}$ и их «носителей» K_μ и $K_{\tilde{\mu}}$. Этим мы и займемся ниже.

Определение 3.2. Пусть (X, Σ) произвольно и $\mu \in ba(X, \Sigma)$. *Атомом* меры μ называют любое множество $E \in \Sigma$ такое, что $\mu(E) \neq 0$, и если $F \subset E$, $F \in \Sigma$, то либо $\mu(F) = \mu(E)$, либо $\mu(F) = 0$.

Определение 3.3. Меру $\mu \in ba(X, \Sigma)$, $\mu \geq 0$, назовем *счетно определенной*, если существует счетное множество $K \subset X$ такое, что $\mu(K) = \mu(X)$.

Определение 3.4. Меру $\mu \in ba(X, \Sigma), \mu \geq 0, \mu \neq 0$, назовем *чисто атомической*, если она счетно-аддитивна и счетно определена, т. е. $\mu \in ca(X, \Sigma)$ и существует счетное $K = \{x_1, x_2, \dots\}$ (возможно, конечное) такое, что

$$\mu(X) = \mu(K) = \sum_{x \in K} \mu(\{x\}).$$

При этом K является объединением всех атомов меры μ, причем все они одноточечны.

Определение 3.5. Меру $\mu \in ba(X, \Sigma)$, $\mu \geq 0$, назовем *неатомической*, если она не имеет одноточечных атомов.

Теорема 3.2. *Пусть $\mu \in ba(X, \Sigma)$, $\mu \geq 0$, $\mu \neq 0$, и $\tilde{\mu} = [r^*]^{-1}\mu$. Равенство $\tilde{\mu}(\gamma X \setminus X) = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда μ чисто атомична.*

Доказательство. Будем считать $\mu(X) = 1$. Пусть $\tilde{\mu}(\gamma X \setminus s(X)) = 0$. Тогда $\tilde{\mu}(K_{\tilde{\mu}} \cap s(X)) = 1$ и в силу следствия 3.1 множество $G = K_{\tilde{\mu}} \cap s(X)$ счетно, причем $\tilde{\mu}(G) = 1$. При этом для каждого $x \in G$ выполняется $\mu(\{s^{-1}\{x\}\}) = \tilde{\mu}(\{x\})$. Поскольку $\tilde{\mu}$ счетно-аддитивна, то

$$1 = \tilde{\mu}(G) = \sum_{x \in G} \tilde{\mu}(\{x\}) = \sum_{x \in G} \mu(\{s^{-1}\{x\}\}) = \sum_{y \in s^{-1}(G)} \mu(\{y\}),$$

где $s^{-1}(G)$ счетно. Очевидно, μ счетно-аддитивна. Рассуждая в обратном порядке, получим утверждение теоремы. Теорема доказана.

Теорема 3.3. *Пусть $\mu \in ba(X, \Sigma)$, $\mu \geq 0$, $\mu \neq 0$ и $\tilde{\mu} = [r^*]^{-1}\mu$. Если $K_{\tilde{\mu}} \in \mathscr{N}_{\gamma X}$, то μ счетно определена и ее счетно-аддитивная составляющая отлична от нуля и чисто атомична.*

Доказательство. Пусть $K_{\tilde{\mu}} \in \mathscr{N}_{\gamma X}$. Тогда для $K = t^{-1}(K_{\tilde{\mu}})$ выполняется $\mu(K) = \mu(X)$ и $s(K) \subset K_{\tilde{\mu}}$. Поскольку по следствию 3.1 $s(K)$ счетно, то и K счетно. Следовательно, μ счетно определена. Для любого $y \in s(K) \subset s(X)$ выполняется $\tilde{\mu}(\{y\}) > 0$. Так как $\mu(\{s^{-1}(y)\}) = \tilde{\mu}(\{y\})$ для $y \in s(X)$, отсюда следует, что для любого $x \in K$ верно $\mu(\{x\}) > 0$. Это означает, что в разложении меры $\mu = \mu_1 + \mu_2$ на чисто конечно-аддитивную μ_1 и счетно-аддитивную μ_2 составляющие мера μ_2 ненулевая и в силу счетности K чисто атомична. Теорема доказана.

Из теоремы 3.1 вытекает частичное обращение теоремы 3.3.

Следствие 3.2. *Если μ чисто атомична, то $K_{\tilde{\mu}} \in \mathscr{N}_{\gamma X}$.*

Из теоремы 3.1 получаем также следующие утверждения.

Следствие 3.3. *Пусть $\mu \in ba(X,\Sigma)$, $\mu \geq 0$ и $\tilde{\mu} = [r^*]^{-1}\mu$. Следующие условия эквивалентны:*
1) *μ неатомична;*
2) *$\tilde{\mu}(X) = 0$;*
3) *$K_{\tilde{\mu}} \subset \gamma X \setminus X$.*

Следствие 3.4. *Пусть $X = \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $\mu \in ba(\mathbb{R}^n, \mathscr{B})$, $\mu \geq 0$, и мера μ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега на $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B})$. Тогда носитель меры $\tilde{\mu}$ целиком содержится в наросте $\gamma\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^n$ гамма-компактификации пространства $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B})$.*

Следствие 3.5. *Если $\mu \in ba(X,\Sigma)$, $\mu \geq 0$, чисто конечно-аддитивна, то $K_{\tilde{\mu}} \subset \gamma X \setminus X$.*

Заметим также, что если $\mu \geq 0$, $\mu \neq 0$, чисто конечно-аддитивна, $E \subset K_{\widetilde{\mu}}$, $E \neq \varnothing$, то $E \notin \mathscr{N}_{\gamma X}$. В частности, $K_{\widetilde{\mu}} \notin \mathscr{N}_{\gamma X}$.

Напомним, что мера $\mu \in ba(X,\Sigma)$, $\mu \neq 0$, называется *двузначной*, если для любого $E \in \Sigma$ либо $\mu(E) = 0$, либо $\mu(E) = 1$.

Пусть μ счетно-аддитивна и двузначна. Когда она вырожденная в некоторой точке $x \in X$, т. е. $\mu = \delta_x$? Ответ зависит как от свойств пространства (X,Σ), так и от свойств самой меры μ . Окончательные условия пока, по-видимому, не известны. Однако если пространство X метрическое мощности не более континуума, то любая двузначная мера $\mu \in ca(X,\mathscr{B})$ имеет одноточечный носитель [17, ч. I, 7, замечание 1]. Ниже будет показано, что пространство $\gamma_\Sigma X$ также обладает таким свойством.

Определение 3.6. Назовем измеримое пространство (X,Σ) *пространством Дирака*, если любая двузначная счетно-аддитивная мера на (X,Σ) является мерой Дирака, т. е. вырождена в некоторой точке $x \in X$. В случае топологического X рассматриваем только регулярные меры на $(X,\mathscr{B})$.

Для любого пространства (X,Σ) такого, что $X \neq \gamma_\Sigma X$, существуют двузначные чисто конечно-аддитивные меры (см. ниже).

Теорема 3.4. *Компактное пространство является пространством Дирака.*

Доказательство. Пусть X компактно и $\mu \in rca(X,\mathscr{B})$ двузначна. Предположим, что $\mu(\{x\}) = 0$ для всех $x \in X$. Напомним, что мы всегда предполагаем T_1-отделимость X. Поскольку μ регулярна, то для $\varepsilon = \frac{1}{2}$ для каждого $x \in X$ существует открытое множество $U(x)$, $x \in U(x)$, такое, что $\mu(U(x)) < \varepsilon = \frac{1}{2}$, откуда $\mu(U(x)) = 0$.

Семейство $\mathbf{U} = \{U(x) : x \in X\}$ является открытым покрытием компакта X. Следовательно, существуют $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ такие, что

$$X \subset \bigcup_{i=1}^{n} U(x_i).$$

Отсюда

$$\mu(X) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(U(x_i)),$$

т. е. $\mu(X) = 0$. Получаем противоречие, следовательно, существует такое $x \in X$, что $\mu(\{x\}) = 1$. Очевидно, такая точка единственна, и $\mu = \delta_x$. Теорема доказана.

В частности, *гамма-компактификация любого измеримого пространства* (X, Σ) *является пространством Дирака.* Опять же напомним: мы всегда полагаем, что Σ содержит все одноточечные множества из X.

Утверждение, которое будет сейчас доказано, возможно, следует считать известным. Однако автор знаком лишь с соответствующими формулировками для стоун-чеховской компактификации топологического пространства [17, ч. II, 2, теорема 4]. По-видимому, приводимая ниже теорема, соответствующим образом переформулированная, известна в теории булевых алгебр, языком которых мы здесь не пользуемся. Мы приводим свое доказательство теоремы 3.5. Обозначим $m(X, \Sigma) = \{\mu \in ba(X, \Sigma) : \mu$ двузначна$\}$.

Теорема 3.5. *Гамма-компактификация $\gamma_\Sigma X$ произвольного измеримого пространства (X, Σ) изоморфна множеству двузначных мер $m(X, \Sigma)$ в τ_B-топологии. Если (X, Σ) — пространство Дирака, то при этом изоморфизме X соответствует $m(X, \Sigma) \cap ca(X, \Sigma)$.*

Доказательство. Как уже отмечалось, пространство $\gamma_\Sigma X$ изоморфно пространству всех линейных непрерывных мультипликативных функционалов $\ell(X, \Sigma)$ на пространстве $B(X, \Sigma)$. Пространство $\ell(X, \Sigma)$ рассматриваем как подмножество в $B^*(X, \Sigma) = ba\Sigma$ с τ_B-топологией.

Покажем, что $\ell(X, \Sigma) \subset m(X, \Sigma)$. Пусть $\mu \in \ell(X, \Sigma)$. Тогда для любого $E \in \Sigma$ выполняется

$$\mu(E) = \mu(\chi_E) = \mu(\chi_E^2) = \mu(\chi_E)\mu(\chi_E) = [\mu(E)]^2,$$

где $\mu(f)$ означает интеграл $\int f d\mu$. Следовательно, если $\mu \neq 0$, то μ может принимать лишь два значения: 0 и $+1$, т. е. $\mu \in m(X, \Sigma)$.

Докажем обратное. Пусть $f \in B(X, \Sigma)$ — обратимый элемент в алгебре $B(X, \Sigma)$. Это означает, что существует $\delta > 0$ такое, что $|f(x)| \geq \delta$, $x \in X$, т. е. $X = E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, $E_1, E_2 \in \Sigma$, $f(E_1) \subset (-\infty, -\delta]$, $f(E_2) \subset [\delta, \infty)$. Предположим, что для некоторой $\mu \in m(X, \Sigma)$ выполняется $\mu(f) = 0$, т. е. $\mu(\chi_{E_1} f) = -\mu(\chi_{E_2} f)$. Поскольку либо $\mu(E_1) = 1$, либо $\mu(E_2) = 1$ и, значит, либо $|\mu(\chi_{E_1} f)| \geq \delta$, либо $|\mu(\chi_{E_2} f)| \geq \delta$, то из $\mu(\chi_{E_1} f) = -\mu(\chi_{E_2} f)$ следует, что $\mu(E_1) > 0$ и $\mu(E_2) > 0$, т. е. $\mu \notin m(X, \Sigma)$. Итак, для каждого обратимого элемента $f \in B(X, \Sigma)$ и для любой $\mu \in m(X, \Sigma)$ выполняется $\mu(f) \neq 0$. Теперь из теоремы Глисона — Кахана — Желязко [14, гл. 10, теорема 10.9] вытекает, что меры $\mu \in m(X, \Sigma)$ представляют мультипликативные функционалы в $B^*(X, \Sigma)$, т. е. $m(X, \Sigma) \subset \ell(X, \Sigma)$.

Последнее утверждение теоремы следует из определения. Теорема доказана.

Предварительные модификации теорем 3.4 и 3.5 были ранее представлены автором в работе [11].

Следствие 3.6. *Пусть $\mu \in ba(X, \Sigma)$, $\mu \geq 0$, $\tilde{\mu} = [r^*]^{-1}\mu$. Мера $\tilde{\mu}$ двузначна тогда и только тогда, когда μ двузначна. При этом $K_{\tilde{\mu}} = \{y\} \subset \gamma X \setminus X$ тогда и только тогда, когда двузначная мера μ чисто конечно-аддитивна.*

Доказательство первого утверждения легко проводится от противного. Второе следует из предыдущей теоремы.

Теперь мы можем дать еще одну интерпретацию для гамма-компактификации $\gamma_\Sigma X$ измеримого пространства (X,Σ) в других терминах. По теореме 3.5 $\gamma_\Sigma X$ изоморфна множеству двузначных мер $m(X,\Sigma)$ в $ba(X,\Sigma)$. Каждая $\mu \in m(X,\Sigma)$, будучи продолженной до $\tilde\mu$ на $(\gamma X, \mathscr{B}_{\gamma X})$, имеет единственный одноточечный носитель $K_{\tilde\mu} = \{x_{\tilde\mu}\} \in \gamma_\Sigma X$, и, обратно, каждой точке $x \in \gamma_\Sigma X$ соответствует единственная двузначная счетно аддитивная мера Дирака $\tilde\mu_x \in rca(\gamma_\Sigma X, \mathscr{B}_\gamma)$, которой соответствует двузначная конечно аддитивная мера $\mu \in ba(X,\Sigma)$. Следовательно, множество $\gamma_\Sigma X$ — это множество всех одноточечных носителей (атомов) всех двузначных мер Дирака из $rca(\gamma_\Sigma X, \mathscr{B}_\gamma)$. Пусть $\tilde\mu$ — такая мера и $x_{\tilde\mu}$ — ее носитель. Тогда для любого $E \in \mathscr{B}_{\gamma X}$ если $x_{\tilde\mu} \in E$, то $\tilde\mu(E) = 1$. В частности, для $E \in \mathscr{N}_{\gamma X}$ при $x_{\tilde\mu} \in E$ выполняется $\tilde\mu(E) = \mu(t^{-1}(E)) = 1$, где $t^{-1}(E) \in \Sigma$ и $\mu \in ba(X,\Sigma)$. Таким описанием гамма-компактификации мы воспользуемся в следующем параграфе.

Сравним теперь полученные результаты с соответствующими известными фактами для стоун-чеховской компактификации βX топологического пространства X на неформальном языке. Пусть X — «достаточно хорошее» некомпактное пространство, $\mu \in rba(X, \mathscr{A}_X)$, $\mu \geq 0$, $\mu(X) = 1$, $\tilde\mu_\gamma$ и $\tilde\mu_\beta$ — ее счетно-аддитивные распространения на $\gamma_{\mathscr{B}} X$ и βX соответственно.

Как следует из результатов Наулса (см. [18]), если μ счетно-аддитивна, то для каждого компакта $K \subset \beta X \setminus X$ выполняется $\tilde\mu_\beta(K) = 0$. В то же время $\gamma X \setminus X$ является компактом и в силу следствия 3.3 если μ счетно-аддитивна и неатомична, то $\tilde\mu_\gamma(\gamma X \setminus X) = 1$.

Анализируя другие результаты, можно грубо охарактеризовать различие между βX и γX следующим образом. При распространении мер с X на βX «носители» чисто конечно-аддитивных мер «почти выметаются» в нарост $\beta X \setminus X$, а счетно-аддитивных — «почти остаются» в X. При распространении мер с X на γX «носители» всех неатомичных мер (чисто конечно-аддитивных и счетно-аддитивных) «выметаются» в нарост $\gamma X \setminus X$. Объяснение простое. *При вложении $X \to \beta X$ каждая точка $x \in X$ переходит в $x^1 \in \beta X$, которая замкнута, но не является, вообще говоря, открытой. При вложении $X \to \gamma X$ каждая точка $x \in X$ переходит в открыто-замкнутую точку $x^1 \in \gamma X$.*

Все результаты этого параграфа с очевидными изменениями распространяются и на ненормированные знакопеременные меры.

§ 4. Дальнейшие сведения о гамма-расширении точки

В § 2 определено гамма-расширение $\gamma(x_0)$ точки x_0 измеримого пространства и рассмотрены общие свойства $\gamma(x_0)$. Опираясь на результаты § 3, мы можем провести более детальное исследование свойств этого объекта, интересного самого по себе.

Теорема 4.1. *Пусть (X,τ) нормально. Для любой $x_0 \in X$ ее гамма-расширение $\gamma(x_0)$, рассматриваемое как подмножество в $(\gamma X, \tau_\gamma)$, изоморфно множеству $m(x_0)$ всех двузначных конечно-аддитивных мер $\mu \in ba(X, \mathscr{B}_X)$ с $*$-слабой топологией, удовлетворяющих следующему условию: $\mu(U(x_0)) = 1$ для любой открытой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 в топологии τ.*

При этом точке $x_0 \in \gamma(x_0)$ соответствует счетно аддитивная мера Дирака δ_{x_0}, а каждой точке $x \in \gamma(x_0) \setminus \{x_0\}$ соответствует двузначная чисто конечно-аддитивная мера (при $\gamma(x_0) \neq \{x_0\}$).

Доказательство. По теореме 3.5 $\gamma_{\mathscr{B}} X$ — это все двузначные конечно-аддитивные меры из $ba(X, \mathscr{B})$. Для точки $x_0 \in X$ ее гамма-расширение $\gamma(x_0)$

содержится в $\gamma_{\mathscr{B}}X$. Очевидно, точке $x_0 \in \gamma(x_0)$ соответствует двузначная счетно-аддитивная мера Дирака $\delta_{x_0} \in rca(X, \mathscr{B})$ с носителем в точке x_0.

Выберем $\xi \in \gamma(x_0)$, $\xi \neq x_0$. Воспользуемся данной в конце § 3 интерпретацией для $\gamma_{\mathscr{B}}X$. Тогда точке ξ соответствует двузначная счетно аддитивная мера Дирака $\tilde{\mu}_\xi = \delta_\xi \in rca(\gamma X, \mathscr{B}_{\gamma X})$ с носителем в точке ξ. При этом для любого $E \in \mathscr{B}_{\gamma X}$ если $\xi \in E$, то $\tilde{\mu}_\xi(E) = \delta_\xi(E) = 1$. В частности, $\tilde{\mu}_\xi(\gamma(x_0)) = 1$. По определению $\gamma(x_0) = \bigcap t(U(x_0))$, где пересечение берется по всем открытым окрестностям $U(x_0)$ точки x_0 в исходном пространстве (X, τ). Следовательно, для каждой такой окрестности $U(x_0)$ выполняется $\gamma(x_0) \subset t(U(x_0))$ и $\tilde{\mu}_\xi(t(U(x_0))) = \tilde{\mu}_\xi(\gamma(x_0)) = 1$. Мере $\tilde{\mu}_\xi = \delta_\xi$ в $rca(\gamma_{\mathscr{B}}X, \mathscr{B}_{\gamma X})$ соответствует мера $\mu_\xi \in ba(X, \mathscr{B}_X)$, причем для всех $G \in \mathscr{B}_X$ выполняется $\tilde{\mu}_\xi(G) = \tilde{\mu}_\xi(t(G))$. Таким образом, $\mu_\xi(U(x_0)) = \tilde{\mu}_\xi(t(U(x_0))) = 1$, и условие теоремы выполнено, т. е. $\tilde{\mu}_\xi \in m(x_0)$. Поскольку $\xi \in \gamma X \setminus X$, по следствию 3.6 мера μ_ξ чисто конечно-аддитивна.

Проведем обратное рассмотрение. Пусть $\mu \in ba(X, \mathscr{B}_X)$ — двузначная мера такая, что для любой открытой окрестности $U(x_0)$ точки $x_0 \in X$ выполняется $\mu(U(x_0)) = 1$, т. е. $\mu \in m(x_0)$. Если $\mu = \delta_{x_0}$, то по свойствам $\gamma(x_0)$ носитель меры μ — точка $x_0 \in \gamma(x_0)$. Пусть теперь $\mu \neq \delta_{x_0}$. Мере $\mu \in ba(X, \mathscr{B}_X)$ соответствует двузначная счетно аддитивная мера $\tilde{\mu}_\xi = \delta_\xi$ с одноточечным носителем $\{\xi\} \in \mathscr{B}_{\gamma X}$. При этом $\tilde{\mu}_\xi(t(U(x_0))) = \mu(U(x_0)) = 1$. Следовательно, $\xi \in t(U(x_0))$ для всех $U(x_0)$. Отсюда получаем $\xi \in \bigcap t(U(x_0)) = \gamma(x_0)$.

Итак, взаимно однозначное соответствие между множествами $\gamma(x_0)$ и $m(x_0)$ установлено. Обозначим это соответствие символом $h : \gamma(x_0) \to m(x_0)$. Докажем непрерывность h и h^{-1} в соответствующих топологиях.

Вначале рассмотрим $h^{-1} : m(x_0) \to \gamma(x_0)$. Пусть $\xi \in \gamma(x_0)$ и $\mu = h\xi \in m(x_0)$. Пусть $U(\xi)$ — окрестность точки ξ в $(\gamma X, \tau_\gamma)$. Поскольку алгебра открыто-замкнутых множеств $\mathscr{N}_{\gamma X}$ является базой топологии в $(\gamma X, \tau_\gamma)$, то можем взять $U(\xi) \in \mathscr{N}_{\gamma X}$. Тогда существует $E \in \mathscr{B}_X$ такое, что $U(\xi) = t(E)$, $E = t^{-1}(U(\xi))$. Повторяя рассуждения первой половины доказательства, получим, что $\mu(E) = \mu(t^{-1}(U(\xi))) = 1$.

Базой окрестностей точки μ в $*$-слабой топологии в $ba(X, \mathscr{B}_X)$ являются множества вида $V(\mu, \chi_{E_1}, \chi_{E_2}, \dots, \chi_{E_n}, \varepsilon)$. Выберем

$$V(\mu, \chi_E, 1/2) = \{\eta \in ba(X, \mathscr{B}_X) : |\mu(E) - \eta(E)| < 1/2\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} V(\mu, \chi_E, 1/2) \cap m(x_0) = \{\eta \in m(x_0) : |\mu(E) - \eta(E)| < 1/2\} \\ = \{\eta \in m(x_0) : \mu(E) = \eta(E)\}. \end{aligned}$$

Действительно, так как μ и η двузначны, неравенство $|\mu(E) - \eta(E)| < 1/2$ означает равенство $\mu(E) = \eta(E)$.

Пусть $\eta \in V(\mu, \chi_E, 1/2) = V(\mu)$. Поскольку $\mu(E) = 1$, то и $\eta(E) = 1$. При отображении t^{-1} мере η соответствует точка $\xi_\eta \in \gamma(x_0)$, $\xi_\eta = t^{-1}\{\eta\}$. Снова повторяя рассуждения первой половины доказательства, получим, что $\xi_\eta \in U(\xi)$.

Итак, мы получили, что для любой точки $\xi \in \gamma(x_0)$ и для любой ее базовой окрестности $U(x_0)$ существует базовая окрестность $V(\mu)$ для $\mu = h\xi$ такая, что $h^{-1}[V(\mu) \cap m(x_0)] \subset U(x_0) \cap \gamma(x_0)$. Это и означает непрерывность отображения h^{-1} в соответствующих топологиях.

Непрерывность отображения h доказывается по той же схеме, что и для h^{-1}. Теорема доказана.

Пусть X — топологическое пространство и $\mu \in ba(X, \mathscr{B})$. *Регуляризацией* меры μ называется [21] такая мера $\bar{\mu} \in rca(X, \mathscr{A})$, что $\int f d\mu = \int f d\bar{\mu}$ для всех $f \in C(X)$. Если $\eta \in rca(X, \mathscr{A}_X)$, то *классом C-эквивалентных мер $\mathscr{R}(\eta)$* для меры η назовем множество всех таких мер $\mu \in ba(X, \mathscr{B})$, что $\bar{\mu} = \eta$. (Свойства регуляризации мер и классов C-эквивалентных мер изучаются в работе автора [21]).

Теорема 4.2. *Пусть X нормально, $x_0 \in X$ и гамма-расширение $\gamma(x_0)$ точки x_0 рассматривается как множество двузначных мер, т. е. $\gamma(x_0) = m(x_0)$.*

Множество $m(x_0)$ совпадает с множеством всех двузначных мер из множества $\mathscr{R}(\delta_{x_0})$.

Доказательство. Пусть $\mu \in m(x_0)$. Тогда для любой открытой окрестности $U(x_0)$ выполняется $\mu(U(x_0)) = 1$. Для произвольной $f \in C(X)$ верны оценки

$$\inf_{x \in U(x_0)} |f(x)| \leq \left| \int\limits_X f\, d\mu \right| \leq \sup_{x \in U(x_0)} |f(x)|.$$

В силу произвольности $U(x_0)$ из неравенств следует равенство $\int f d\mu = f(x_0)$. Итак, мы показали, что $m(x_0) \subset \mathscr{R}(\delta_{x_0})$.

Пусть теперь $\mu \in \mathscr{R}(\delta_{x_0})$ и μ двузначна. Если $\mu(\{x_0\}) = 1$, то $\mu = \delta_{x_0} \in m(x_0)$. Если $\mu(\{x_0\}) \neq 1$, то $\mu(\{x_0\}) = 0$. Пусть $\mu(\{x_0\}) = 0$, и предположим, что $\mu \notin m(x_0)$. Тогда по теореме 4.1 существует открытая окрестность $U(x_0)$ в X точки x_0 такая, что $\mu(U(x_0)) \neq 1$. Поскольку μ двузначна, то $\mu(U(x_0)) = 0$. Так как X нормально, по теореме Урысона [1, гл. 1.5, теорема 2] существует $f \in C(X)$ такая, что $f(x_0) = 1$ и $f(X \setminus U(x_0)) = 0$.

Отсюда

$$\int f d\mu = \int\limits_{U_{(x_0)}} f d\mu + \int\limits_{X \setminus U_{(x_0)}} f d\mu = 0, \quad \int f d\delta_{x_0} = f(x_0) = 1 \neq 0,$$

т. е. мера δ_{x_0} не является регуляризацией меры μ. Противоречие показывает, что $\mu(U(x_0)) = 1$ для всех $U(x_0)$, т. е. $\mu \in m(x_0)$. Теорема доказана.

Напомним, что

$$\bigcup_{x \in X} \gamma(x) \subset \gamma_{\mathscr{B}} X.$$

Естествен вопрос: когда эти множества совпадают? Частичный ответ дается в следующих теоремах.

Теорема 4.3. *Пусть (X, τ) хаусдорфово. Если X компактно, то $\gamma_{\mathscr{B}} X = \bigcup\limits_{x \in X} \gamma(x)$.*

Доказательство. Пусть X компактно и $x_0 \in \gamma_{\mathscr{B}} X$. Точке x_0 соответствует двузначная конечно-аддитивная мера $\mu_{x_0} \in ba(X, \mathscr{B}_X)$. Возьмем ее регуляризацию $\bar{\mu}_{x_0} \in rba(X, \mathscr{A}_X)$, которая также будет двузначной. Поскольку X — компакт, регулярная мера $\bar{\mu}_{x_0}$ счетно-аддитивна и продолжима на $\mathscr{B}_X$. По теореме 3.4 существует $y_0 \in X$ такая, что $\bar{\mu}_{x_0} = \delta_{y_0}$, где δ_{y_0} — мера Дирака с носителем $\{y_0\}$.

Для любой открытой окрестности $U(y_0) \subset X$ точки y_0 в X выполняется $\delta_{y_0}(U(y_0)) = \bar{\mu}_{x_0}(U(y_0)) = 1$. По теореме 4.1 $\delta_{y_0} = \bar{\mu}_{x_0} \in \gamma(y_0)$. По теореме 4.2 $\mu_{x_0} \in m(y_0)$, т. е., в другой интерпретации, $x_0 \in \gamma(y_0)$.

Итак, для произвольной $x_0 \in \gamma_{\mathscr{B}} X$ существует $y_0 \in X$ такая, что $x_0 \in \gamma(y_0)$. Это и означает выполнение равенства в теореме. При этом если $x_0 \in X \subset \gamma_{\mathscr{B}} X$, то $y_0 = x_0$. Теорема доказана.

Обратить утверждение теоремы 4.3 нам удается только при дополнительном условии.

Теорема 4.4. *Пусть (X, τ) нормально и обладает счетной базой своей топологии (т. е. X — пространство со второй аксиомой счетности). Если $\gamma_{\mathscr{B}} X = \bigcup\limits_{x \in X} \gamma(x)$, то X компактно.*

Доказательство. Для пространств со второй аксиомой счетности совпадают понятия компактности и счетной компактности. Для счетной компактности пространства X необходимо и достаточно, чтобы каждая счетная центрированная система его замкнутых подмножеств имела непустое пересечение [22, гл. II, § 8, теорема 10].

Пусть выполнены условия теоремы, но X не является компактом. Тогда существует последовательность множеств $E_1, E_2, E_3 \dots \subset X$, $E_n = \overline{E}_n$, $n \in \mathbb{N}$, таких, что $\bigcap\limits_{i=1}^{k} E_{n_i} \neq \varnothing$ для любых $n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{N}$, однако при этом $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n = \varnothing$.

Очевидно, можно сразу полагать, что $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \dots$. Всегда можно выбрать двузначную меру $\mu \in ba(X, \mathscr{B}_X)$ такую, что $\mu(E_n) = 1$ при $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, любая такая мера является чисто конечно-аддитивной. По теореме 3.5 $\mu \in m(X, \mathscr{B}) = \gamma_{\mathscr{B}} X = \bigcup\limits_{x \in X} \gamma(x)$. Следовательно, существует $x_\mu \in X$ такая, что $\mu \in \gamma(x_\mu)$. При этом мера Дирака δ_{x_μ} является регуляризацией меры μ, т. е. $\int f d\mu = \int f d\delta_{x_\mu} = f(x_\mu)$ для всех $f \in C(X)$.

Одноточечное множество $\{x_\mu\}$ замкнуто, и

$$\{x_\mu\} \not\subset \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \varnothing.$$

Следовательно, существует номер $m \in \mathbb{N}$ такой, что $x_\mu \notin E_m$, откуда $x_\mu \notin E_n$ при всех $n \geq m$. Согласно теореме Урысона [1, гл. I, 5, теорема 2] существует $f \in C(X)$ такая, что $0 \leq f \leq 1$, $f(E_m) = 0$, $f(x_\mu) = 1$. При интегрировании получим

$$\int\limits_X f d\mu = \int\limits_{E_m} f d\mu = 0, \quad \int\limits_X f d\delta_{x_\mu} = f(x_\mu) = 1, \quad \int\limits_X f d\mu \neq \int\limits_X f d\delta_{x_\mu},$$

т. е. мера δ_{x_μ} не является регуляризацией меры μ. Получили противоречие. Следовательно, X компактно. Теорема доказана.

Теорема 4.5. *Пусть (X, τ) нормально и точка $x_0 \in X$ такая, что $\overline{X \setminus \{x_0\}} = X$. Обозначим через $\mathscr{B}'$ сужение σ-алгебры $\mathscr{B}$ в X на $X \setminus \{x_0\}$, т. е.*

$$\mathscr{B}' = \mathscr{B} \setminus \{x_0\} = \{E \setminus \{x_0\} \colon E \in \mathscr{B}\}.$$

Тогда

$$\gamma_{\mathscr{B}} X = \gamma_{\mathscr{B}'}[X \setminus \{x_0\}] \cup \{x_0\}; \quad \gamma_{\mathscr{B}} X \setminus X = \gamma_{\mathscr{B}'}[X \setminus \{x_0\}] \setminus X;$$
$$\gamma(x_0) \setminus \{x_0\} \subset \gamma_{\mathscr{B}'}[X \setminus \{x_0\}].$$

Другими словами, гамма-нарост $\gamma(x_0) \setminus \{x_0\}$ такой точки появляется в гамма-компактификации $\gamma_{\mathscr{B}}X$ независимо от того, включаем мы x_0 в X или исключаем.

Доказательство. Пусть $x_0 \in X$ и $\overline{X \setminus \{x_0\}} = X$. Последнее условие означает, что $\{x_0\} \subset X$ не является открытым множеством в (X, τ), т. е. не открыто-замкнуто. Рассмотрим семейство открытых окрестностей

$$\mathbf{U} = \{U(x_0) : x_0 \in U(x_0) = (U(x_0))^\circ \subset X\}.$$

Тогда $\{x_0\} \notin U$, т. е. множество $\{x_0\}$ не является окрестностью точки x_0.

В гамма-расширение $\gamma(x_0)$ точки x_0 попадают все двузначные чисто конечно-аддитивные меры μ с условием: $\mu(U(x_0)) = 1$ для всех $U(x_0) \in \mathbf{U}$. При этом $\mu(\{x_0\}) = 0$, иначе μ имела бы ненулевую счетно-аддитивную компоненту.

Так как $\{x_0\} \notin U$, то $U(x_0) \setminus \{x_0\} \neq \varnothing$ при всех $U(x_0) \in \mathbf{U}$ и для $\mu \in \gamma(x_0)$ выполняется $\mu(U(x_0) \setminus \{x_0\}) = \mu(U(x_0)) = 1$. Следовательно, все чисто конечно-аддитивные $\mu \in \gamma(x_0)$ можно считать заданными в $X \setminus \{x_0\}$ на σ-алгебре $\mathscr{B}' = \mathscr{B} \setminus \{x_0\}$, причем различные меры остаются различными и чисто конечно-аддитивными.

В $\gamma(x_0)$ остается только одна мера другого типа — мера Дирака δ_{x_0}, соответствующая точке x_0. Таким образом, $\gamma(x_0) \setminus \{x_0\} \subset \gamma_{\mathscr{B}'}[X \setminus \{x_0\}]$. Поскольку $X \setminus \{x_0\} \subset X$, то $\gamma_{\mathscr{B}'}[X \setminus \{x_0\}] \subset \gamma_{\mathscr{B}}X$.

Очевидно, что все другие двузначные чисто конечно-аддитивные меры $\mu \notin \gamma(x_0)$ останутся такими же и при их сужении в $X \setminus \{x_0\}$ на $\mathscr{B}'$. Учитывая полученные выше включения, делаем вывод, что

$$\gamma_{\mathscr{B}}X \setminus \{x_0\} \subset \gamma_{\mathscr{B}'}[X \setminus \{x_0\}], \quad \gamma_{\mathscr{B}}X = \gamma_{\mathscr{B}'}[X \setminus \{x_0\}] \cup \{x_0\}.$$

Другими словами, $\gamma_{\mathscr{B}}X$ и $\gamma_{\mathscr{B}'}[X \setminus \{x_0\}]$ либо совпадают, либо первое больше второго всего лишь на одну точку $\{x_0\}$.

Остальные равенства и включения в формулировке теоремы следуют из полученных выше. Теорема доказана.

Доказанную теорему можно переформулировать для случая любого конечного множества $M \subset X$ такого, что $\overline{X \setminus M} = X$. Записывать такую формулировку не будем в силу ее громоздкости.

Отметим, что в теореме 4.5 нет ответа на вопрос: будет ли $\gamma_{\mathscr{B}'}[X \setminus \{x_0\}] = \gamma_{\mathscr{B}}X \setminus \{x_0\} \subset \gamma_{\mathscr{B}'}[X \setminus \{x_0\}]$ или $\gamma_{\mathscr{B}'}[X \setminus \{x_0\}] = \gamma_{\mathscr{B}}X$?

Оставляем этот любопытный вопрос открытым.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
2. *Yosida K., Hewitt E.* Finitely additive measures // Trans. Amer. Math. Soc. 1952. V. 72, N 1. P. 46–66.
3. *Alexandroff A. D.* Additive set-functions in abstract spaces. I // Мат. сб. 1940. V. 8, N 2. P. 307–348.
4. *Alexandroff A. D.* Additive set-functions in abstract spaces. II // Мат. сб. 1941. V. 9, N 3. P. 563–628.
5. *Alexandroff A. D.* Additive set-functions in abstract spaces. III // Мат. сб. 1943. V. 13, N 2. P. 169–238.
6. *Жданок А. И.* Эргодические теоремы для негладких марковских процессов. // Топологические пространства и их отображения. Рига: Изд-во ЛатвГУ, 1981. С. 18–33.
7. *Жданок А. И.* Конечно-аддитивные меры в эргодической теории цепей Маркова. I // Мат. труды. 2001. Т. 4, № 2. С. 53–95.

8. *Жданок А. И.* Конечно-аддитивные меры в эргодической теории цепей Маркова. II // Мат. труды. 2002. Т. 5, № 1. С. 46–65.
9. *Bandt C.* On Walman–Shanin-compactification // Math. Nachr. 1977. N 77. P. 333–351.
10. *Жданок А. И., Самданчап Р. Т.* Представление гельфандовской компактификации пространством ультрафильтров и инвариантные меры цепей Маркова // Топологические пространства и их отображения. Рига: ЛатвГУ, 1989. С. 66–80.
11. *Жданок А. И.* Гельфандовская компактификация и двузначные меры // Топологические пространства и их отображения. Рига: ЛатвГУ, 1983. С. 161–164.
12. *Жданок А. И.* Конечно аддитивные меры и метод расширения в эргодической теории // Распределение на функциональных структурах. Киев, 1987. С. 19–37. (Препринт / Институт математики АН СССР; № 87.27)
13. *Наймарк М. А.* Нормированные кольца. М.: Наука, 1968.
14. *Рудин У.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.
15. *Халмош П.* Теория меры. М.: Изд-во иностр. лит., 1953.
16. *Сикорский Р.* Булевы алгебры. М.: Мир, 1969.
17. *Варадарайн В. С.* Меры на топологических пространствах // Мат. сб. 1961. Т. 55, № 1. С. 35–100.
18. *Терпе Ф., Флаксмайер Ю.* О некоторых приложениях теории расширений топологических пространств и теории меры // Успехи мат. наук. 1977. Т. 32, № 5. С. 125–162.
19. *Банах Т. О., Радул Т. Н.* Топология пространств вероятностных мер // Мат. сб. 1997. Т. 188, № 7. С. 23–46.
20. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах, меры на отделимых пространствах. М.: Наука, 1977.
21. *Жданок А. И.* Регуляризация конечно аддитивных мер // Латв. мат. ежегодник. Рига: Зинатне, 1983. Вып. 28. С. 234–248.
22. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981.

Статья поступила 13 марта 2001 г.

Жданок Александр Иванович
Тывинский гос. университет, ул. Ленина 36, Кызыл 667000, Республика Тыва
Zhdanok@tuva.ru