Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2003. Том 44, № 2

УДК 514.7

ГРУППЫ АВТОМОРФИЗМОВ G–СТРУКТУР КОНЕЧНОГО ТИПА НА ОРБИОБРАЗИЯХ

А. В. Багаев, Н. И. Жукова

Аннотация: Доказано, что группа автоморфизмов G-структуры конечного типа и порядка k на гладком n-мерном орбиобразии является группой Ли размерности не более чем $n+\dim(\mathfrak{g}+\mathfrak{g}_1+\dots+\mathfrak{g}_{k-1})$, где $\mathfrak{g}_i$ — i-е продолжение алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G. Эта теорема обобщает соответствующий результат Эресмана для G-структур конечного типа на многообразиях. Показано, что наличие орбифолдных точек резко уменьшает размерность группы автоморфизмов собственных орбиобразий. Получены оценки размерностей групп изометрий и конформных преобразований римановых орбиобразий, имеющих многообразия, образованные орбифолдными точками одного типа.

Ключевые слова: орбиобразие, G-структура на орбиобразии, орбифолдная точка, автоморфизм

Введение

Гладкие орбиобразия можно рассматривать как естественное обобщение гладких многообразий, когда в качестве модельного пространства берется не $\mathbb{R}^n$, а фактор-пространство $\mathbb{R}^n$ по конечной группе диффеоморфизмов Г. При этом группа Г не является фиксированной и может меняться при переходе от одной точки орбиобразия к другой. Изоморфизм координатных окрестностей соответствует эквивариантным действиям одной и той же группы Г на $\mathbb{R}^n$.

В современной теоретической физике орбиобразия, называемые орбифолдами, используются в качестве пространств распространения струн; мотивируется предпочтительность таких моделей над моделями на обычных многообразиях [1, 2].

Орбиобразия возникают в теории слоений в качестве «хороших» пространств слоев. Как показано в [3], существование собственного слоя с конечной группой голономии для трансверсально полного риманова слоения $\mathscr{F}$ является необходимым и достаточным условием для того, чтобы пространство слоев было орбиобразием. Из [4] известно, что это выполняется также в случае замкнутости всех слоев $\mathscr{F}$. Верно и обратное: каждое орбиобразие является пространством слоев некоторого полного риманова слоения с замкнутыми слоями. Известно также, что компактное слоение имеет в качестве пространства слоев орбиобразие тогда и только тогда, когда оно локально стабильно [5, 6].

Развитию глобального анализа на орбиобразиях посвящены работы ряда авторов. В основополагающей работе И. Сатаки [7] интегрирование и теорема Де Рама обобщены на орбиобразия, называемые им V-многообразиями.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 01–01–00590).

У. Л. Байли [8] получил для орбиобразий аналог теоремы об ортогональном разложении в теории гармонических интегралов. И. Гаспарини [9] исследовала ситуацию, когда динамическая система на слоеном многообразии редуцируется к динамической системе на пространстве слоев, являющемся орбиобразием. Изучению локально свободных действий окружности на трехмерных орбиобразиях посвящена статья [10]. А. Хефлигер и Е. Салем в [11] анализируют действия торов на орбиобразиях, возникающие в теории римановых слоений.

Одной из центральных проблем в дифференциальной геометрии является вопрос: когда группа автоморфизмов геометрической структуры может быть наделена структурой группы Ли [12]? В решении этой проблемы для геометрических структур на многообразиях получены следующие, ставшие классическими, результаты. С. В. Майерс и Н. Стинрод [13] доказали, что группа всех изометрий риманова многообразия есть группа Ли. Ш. Кобаяси [14] показал, что группой Ли является группа всех конформных преобразований риманова многообразия. Теорема о том, что группа автоморфизмов G-структуры конечного типа на многообразии допускает структуру группы Ли, принадлежит Ш. Эресману [15].

Мы обобщили упомянутые выше результаты о группах преобразований на орбиобразия.

Основная теорема. *Группа автоморфизмов G-структуры конечного типа и порядка k на гладком n-мерном орбиобразии есть группа Ли размерности самое большое $n + \dim(\mathfrak{g} + \mathfrak{g}_1 + \cdots + \mathfrak{g}_{k-1})$, где $\mathfrak{g}_i$ — i-е продолжение алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G.*

Показано, что пространство расслоения со структурной группой над орбиобразием также является гладким орбиобразием (предложение 2), а G-структура на орбиобразии — слоеным многообразием (теорема 1). Благодаря этому доказательство основной теоремы сведено к известному результату из [16] о том, что любая группа автоморфизмов абсолютного параллелизма на многообразии допускает структуру группы Ли, размерность которой не превосходит размерности многообразия.

Мы говорим, что две точки орбиобразия имеют один орбифолдный тип, если у них существуют изоморфные окрестности. Доказано, что подпространство точек одного орбифолдного типа является гладким многообразием (предложение 1). Установлено, что наличие орбифолдных точек резко уменьшает размерность групп автоморфизмов. Получены оценки размерностей групп изометрий и конформных преобразований римановых орбиобразий, не вырождающихся в многообразия, а также их групп изотропии (теоремы 4, 5 и следствие 2). Кроме того, показано, что группа изометрий компактного риманова орбиобразия компактна.

В этой работе под *гладким C^r-отображением* мы будем понимать дифференцируемое отображение класса C^r, где $r \geq 1$. Если $f : M \to N$ — гладкое отображение многообразий, то через $(f_*)_x$ (соответственно $(f^*)_x$) мы обозначаем дифференциал (соответственно кодифференциал) отображения f в точке $x \in M$.

1. Категория гладких орбиобразий

Термин *орбиобразие* или *орбифолд* (от “orbifold") предложен У. П. Тёрстоном в [17], где он применил двумерные орбиобразия к классификации трехмерных компактных многообразий. Орбиобразие эквивалентно понятию V-многообразия, введенному ранее в [7].

Обозначим через $\mathscr{N}$ связное хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой. Пусть U — открытое подмножество $\mathscr{N}$, Ω — открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$ и Γ — конечная группа C^r-диффеоморфизмов Ω. Пусть $r : \Omega \to \Omega/\Gamma$ — фактор-отображение на пространство орбит, $q : \Omega/\Gamma \to U$ — произвольный гомеоморфизм и $p := q \circ r$. Тогда четверка (U, Ω, Γ, p) называется *картой.* При $U \subset U'$ *инъекцией* карты (U, Ω, Γ, p) в карту $(U', \Omega', \Gamma', p')$ называется пара (ϕ, ψ), где $\phi : \Omega \to \Omega'$ — C^r-вложение, $\psi : \Gamma \to \Gamma'$ — мономорфизм групп, удовлетворяющие следующим равенствам: $p = p' \circ \phi$ и $\phi \circ \gamma = \psi(\gamma) \circ \phi$ для всех $\gamma \in \Gamma$. *Атласом Сатаки* класса C^r называется семейство карт $\mathscr{A} = \{(U_\alpha, \Omega_\alpha, \Gamma_\alpha, p_\alpha), \alpha \in J\}$, для которых выполнены условия:

1) множество $\{U_\alpha, \alpha \in J\}$ образует покрытие $\mathscr{N}$;

2) для любых двух карт $(U_\alpha, \Omega_\alpha, \Gamma_\alpha, p_\alpha)$ и $(U_\beta, \Omega_\beta, \Gamma_\beta, p_\beta)$ из $\mathscr{A}$ таких, что $U_\alpha \subset U_\beta$, существует инъекция.

Максимальный атлас $\mathscr{A}$ класса C^r называется *C^r-структурой дифференцируемого орбиобразия* на $\mathscr{N}$, а пара $(\mathscr{N}, \mathscr{A})$ — *дифференцируемым C^r-орбиобразием.* Любой атлас класса C^r однозначно определяет содержащий его максимальный атлас того же класса. Число n называется *размерностью* орбиобразия $(\mathscr{N}, \mathscr{A})$.

Гладким отображением или *морфизмом* орбиобразия $(\mathscr{N}, \mathscr{A})$ в орбиобразие $(\mathscr{N}', \mathscr{A}')$ называется такое непрерывное отображение $f : \mathscr{N} \to \mathscr{N}'$, что для любой точки $x \in \mathscr{N}$ существуют карты $(U_\alpha, \Omega_\alpha, \Gamma_\alpha, p_\alpha) \in \mathscr{A}$ и $(U_\beta, \Omega_\beta, \Gamma_\beta, p_\beta) \in \mathscr{A}'$ такие, что $x \in U_\alpha$, $f(U_\alpha) \subset U_\beta$, и C^r-отображение $f_{\alpha\beta} : \Omega_\alpha \to \Omega_\beta$, удовлетворяющее равенству $p_\beta \circ f_{\alpha\beta} = f|_{U_\alpha} \circ p_\alpha$. Будем называть $f_{\alpha\beta}$ *представителем отображения* f в картах $(U_\alpha, \Omega_\alpha, \Gamma_\alpha, p_\alpha)$ и $(U_\beta, \Omega_\beta, \Gamma_\beta, p_\beta)$. Подчеркнем, что $f_{\alpha\beta}$ определено с точностью до композиции с элементами из Γ_α и Γ_β. Категорию орбиобразий будем обозначать через $\mathfrak{O}$.

Лемма 1 [18]. *Пусть $\mathscr{N}$ — гладкое n-мерное орбиобразие, x — произвольная точка из $\mathscr{N}$. Тогда существует такая карта (U, Ω, Γ, p), что Ω — открытый шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в начале координат 0, $p(0) = x$ и Γ является подгруппой ортогональных преобразований Ω.*

Карту (U, Ω, Γ, p), удовлетворяющую условиям леммы 1, будем называть *картой в точке x*, а U — *координатной окрестностью точки x.* Далее мы будем работать с атласом, все карты которого удовлетворяют условиям леммы 1. Точка x орбиобразия $\mathscr{N}$ называется *регулярной*, если существует карта $(U, \Omega, \Gamma, p) \in \mathscr{A}$ такая, что $x \in U$ и $\Gamma = \{\mathrm{id}_\Omega\}$. Точка, не являющаяся регулярной, называется *орбифолдной.* Орбиобразие, не вырождающееся в многообразие, назовем *собственным орбиобразием.* Если в точках x и y из $\mathscr{N}$ существуют карты с изоморфными в категории $\mathfrak{O}$ координатными окрестностями, то мы будем говорить, что x и y имеют *один орбифолдный тип.*

Лемма 2. *Пусть $\mathscr{N}$ — гладкое n-мерное орбиобразие. Тогда на подпространстве Δ точек одного орбифолдного типа естественным образом индуцируется структура гладкого многообразия, вообще говоря, несвязного.*

Доказательство. Для каждой точки $x \in \Delta$ и карты (U, Ω, Γ, p) в x группа Γ оставляет неподвижными точки некоторого k-мерного подмногообразия $\Omega_0 \subset \Omega$, содержащего нуль. Не нарушая общности, можно считать, что $\Omega = \mathbb{R}^n$ и $\Omega_0 = \mathbb{R}^k \times 0$. Тогда $p_0 := p|_{\mathbb{R}^k \times 0}$ — гомеоморфизм на образ $U_0 := p_0(\mathbb{R}^k \times 0) \subset \Delta$.

Следовательно, множество Δ с индуцированной топологией становится топологическим многообразием размерности k, вообще говоря, несвязным. Поскольку для любой инъекции $(\phi,\psi) : (U,\Omega,\Gamma,p) \to (U',\Omega',\Gamma',p')$ карт в точках x и y соответственно, $x, y \in \Delta$, ϕ является C^r-вложением, то семейство $\mathscr{A}_0 := \{(U_0,p_0),(U,\Omega,\Gamma,p) \in \mathscr{A}\}$ определяет C^r-структуру дифференцируемого многообразия на Δ. Таким образом, $(\Delta,\mathscr{A}_0)$ — C^r-многообразие размерности k. $\square$

Заметим, что многообразия орбифолдных точек различных типов могут иметь одинаковую размерность. Обозначим через Δ_k объединение многообразий орбифолдных точек размерности k, возможно, $\Delta_k = \varnothing$, а через Δ_n — гладкое n-мерное многообразие регулярных точек. Семейство $\Delta(\mathscr{N}) = \{\Delta_k\}_{k=n,\dots,0}$ назовем *стратификацией орбиобразия* $\mathscr{N}$, а сами Δ_k — *стратами*. Таким образом, имеем

Предложение 1. *Для гладкого n-мерного орбиобразия $\mathscr{N}$ существует стратификация $\Delta(\mathscr{N}) = \{\Delta_k\}_{k=n,\dots,0}$, где Δ_k — гладкое k-мерное многообразие, вообще говоря, несвязное, причем страта Δ_n представляет собой связное открытое всюду плотное подмножество $\mathscr{N}$.*

Примеры. 1. Любое гладкое C^r-многообразие является орбиобразием того же класса гладкости.

2. Пусть Γ — конечная группа диффеоморфизмов гладкого многообразия M размерности n. Тогда фактор-пространство M/Γ наделяется структурой гладкого n-мерного орбиобразия. Такие орбиобразия называются *элементарными*.

3. Пусть задано гладкое действие компактной группы Ли H на многообразии M, все стационарные подгруппы которого дискретны. Тогда пространство орбит M/H является гладким орбиобразием.

2. Расслоение со структурной группой над орбиобразием

Пусть $(\mathscr{N},\mathscr{A})$ и $(\mathscr{P},\mathscr{B})$ — два гладких орбиобразия размерности n и m соответственно. Гладкое отображение $\pi : \mathscr{P} \to \mathscr{N}$ будем называть *субмерсией*, если для карт $(U_\alpha,\Omega_\alpha,\Gamma_\alpha,p_\alpha) \in \mathscr{A}$ и $(U_\beta,\Omega_\beta,\Gamma_\beta,p_\beta) \in \mathscr{B}$ таких, что $\pi(U_\beta) \subset U_\alpha$, любой представитель $\pi_{\beta\alpha} : \Omega_\beta \to \Omega_\alpha$ является субмерсией многообразия Ω_β в многообразие Ω_α. *Гладкое расслоение орбиобразий* — это тройка $(\mathscr{P},\pi,\mathscr{N})$, где $\pi : \mathscr{P} \to \mathscr{N}$ — субмерсия орбиобразия $\mathscr{P}$ на орбиобразие $\mathscr{N}$. Прообраз $\pi^{-1}(x)$ точки $x \in \mathscr{N}$ называется *слоем*, π — *проекцией*, $\mathscr{P}$ — *пространством расслоения*. Далее мы не будем отличать расслоение от его пространства расслоения.

Пусть F — гладкое многообразие, H — группа Ли. Говорят [8], что над орбиобразием $\mathscr{N}$ определено *расслоение со стандартным слоем F и структурной группой H*, если

1) для каждой карты $(U,\Omega,\Gamma,p) \in \mathscr{A}$ заданы:

(a) расслоение $\pi_\Omega : \mathscr{P}_\Omega \to \Omega$ со стандартным слоем F и структурной группой H;

(б) антиизоморфизм h_Ω группы Γ в группу автоморфизмов указанного расслоения со структурной группой H, удовлетворяющий равенству $\gamma^{-1} \circ \pi_\Omega = \pi_\Omega \circ h_\Omega(\gamma)$ для всех $\gamma \in \Gamma$;

2) для инъекции (ϕ,ψ) карты (U,Ω,Γ,p) в карту (U',Ω',Γ',p') определен гомоморфизм $\bar{\phi} : \mathscr{P}_{\Omega'}|_{\phi(\Omega)} \to \mathscr{P}_\Omega$ расслоений со структурной группой H, удовлетворяющий условиям:

(а) $h_{\Omega}(\gamma)\circ\bar{\phi}=\bar{\phi}\circ h_{\Omega'}(\psi(\gamma))$ для всех $\gamma\in\Gamma$;

(б) если $U\subset U'\subset U''$ и $(\phi,\psi):(U,\Omega,\Gamma,p)\to(U',\Omega',\Gamma',p')$ и $(\phi',\psi'):(U',\Omega',\Gamma',p')\to(U'',\Omega'',\Gamma'',p'')$ — инъекции, то $(\overline{\phi'\circ\phi})=\bar{\phi}\circ\bar{\phi}'$.

Так как мы предположили, что каждая координатная окрестность U стягиваема, то расслоения $(\mathscr{P}_{\Omega},\pi_{\Omega},\Omega)$ тривиальны, т. е. $\mathscr{P}_{\Omega}=\Omega\times F$ и π_{Ω} — каноническая проекция на первый сомножитель.

Интерпретируем данное определение расслоения на языке орбиобразий. Для каждой карты $(U,\Omega,\Gamma,p)\in\mathscr{A}$ антиизоморфизм h_{Ω} определяет гладкое действие группы Γ на пространстве расслоения $\mathscr{P}_{\Omega}$. Поскольку группа Γ конечна, то фактор-пространство $\mathscr{P}_{\Omega}/\Gamma$ является гладким орбиобразием размерности $\dim\mathscr{N}+\dim F$. Обозначим через $\overline{\mathscr{P}}$ дизъюнктное объединение $\mathscr{P}_{\Omega}/\Gamma$ по всем картам $(U,\Omega,\Gamma,p)\in\mathscr{A}$. Введем на множестве $\overline{\mathscr{P}}$ отношение эквивалентности. Пусть $U\subset U'$ и $(\phi,\psi):(U,\Omega,\Gamma,p)\to(U',\Omega',\Gamma',p')$ — инъекция. Тогда расслоенное отображение $\bar{\phi}:\mathscr{P}_{\Omega'}|_{\phi(\Omega)}\to\mathscr{P}_{\Omega}$ в силу условия 2(а) индуцирует изоморфизм $\tilde{\phi}:(\mathscr{P}_{\Omega'}|_{\phi(\Omega)})/\psi(\Gamma)\to\mathscr{P}_{\Omega}/\Gamma$ орбиобразий. Точки $x\in\mathscr{P}_{\Omega}/\Gamma$ и $x'\in\mathscr{P}_{\Omega'}/\Gamma'$ будем считать σ-эквивалентными, если $x=\tilde{\phi}(x')$. Условие транзитивности введенного отношения σ на $\overline{\mathscr{P}}$ обеспечивается условием 2(б). На фактор-пространство $\mathscr{P}=\overline{\mathscr{P}}/\sigma$ переносится C^r-структура дифференцируемого орбиобразия. Проекции $\pi_{\Omega}:\mathscr{P}_{\Omega}\to\Omega$ определяют гладкое отображение орбиобразий $\pi:\mathscr{P}\to\mathscr{N}$, являющееся субмерсией.

Предложение 2. *Если задано расслоение со стандартным слоем F и структурной группой H над орбиобразием $\mathscr{N}$, то естественным образом определяются гладкое орбиобразие $\mathscr{P}$ размерности* $\dim\mathscr{N}+\dim F$ *и субмерсия орбиобразий $\pi:\mathscr{P}\to\mathscr{N}$.*

Замечание. На орбиобразия распространяются понятия дифференциальной формы, римановой метрики, дифференциала и кодифференциала гладкого отображения [7, 8].

3. G-структуры на орбиобразии

Расслоение $\mathscr{P}$ со стандартным слоем F и структурной группой H над орбиобразием $\mathscr{N}$ будем называть *главным*, если $F=H$ и группа H действует на слое F левыми сдвигами. Пусть G — подгруппа Ли группы Ли H и $\mathscr{P}$ — главное расслоение над $\mathscr{N}$ со структурной группой G. Если для каждой карты $(U,\Omega,\Gamma,p)\in\mathscr{A}$ структурная группа H расслоения $\mathscr{P}_{\Omega}$ над Ω редуцируема к подгруппе G и $\mathscr{R}_{\Omega}$— редуцированное расслоение, причем выполнены условия

1) $h_{\Omega}(\gamma)(\mathscr{R}_{\Omega})=\mathscr{R}_{\Omega}$,

2)$\bar{\phi}(\mathscr{R}_{\Omega'}|_{\phi(\Omega)})=\mathscr{R}_{\Omega}$,

то главное расслоение $\mathscr{R}$ над $\mathscr{N}$ со структурной группой G будем называть *редуцированным расслоением.* В этом случае мы говорим, что *структурная группа H расслоения $\mathscr{P}$ редуцируема к G.*

Пусть $(U,\Omega,\Gamma,p)\in\mathscr{A}$ — карта гладкого n-мерного орбиобразия $\mathscr{N}$. Напомним, что *линейным репером в точке* $x\in\Omega$ называется изоморфизм векторных пространств $z:\mathbb{R}^n\to T_x\Omega$, где $T_x\Omega$ — касательное пространство к Ω в точке x. Обозначим через $\mathscr{P}_{\Omega}$ главное $GL(n,\mathbb{R})$-расслоение линейных реперов над Ω (см. [19]). Зададим антиизоморфизм h_{Ω} формулой $h_{\Omega}(\gamma)(z):=(\gamma^{-1})_{*_x}\circ z$, где $\gamma\in\Gamma$, z — линейный репер в точке $x\in\Omega$. Для краткости мы будем писать $\gamma^{-1}\circ z$ вместо $(\gamma^{-1})_{*_x}\circ z$. Если $U\subset U'$ и ϕ — любая инъекция карты (U,Ω,Γ,p) в карту (U',Ω',Γ',p'), то определим отображение $\bar{\phi}:\mathscr{P}_{\Omega'}|_{\phi(\Omega)}\to\mathscr{P}_{\Omega}$ равенством

$\bar{\phi}(z) := (\phi^{-1})_{*_x} \circ z$ для линейного репера z в точке $x \in \phi(\Omega)$. Построенные таким образом h_Ω и $\bar{\phi}$ определяют главное расслоение со структурной группой $GL(n,\mathbb{R})$, которое мы будем называть *расслоением линейных реперов* над орбиобразием $\mathscr{N}$.

Если структурная группа $GL(n,\mathbb{R})$ расслоения линейных реперов над $\mathscr{N}$ редуцируема к подгруппе Ли G, то редуцированное главное расслоение $\mathscr{R}$ будем называть *G-структурой на орбиобразии $\mathscr{N}$*.

Отождествив $\mathscr{P}_\Omega$ с $\Omega \times GL(n,\mathbb{R})$ для карты $(U,\Omega,\Gamma,p) \in \mathscr{A}$, линейный репер z в точке $x \in \Omega$ можно рассматривать как пару (x,g), $g \in GL(n,\mathbb{R})$. При этом антиизоморфизм h_Ω можно записать следующим образом: $h_\Omega(\gamma)(x,g) := (\gamma^{-1}x, \gamma^{-1}g)$, где $\gamma \in \Gamma$. Тогда условие 1 редуцируемости группы $GL(n,\mathbb{R})$ к подгруппе Ли G примет вид $\Gamma \circ G \subset G$. Отсюда вытекает

Предложение 3. *Если гладкое орбиобразие $\mathscr{N}$ допускает G-структуру, то для любой карты $(U,\Omega,\Gamma,p) \in \mathscr{A}$ группа Γ является подгруппой группы G.*

Следствие 1. *Гладкое орбиобразие $\mathscr{N}$, допускающее e-структуру, является многообразием.*

Теорема 1. *Пусть на гладком n-мерном орбиобразии $\mathscr{N}$ задана G-структура $\mathscr{R}$. Тогда $\mathscr{R}$ является гладким многообразием размерности $n + \dim G$, а компоненты связности слоев расслоения $(\mathscr{R},\pi,\mathscr{N})$ образуют гладкое слоение $\mathscr{F}$ коразмерности n, причем группа голономии слоя $L \subset \pi^{-1}(x)$ изоморфна группе Γ, где (U,Ω,Γ,p) — карта в точке x.*

Доказательство. Для каждой карты $(U,\Omega,\Gamma,p) \in \mathscr{A}$ группа Γ конечна и согласно предложению 3 $\Gamma \subset G$. Следовательно, Γ действует посредством h_Ω на $\mathscr{R}_\Omega = \Omega \times G$ свободно. Поэтому пространство орбит $\mathscr{R}_\Omega/\Gamma$ является гладким многообразием, а фактор-отображение $\bar{p} : \mathscr{R}_\Omega \to \mathscr{R}_\Omega/\Gamma$ — гладким регулярным накрытием с группой накрывающих преобразований, изоморфной группе Γ. Тогда отображения $\tilde{\phi}$, определенные в доказательстве предложения 2, становятся C^r-диффеоморфизмами, а пространство расслоения $\mathscr{R}$ — гладким многообразием размерности $n + \dim G$. Поскольку отображения $h_\Omega(\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$, и $\bar{\phi}$ являются расслоенными, то слои расслоений $(\mathscr{R}_\Omega, \pi_\Omega, \Omega)$ индуцируют на $\mathscr{R}$ гладкое слоение $\mathscr{F}$ коразмерности n, слоями которого являются компоненты связности слоев расслоения $(\mathscr{R},\pi,\mathscr{N})$. Заметим, что для каждой точки $x \in \mathscr{N}$ и любой карты (U,Ω,Γ,p) в x слой $\pi_\Omega^{-1}(0)$ инвариантен относительно действия Γ на $\mathscr{R}_\Omega$. Отсюда благодаря конечности Γ следует, что ростковая группа голономии слоя $L \subset \pi^{-1}(x)$ изоморфна группе Γ. $\square$

Замечание. Если $\mathscr{N}$ является многообразием, то $\mathscr{R}$ является G-структурой на многообразии в общепринятом смысле [12].

Пусть $\mathscr{R}$ — G-структура на гладком n-мерном орбиобразии $\mathscr{N}$. Пусть $g \in G$, $\bar{z} \in \pi^{-1}(x)$, $x \in \mathscr{N}$. Для любой карты (U,Ω,Γ,p) в точке x через $\bar{p} : \mathscr{R}_\Omega \to \mathscr{R}_\Omega/\Gamma \subset \mathscr{R}$ по-прежнему обозначаем фактор-отображение. Пусть z — линейный репер в $0 \in \Omega$ такой, что $\bar{p}(z) = \bar{z}$. Проверкой убеждаемся, что отображение $\mathscr{R} \times G \to \mathscr{R} : (\bar{z}, g) \mapsto \bar{p}(zg)$ корректно определяет гладкое действие группы G на $\mathscr{R}$. Группа G действует вдоль слоев слоения $\mathscr{F}$. Имеет место

Предложение 4. *Группа G действует на $\mathscr{R}$ свободно тогда и только тогда, когда орбиобразие $\mathscr{N}$ является многообразием.*

Обозначим через $\mathscr{V}$ гладкое распределение на $\mathscr{R}$, касательное к слоению $\mathscr{F}$, а через $\mathfrak{g}$ — алгебру Ли группы Ли G. Пусть $X \in \mathfrak{g}$, x_t — глобальная однопараметрическая группа преобразований в G, соответствующая X. Тогда элемент X порождает векторное поле X^* на $\mathscr{R}_\Omega$ по формуле $X^*_z := \frac{d}{dt}(zx_t)|_{t=0}$, $z \in \mathscr{R}_\Omega$. Векторное поле X^* называется *фундаментальным векторным полем, соответствующим* X. Поскольку $\bar{p} : \mathscr{R}_\Omega \to \mathscr{R}_\Omega/\Gamma \subset \mathscr{R}$ — гладкое накрытие с группой накрывающих преобразований Γ и, как показывает равенство $h_\Omega(\gamma)_*(X^*_z) = X^*_{h_\Omega(\gamma)z}$, $z \in \mathscr{R}_\Omega$, $\gamma \in \Gamma$, фундаментальное векторное поле X^* инвариантно относительно действия группы Γ на $\mathscr{R}_\Omega$, то на фактор-многообразии $\mathscr{R}_\Omega/\Gamma$ векторное поле X^* однозначно индуцирует векторное поле $\overline{X}^*$. Равенство $(\bar{\phi})_*(X^*_z) = X^*_{\phi(z)}$, $z \in \mathscr{R}_{\phi(\Omega)}$, обеспечивает корректность определения $\overline{X}^*$ на всем $\mathscr{R}$. Таким образом, элемент $X \in \mathfrak{g}$ индуцирует векторное поле $\overline{X}^*$ на $\mathscr{R}$, которое мы будем также называть *фундаментальным векторным полем, соответствующим* X. Векторное поле $\overline{X}^*$ является касательным к слоению $\mathscr{F}$.

Связностью в $\mathscr{R}$ мы будем называть гладкое n-мерное распределение $\mathscr{H}$ на $\mathscr{R}$, удовлетворяющее равенствам $\mathscr{H}_{\bar{z}} \oplus \mathscr{V}_{\bar{z}} = T_{\bar{z}}\mathscr{R}$, $(R_g)_*(\mathscr{H}_{\bar{z}}) = \mathscr{H}_{\bar{z}g}$ для всех $g \in G$, $\bar{z} \in \mathscr{R}$, где $R_g : \bar{z} \mapsto \bar{z}g$. Любой вектор $\overline{X}_{\bar{z}} \in T_{\bar{z}}\mathscr{R}$ может быть единственным образом представлен в виде $\overline{X}_{\bar{z}} = H\overline{X}_{\bar{z}} + V\overline{X}_{\bar{z}}$, где $H\overline{X}_{\bar{z}} \in \mathscr{H}_{\bar{z}}$, $V\overline{X}_{\bar{z}} \in \mathscr{V}_{\bar{z}}$. Будем называть $H\overline{X}_{\bar{z}}$ (соответственно $V\overline{X}_{\bar{z}}$) *горизонтальной* (соответственно *вертикальной*) компонентой вектора $\overline{X}_{\bar{z}}$. Заметим что, распределение $\mathscr{H}$ является связностью Эресмана для слоения $(\mathscr{R}, \mathscr{F})$ в смысле Р. А. Блюменталя и Д. Д. Хебды [20, 21].

Определим 1-форму ω на $\mathscr{R}$ со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G следующим образом. Как показано ранее, каждый элемент $X \in \mathfrak{g}$ порождает фундаментальное векторное поле $\overline{X}^*$ на $\mathscr{R}$, причем отображение $\mathfrak{g} \to \mathscr{V}_{\bar{z}} : X \mapsto \overline{X}^*_{\bar{z}}$ является изоморфизмом векторных пространств. Для произвольного вектора $\overline{X}_{\bar{z}} \in T_{\bar{z}}\mathscr{R}$ определим $\omega(\overline{X}_{\bar{z}})$ как единственный элемент $X \in \mathfrak{g}$ такой, что $\overline{X}^*_{\bar{z}}$ равно вертикальной компоненте для $\overline{X}_{\bar{z}}$. Из определения видим, что $\omega(\overline{X}_{\bar{z}}) = 0$ тогда и только тогда, когда $\overline{X}_{\bar{z}} \in \mathscr{H}_{\bar{z}}$. Форма ω называется *формой связности* для $\mathscr{H}$. По аналогии с расслоениями над многообразиями (см. [19]) доказаны следующие утверждения.

Предложение 5. *Форма связности ω удовлетворяет условиям $\omega(\overline{X}^*) = X$ и $(R_g)^*\omega = Ad(g^{-1})\omega$ для любого $X \in \mathfrak{g}$, $g \in G$, где Ad означает присоединенное представление G в $\mathfrak{g}$. Обратно, если задана $\mathfrak{g}$-значная 1-форма ω на $\mathscr{R}$, удовлетворяющая указанным условиям, то существует единственная связность $\mathscr{H}$ на $\mathscr{R}$, форма связности которой есть ω.*

Канонической формой θ на $\mathscr{R}$ будем называть $\mathbb{R}^n$-значную 1-форму, определяемую следующим образом. Для любого $\overline{X}_{\bar{z}} \in T_{\bar{z}}\mathscr{R}$ и любой карты (U, Ω, Γ, p) в точке $\pi(\bar{z}) \in \mathscr{N}$ пусть $X_z \in T_z\mathscr{R}_\Omega$ такой, что $\bar{p}_*(X_z) = \overline{X}_{\bar{z}}$. Тогда положим по определению $\theta(\overline{X}_{\bar{z}}) := z^{-1}(\pi_\Omega)_*(X_z)$. Легко проверить независимость значения θ от выбора карты (U, Ω, Γ, p) и точки $z \in \mathscr{R}_\Omega$. *Формой кручения* Σ называется внешний ковариантный дифференциал канонической формы θ.

Предложение 6. *Каноническая форма θ обладает свойствами:*

(1) *если* $\overline{X}_{\bar{z}} \in \mathscr{V}_{\bar{z}}$, *то* $\theta(\overline{X}_{\bar{z}}) = 0$;

(2) $(R_g)^*\theta = g^{-1}\theta,\ g \in G$;

(3) $\Sigma = d\theta + \omega \wedge \theta$.

4. Продолжение G-структур

Пусть V обозначает n-мерное векторное пространство $\mathbb{R}^n$, а $\mathfrak{g}$ — произвольную подалгебру Ли алгебры $gl(n,\mathbb{R})$. Для любого $k = 0, 1, \dots$ через $\mathfrak{g}_k$ обозначим множество симметричных полилинейных отображений

$$t : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{(k+1)\ \text{раз}} \to V,$$

которые при любых фиксированных векторах $v_1, \dots, v_k$ из V определяют элемент из $\mathfrak{g}$, т. е. отображение $t(\cdot, v_1, \dots, v_k) : V \to V : v \mapsto (v, v_1, \dots, v_k)$ принадлежит $\mathfrak{g}$. Множество $\mathfrak{g}_k$ с поточечно определенными операциями сложения и умножения на число является линейным пространством. Скобка Ли в $\mathfrak{g}_k$ определяется равенством $[t, s]_k := t \circ s - s \circ t$. Алгебра Ли $\mathfrak{g}_k$ называется *k-м продолжением алгебры Ли $\mathfrak{g}$*. *Порядком алгебры* $\mathfrak{g}$ называется такое наименьшее число k, что $\mathfrak{g}_k = 0$. При этом $\mathfrak{g}_{k+l} = 0$ для любого $l \in \mathbb{N}$. Если $\mathfrak{g}_k \neq 0$ при любом $k = 0, 1, \dots$, то $\mathfrak{g}$ называется *алгеброй бесконечного типа*.

Пусть G — произвольная подгруппа Ли группы $GL(n,\mathbb{R})$, $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G, $\mathfrak{g}_k$ — ее k-е продолжение. *Первым продолжением* G_1 группы G называется множество преобразований $\bar{t}$ векторного пространства $V + \mathfrak{g}$, определяемых элементами $t \in \mathfrak{g}_1$ по следующим формулам:

$$\bar{t}(v) := v + t(\cdot, v), \quad \bar{t}(x) := x$$

для $v \in V$, $x \in \mathfrak{g}$.

Определим по индукции *k-е продолжение G_k группы* G, т. е. G_k является первым продолжением группы G_{k-1}. Это означает, что группа G_k образована преобразованиями $\bar{t}$ векторного пространства $V + \mathfrak{g} + \mathfrak{g}_1 + \cdots + \mathfrak{g}_{k-1}$, индуцированными элементами $t \in \mathfrak{g}_k$ по формулам

$$\bar{t}(v) := v + t(\cdot, \dots, \cdot, v), \quad \bar{t}(x) := x,$$

где $v \in V$, $x \in \mathfrak{g} + \cdots + \mathfrak{g}_{k-1}$, $t(\cdot, \dots, v) \in \mathfrak{g}_{k-1}$.

Пусть V^* — пространство, дуальное к V. Тогда $V \otimes \bigwedge^2 V^*$ можно рассматривать как пространство всех кососимметричных билинейных отображений из $V \times V$ в V, а $\mathfrak{g} \otimes V^*$ — как пространство линейных отображений из V в $\mathfrak{g}$. Зададим линейное отображение $\nu : \mathfrak{g} \otimes V^* \to V \otimes \bigwedge^2 V^*$ формулой $(\nu f)(v_1, v_2) := f(v_1)v_2 - f(v_2)v_1$ для $f \in \mathfrak{g} \otimes V^*$, $v_1, v_2 \in V$. Из определения ν следует, что f лежит в ядре $\ker \nu$ тогда и только тогда, когда отображение $V \times V \to V : (v_1, v_2) \mapsto f(v_1)v_2$ принадлежит первому продолжению $\mathfrak{g}_1$.

Зафиксируем произвольным образом векторное подпространство C из $V \otimes \bigwedge^2 V^*$, дополнительное к $\nu(\mathfrak{g} \otimes V^*)$, т. е. удовлетворяющее равенству $V \otimes \bigwedge^2 V^* = \nu(\mathfrak{g} \otimes V^*) \oplus C$.

Пусть $\mathscr{R}$ — G-структура на гладком n-мерном орбиобразии $\mathscr{N}$. Пусть $\bar{z} \in \mathscr{R}$ и $H_{\bar{z}}$ — n-мерное подпространство из $T_{\bar{z}}\mathscr{R}$, дополнительное к $\mathscr{V}_{\bar{z}}$. Будем называть $H_{\bar{z}}$ *горизонтальным подпространством в точке* $\bar{z} \in \mathscr{R}$. Тогда отображение $\theta|_{H_{\bar{z}}} : H_{\bar{z}} \to V$ является изоморфизмом векторных пространств. В силу этого сужение внешней производной $d\theta$ на $H_{\bar{z}} \times H_{\bar{z}}$ определяет кососимметричное билинейное отображение $V \times V \to V$, т. е. элемент $c(\bar{z}, H_{\bar{z}}) \in V \otimes \bigwedge^2 V^*$. Если $H'_{\bar{z}}$ — другое горизонтальное подпространство в $\bar{z}$, то, используя соотношение (3) предложения 6, нетрудно проверить, что разность $c(\bar{z}, H'_{\bar{z}}) - c(\bar{z}, H_{\bar{z}})$ принадлежит $\nu(\mathfrak{g} \otimes V^*)$.

Горизонтальное подпространство $H_{\bar z}$ из $T_{\bar z}\mathscr{R}$ определяет линейный репер в точке $\bar z \in \mathscr{R}$. Действительно, как отмечено раньше, форма ω задает изоморфизм $\mathfrak{g}$ на вертикальное пространство $\mathscr{V}_{\bar z}$, а каноническая форма θ — изоморфизм V на $H_{\bar z}$. Таким образом, определен изоморфизм векторного пространства $V + \mathfrak{g}$ на касательное пространство $T_{\bar z}\mathscr{R} = \mathscr{H}_{\bar z} \oplus \mathscr{V}_{\bar z}$, который называется линейным репером в точке $\bar z$, определяемым подпространством $H_{\bar z}$. Обозначим через $\mathscr{R}^1$ множество линейных реперов на $\mathscr{R}$, соответствующих горизонтальным подпространствам $H_{\bar z}, \bar z \in \mathscr{R}$, таким, что $c(\bar z, H_{\bar z}) \in C$. Имеет место

Предложение 7. *Множество $\mathscr{R}^1$ является G_1-структурой на $\mathscr{R}$, где G_1 — первое продолжение группы G.*

Индуктивно определяется *k-е продолжение* $\mathscr{R}^k$ G-структуры $\mathscr{R}$ как первое продолжение G_{k-1}-структуры $\mathscr{R}^{k-1}$, т. е. $\mathscr{R}^k = (\mathscr{R}^{k-1})^1$.

Говорят, что G-структура $\mathscr{R}$ на орбиобразии $\mathscr{N}$ имеет *конечный тип и порядок k*, если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G имеет порядок k. В этом случае $G_k = \{e\}$ и G_k-структура $\mathscr{R}^k$ является e-структурой, которая определяет на многообразии $\mathscr{R}^{k-1}$ абсолютный параллелизм. В противном случае G-структура $\mathscr{R}$ называется *G-структурой бесконечного порядка.*

5. Автоморфизмы G-структур

Пусть $\mathscr{R}$ — G-структура на гладком n-мерном орбиобразии $\mathscr{N}$. Автоморфизм f гладкого орбиобразия $\mathscr{N}$ называется *автоморфизмом G-структуры* $\mathscr{R}$, если для произвольных карт (U, Ω, Γ, p) и $(U', \Omega', \Gamma', p')$ орбиобразия $\mathscr{N}$ таких, что $f(U) \subset U'$, каждый представитель $\bar f : \Omega \to \Omega'$ удовлетворяет условию: для любого линейного репера $z \in \mathscr{R}_\Omega$ в точке $x \in \Omega$ линейный репер $(\bar f_*)_x \circ z : \mathbb{R}^n \to T_{\bar f(x)}\Omega'$ в точке $\bar f(x)$ принадлежит $\mathscr{R}_{\Omega'}$. Обозначим группу автоморфизмов G-структуры $\mathscr{R}$ через $\mathfrak{A}$.

Под автоморфизмом слоения мы понимаем диффеоморфизм слоеного многообразия, переводящий слои в слои. Пусть $f \in \mathfrak{A}$. Если $\bar z \in \mathscr{R}$, (U, Ω, Γ, p) и $(U', \Omega', \Gamma', p')$ — карты в точках $\pi(\bar z)$ и $f \circ \pi(\bar z)$ соответственно, а z — репер в $0 \in \Omega$ такой, что $\bar p(z) = \bar z$, то соответствие $\bar z \mapsto \bar p'(\bar f_{*0}(z))$, где $\bar p' : \mathscr{R}_{\Omega'} \to \mathscr{R}_{\Omega'}/\Gamma'$ — фактор-отображение, корректно определяет автоморфизм $\hat f$ слоения $(\mathscr{R}, \mathscr{F})$.

Предложение 8. *Для каждого автоморфизма f G-структуры $\mathscr{R}$ индуцированный автоморфизм $\hat f$ слоения $(\mathscr{R}, \mathscr{F})$ оставляет каноническую форму θ инвариантной. Обратно, каждый автоморфизм h слоения $(\mathscr{R}, \mathscr{F})$, оставляющий каноническую форму θ инвариантной, индуцируется автоморфизмом f G-структуры $\mathscr{R}$.*

Доказательство. Пусть f — автоморфизм G-структуры $\mathscr{R}$, $\bar z \in \mathscr{R}$, (U, Ω, Γ, p), $(U', \Omega', \Gamma', p')$ — карты в точках $\pi(\bar z)$ и $(f \circ \pi)(\bar z)$ соответственно. Тогда $\bar f_*$, где $\bar f : \Omega \to \Omega'$ — представитель f, является морфизмом расслоений $\mathscr{R}_\Omega \to \mathscr{R}_{\Omega'}$. Следовательно,

$$\theta(\hat f_* \overline{X}_{\bar z}) = (\bar f(z))^{-1} (\pi_{\Omega'})_* \bar f_*(X_z) = (\bar f_* \circ z)^{-1} \bar f_* \circ (\pi_\Omega)_*(X_z) = z^{-1} \circ \pi_\Omega(X_z) = \theta(\overline{X}_{\bar z}),$$

что доказывает инвариантность формы θ относительно автоморфизма f расслоения $\mathscr{R}$. Обратно, пусть h — автоморфизм слоения $(\mathscr{R}, \mathscr{F})$, оставляющий форму θ инвариантной. Обозначим через f автоморфизм орбиобразия $\mathscr{N}$, индуцированный h. Покажем, что $h = \hat f$. Положим $g := \hat f^{-1} \circ h$. Тогда g — автоморфизм слоения $(\mathscr{R}, \mathscr{F})$, оставляющий форму θ инвариантной. Поэтому

g индуцирует тождественный автоморфизм орбиобразия $\mathscr{N}$. Используя это, нетрудно показать, что $g(\bar{z}) = \bar{z}$ для любого $\bar{z} \in \mathscr{R}$, следовательно, $\hat{f} = h$. $\square$

Применяя предложение 8, получаем

Предложение 9. *Если f — автоморфизм G-структуры $\mathscr{R}$, то индуцированное отображение $\hat{f} : \mathscr{R} \to \mathscr{R}$ является автоморфизмом G_1-структуры $\mathscr{R}^1$ на $\mathscr{R}$.*

Таким образом, автоморфизм f G-структуры $\mathscr{R}$ на орбиобразии $\mathscr{N}$ определяет последовательность $(f, \hat{f}, \hat{f}_1, \dots)$ автоморфизмов $\hat{f}_i : \mathscr{R}^i \to \mathscr{R}^i$, которая в случае G-структуры $\mathscr{R}$ конечного типа и порядка k обрывается на k-м шаге и имеет вид $(f, \hat{f}, \hat{f}_1, \dots, \hat{f}_k)$. Эта последовательность называется *башней автоморфизма* f.

Теорема 2. *Группа автоморфизмов $\mathfrak{A}$ G-структуры конечного типа и порядка k на гладком n-мерном орбиобразии $\mathscr{N}$ допускает структуру группы Ли, причем $\dim \mathfrak{A} \le n + \dim(\mathfrak{g} + \mathfrak{g}_1 + \dots + \mathfrak{g}_{k-1})$, где $\mathfrak{g}_i$ — i-е продолжение алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G.*

Доказательство. Каждый автоморфизм f G-структуры $\mathscr{R}$ на орбиобразии $\mathscr{N}$ индуцирует автоморфизм $\hat{f}_{k-1} : \mathscr{R}^{k-1} \to \mathscr{R}^{k-1}$ G_k-структуры $\mathscr{R}^k$, которая является e-структурой на $\mathscr{R}^{k-1}$. Таким образом, задан изоморфизм $\rho : f \mapsto \hat{f}_{k-1}$ группы $\mathfrak{A}$ на некоторую группу автоморфизмов K e-структуры на $\mathscr{R}^{k-1}$. По теореме Кобаяси [16] для произвольного фиксированного элемента $u \in \mathscr{R}^{k-1}$ отображение $\hat{f}_{k-1} \mapsto \hat{f}_{k-1}(u)$ инъективно, а его образ $\{\hat{f}_{k-1}(u) : \hat{f}_{k-1} \in K\}$ является замкнутым подмногообразием в $\mathscr{R}^{k-1}$. Структура подмногообразия на этом образе превращает K в группу Ли. Посредством ρ^{-1} группа $\mathfrak{A}$ также превращается в группу Ли преобразований, причем $\dim \mathfrak{A} = \dim K \le \dim \mathscr{R}^{k-1} = n + \dim(\mathfrak{g} + \mathfrak{g}_1 + \dots + \mathfrak{g}_{k-1})$. $\square$

Теорема 3. *Размерность группы автоморфизмов G-структуры конечного типа и порядка k на гладком орбиобразии, имеющем хотя бы одну изолированную орбифолдную точку, не более чем $\dim(\mathfrak{g} + \mathfrak{g}_1 + \dots + \mathfrak{g}_{k-1})$.*

Доказательство. Поскольку орбиобразие $\mathscr{N}$ имеет счетную базу, а любой автоморфизм $\mathscr{N}$ сохраняет орбифолдный тип точек, то множество изолированных орбифолдных точек не более чем счетно и их число не влияет на размерность группы $\mathfrak{A}$. Поэтому будем считать, что $\mathscr{N}$ имеет одну изолированную орбифолдную точку x. Тогда $f(x) = x$ для любого $f \in \mathfrak{A}$. Пусть (U, Ω, Γ, p) — карта в точке x и $\bar{f}$ — представитель автоморфизма f. Соответствие $f \mapsto \bar{f}_{*0}$ определяет гомоморфизм групп $\chi : \mathfrak{A} \to G$. Тогда $\dim \mathfrak{A} \le \dim \ker \chi + \dim G$. Оценим размерность $\ker \chi$. Обозначим через $\mathfrak{A}_{\bar{z}}$ подгруппу изотропии в точке $\bar{z} \in \pi^{-1}(x)$ группы автоморфизмов G_1-структуры $\mathscr{R}^1$ на $\mathscr{R}$. Так как для любого $f \in \ker \chi$ по определению $\hat{f}$ выполняется равенство $\hat{f}|_{\pi^{-1}(x)} = \mathrm{id}_{\pi^{-1}(x)}$, то корректно определен гомоморфизм $\alpha : \ker \chi \to \mathfrak{A}_{\bar{z}} : f \mapsto \hat{f}$. Поскольку $\ker \alpha := \{f \in \ker \chi : \hat{f} = \mathrm{id}_{\mathscr{R}}\} = \{\mathrm{id}_{\mathscr{N}}\}$, то α — мономорфизм групп и, следовательно, $\dim \ker \chi \le \dim \mathfrak{A}_{\bar{z}}$. Проводя $k-1$ раз такие же построения, получаем последовательность гомоморфизмов групп $\{(\chi_i, \alpha_i), i = 1, \dots, k-1\}$. Так как $\mathscr{R}^k$ является e-структурой на $\mathscr{R}^{k-1}$, а любой автоморфизм e-структуры, оставляющий на месте хотя бы одну точку, равен тождественному отображению, то $\alpha_{k-1} : \ker \chi_{k-1} \to \{\mathrm{id}_{\mathscr{R}^{k-1}}\}$, поэтому $\ker \chi_{k-1} = \{\mathrm{id}_{\mathscr{R}^{k-2}}\}$. Тогда $\dim \mathfrak{A}_{\bar{z}} \le \dim(\mathfrak{g}_1 + \dots + \mathfrak{g}_{k-1})$ и, следовательно, $\dim \mathfrak{A} \le \dim G + \dim \mathfrak{A}_{\bar{z}} \le \dim(\mathfrak{g} + \mathfrak{g}_1 + \dots + \mathfrak{g}_{k-1})$. $\square$

Из доказательства теоремы 3 вытекает

Предложение 10. *Для любой точки x орбиобразия $\mathscr{N}$ подгруппа изотропии $\mathfrak{A}_x$ в x группы $\mathfrak{A}$ является группой Ли размерности не более чем* $\dim(\mathfrak{g} + \mathfrak{g}_1 + \cdots + \mathfrak{g}_{k-1})$.

6. Изометрии римановых орбиобразий

Римановым орбиобразием называется орбиобразие с $O(n, \mathbb{R})$-структурой. Сама $O(n, \mathbb{R})$-структура называется *римановой*, а автоморфизм римановой структуры — *изометрией*. Обозначим через $\mathfrak{I}(\mathscr{N})$ группу изометрий риманова орбиобразия $\mathscr{N}$, а через $\mathfrak{I}_x$ — подгруппу изотропии в точке $x \in \mathscr{N}$. Задание римановой метрики g на орбиобразии эквивалентно заданию $O(n, \mathbb{R})$-структуры на нем.

Пусть $\{\Delta_k\}_{k=n,\dots,0}$ — стратификация n-мерного риманова орбиобразия $\mathscr{N}$. Нам потребуется следующая лемма, доказательство которой опирается на аналогичное утверждение для автоморфизмов G-структур на многообразиях.

Лемма 3. *Пусть $\mathscr{R}$ — G-структура конечного типа на гладком орбиобразии $\mathscr{N}$. Если для автоморфизмов f и g G-структуры $\mathscr{R}$ существует такое открытое подмножество $U \subset \mathscr{N}$, что $f = g$ на U, то $f = g$ на всем орбиобразии $\mathscr{N}$.*

Теорема 4. 1. *Группа изометрий $\mathfrak{I}(\mathscr{N})$ n-мерного риманова орбиобразия $\mathscr{N}$ является группой Ли размерности $\leq \frac{n(n+1)}{2}$, причем равенство $\dim \mathfrak{I}(\mathscr{N}) = \frac{n(n+1)}{2}$ выполняется тогда и только тогда, когда $\mathscr{N}$ — риманово многообразие постоянной кривизны.*

2. *Если $\mathscr{N}$ — собственное орбиобразие, то $\dim \mathfrak{I}(\mathscr{N}) \leq \frac{n(n-1)}{2}$, причем для достижения равенства необходимо, чтобы $\Delta_0 \bigsqcup \Delta_{n-1} \neq \varnothing$, $\Delta_k = \varnothing$ при всех $k \in \{1, \dots, n-2\}$, а в случае $\Delta_k = \varnothing$ при $k \in \{0, \dots, n-2\}$ на Δ_{n-1} индуцировалась риманова метрика постоянной кривизны.*

3. *Если $\mathscr{N}$ компактно, то группа изометрий $\mathfrak{I}(\mathscr{N})$ компактна.*

Доказательство. 1. Так как первое продолжение алгебры Ли $o(n, \mathbb{R})$ группы $O(n, \mathbb{R})$ равно нулю, то риманова структура является структурой первого порядка. Поэтому согласно теореме 2 группа изометрий $\mathfrak{I}(\mathscr{N})$ n-мерного риманова орбиобразия $\mathscr{N}$ является группой Ли размерности $\leq n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$. Далее нам потребуется следующая

Лемма 4. *Если $\Delta_k \neq \varnothing$, то*

$$\dim \mathfrak{I}(\mathscr{N}) \leq \frac{k(k+1)}{2} + \frac{(n-k)(n-k-1)}{2}.$$

Доказательство. Предположим, что $\Delta_k \neq \varnothing$, той же буквой Δ_k обозначим подмножество, образованное орбифолдными точками одного типа. Пусть $f \in \mathfrak{I}(\mathscr{N})$. Так как f сохраняет тип орбифолдных точек, то $f(\Delta_k) = \Delta_k$. Поскольку топология подпространства Δ_k обладает счетной базой, то Δ_k имеет не более чем счетное семейство компонент связности. Так как группа биекций счетного множества на себя счетна, для оценки размерности, не нарушая общности, можно считать, что Δ_k связно. На многообразии Δ_k индуцируется риманова структура. Поэтому $f|_{\Delta_k}$ — изометрия риманова многообразия Δ_k. Определим гомоморфизм $\chi : \mathfrak{I}(\mathscr{N}) \to \mathfrak{I}(\Delta_k)$ равенством $\chi(f) := f|_{\Delta_k}$. Тогда $\dim \mathfrak{I}(\mathscr{N}) \leq \dim \mathfrak{I}(\Delta_k) + \dim \ker \chi$. Как доказано выше, $\dim \mathfrak{I}(\Delta_k) \leq \frac{k(k+1)}{2}$. Возьмем $f \in \ker \chi$. Пусть $x \in \Delta_k$, (U, Ω, Γ, p) — карта орбиобразия в точке x

такая, что $\Omega = \mathbb{R}^n$ и Γ действует на $\mathbb{R}^k \times 0$ тривиально, а $T_{(0,0)}(0 \times \mathbb{R}^{n-k})$ — ортогональное дополнение к $T_{(0,0)}(\mathbb{R}^k \times 0)$ в римановой метрике, определяемой римановой структурой $\mathscr{R}_\Omega$ на Ω. Тогда $\bar{f} : \Omega \to \Omega$ — изометрия и $\bar{f}|_{\mathbb{R}^k \times 0} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^k \times 0}$. Отождествим $T_{(0,0)}(0 \times \mathbb{R}^{n-k})$ с $0 \times \mathbb{R}^{n-k}$. Так как $\bar{f}_*$ сохраняет углы между векторами, то $\bar{f}_*|_{0 \times \mathbb{R}^{n-k}} \in O(n-k, \mathbb{R})$. Тогда $\dim \ker(\chi|_U) \le \dim O(n-k, \mathbb{R})$. По лемме 3 $\ker(\chi|_U) = \ker \chi$, следовательно, $\dim \ker \chi \le \frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$, и лемма доказана.

Если существует хотя бы одно $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, для которого $\Delta_k \neq \varnothing$, то согласно лемме 4

$$\dim \mathfrak{I}(\mathscr{N}) \le \frac{k(k+1)}{2} + \frac{(n-k)(n-k-1)}{2}.$$

Нетрудно проверить, что при всех указанных $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ выражение справа строго меньше, чем $\frac{n(n+1)}{2}$, а при $k = n$ оно равно $\frac{n(n+1)}{2}$. Поэтому для выполнения равенства $\dim \mathfrak{I}(\mathscr{N}) = \frac{n(n+1)}{2}$ необходимо, чтобы только Δ_n было непусто, т. е. чтобы $\mathscr{N}$ являлось многообразием. Как известно [12, 19], риманово многообразие имеет группу изометрий максимальной размерности $\frac{n(n+1)}{2}$ тогда и только тогда, когда оно имеет постоянную кривизну.

2. Для фиксированного n и $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ функция

$$r(k) = \frac{k(k+1)}{2} + \frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$$

достигает максимума, равного $\frac{n(n-1)}{2}$, при $k = 0$ и $k = n-1$. Это означает, что для собственного орбиобразия $\mathscr{N}$ выполняется неравенство $\dim \mathfrak{I}(\mathscr{N}) \le \frac{n(n-1)}{2}$, причем для равенства необходимо $\Delta_0 \bigsqcup \Delta_{n-1} \neq \varnothing, \Delta_k = \varnothing$ при любом $k \in \{1, \ldots, n-2\}$. Если, кроме того, $\Delta_0 = \varnothing$, то необходимо $\dim \mathfrak{I}(\Delta_{n-1}) = \frac{n(n-1)}{2}$, т. е. чтобы риманово многообразие Δ_{n-1} имело постоянную кривизну.

3. Предположим, что $\mathscr{N}$ компактна. Поскольку $O(n, \mathbb{R})$ также компактна, то компактно и $\mathscr{R}$. Так как топология на $\mathfrak{I}(\mathscr{N})$ определяется инъекцией $\chi : \mathfrak{I}(\mathscr{N}) \to \mathscr{R} : f \mapsto \hat{f}(\bar{z})$ этой группы в компактное многообразие $\mathscr{R}$, где $\bar{z}$ — фиксированная точка из $\mathscr{R}$, то сама группа $\mathfrak{I}(\mathscr{N})$ также компактна. $\square$

Замечание. Как известно [12, 19], если для n-мерного риманова многообразия $\mathscr{N}$ выполнено равенство $\dim \mathfrak{I}(\mathscr{N}) = \frac{n(n+1)}{2}$, то $\mathscr{N}$ изометрично одному из следующих римановых многообразий постоянной кривизны:

1) n-мерному евклидову пространству $\mathbb{R}^n$;
2) сфере S^n;
3) n-мерному проективному пространству $\mathbb{R}P^n$;
4) односвязному n-мерному гиперболическому пространству.

Следствие 2. *Пусть $\mathscr{R}$ — риманова структура на гладком n-мерном орбиобразии $\mathscr{N}$. Тогда*

1) *подгруппа изотропии $\mathfrak{I}_x$ группы $\mathfrak{I}(\mathscr{N})$ в произвольной точке $x \in \mathscr{N}$ компактна, и $\dim \mathfrak{I}_x \le \frac{n(n-1)}{2}$;*

2) *если $x \in \Delta_k$, то $\dim \mathfrak{I}_x \le \frac{(n-k)^2 + k^2 - n}{2}$;*

3) *если существует конечное число орбифолдных точек одного типа на орбиобразии $\mathscr{N}$, то группа изометрий $\mathfrak{I}(\mathscr{N})$ компактна и $\dim \mathfrak{I}(\mathscr{N}) \le \frac{n(n-1)}{2}$.*

Доказательство. 1. Так как слой $\pi^{-1}(x)$ компактен, а топология на группе $\mathfrak{I}_x$ задается инъекцией $\mu : \mathfrak{I}_x \to \pi^{-1}(x) : f \mapsto \hat{f}(\bar{z})$, где $\bar{z}$ — фиксированная точка из $\pi^{-1}(x)$, то сама группа $\mathfrak{I}_x$ компактна и ее размерность согласно предложению 10 не превышает $\frac{n(n-1)}{2}$.

2. Определим гомоморфизм $\chi' : \mathfrak{I}_x \to \mathfrak{I}_x(\Delta_k) : f \mapsto f|_{\Delta_k}$. С учетом предложения 10 $\dim \mathfrak{I}_x(\Delta_k) \le \frac{k(k-1)}{2}$. Поскольку $\ker \chi' = \{f \in \mathfrak{I}_x(\mathscr{N}) : f|_{\Delta_k} = \mathrm{id}_{\Delta_k}\} = \ker \chi$, где $\chi : \mathfrak{I}(\mathscr{N}) \to \mathfrak{I}(\Delta_k) : f \mapsto f|_{\Delta_k}$, то из доказательства леммы 4 вытекает, что

$$\dim \ker \chi' \le \frac{(n-k)(n-k-1)}{2}.$$

Тогда

$$\dim \mathfrak{I}_x(\mathscr{N}) \le \dim \ker \chi' + \dim \mathfrak{I}_x(\Delta_k) \le \frac{(n-k)^2 + k^2 - n}{2}.$$

3. Используя тот факт, что изоморфизм орбиобразия сохраняет орбифолдный тип точек, по аналогии с 1 и 2 доказывается утверждение 3. $\square$

Замечание. В случае, когда $\mathscr{N}$ — риманово многообразие, из утверждения 1 теоремы 4 вытекает теорема Майерса и Стинрода [13] (см. также [12, 19]).

Примеры. 1. Зададим действие группы $\Gamma = \{-1, 1\}$ на $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ следующим образом:

$$\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \times \Gamma \to \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : ((x, y), \gamma) \mapsto (x, \gamma y).$$

Евклидова метрика g на $\mathbb{R}^n$ инвариантна относительно действия Γ, поэтому на элементарном орбиобразии $\mathscr{N} = \mathbb{R}^n/\Gamma$ метрика g определяет риманову структуру. Заметим, что $\Delta(\mathscr{N}) = \{\Delta_n, \Delta_{n-1}\}$. Тогда $\mathfrak{I}(\mathscr{N}) \cong O(n-1, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n-1}$ и $\dim \mathfrak{I}(\mathscr{N}) = n(n-1)/2$.

2. Пусть на $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{n-2}$ действует группа $\Gamma = \langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle$, где γ_1 — поворот $\mathbb{R}^2$ вокруг начала координат на угол $2\pi/m$, m — любое фиксированное натуральное число, $m > 1$, а γ_2 — отражение относительно плоскости $\mathbb{R}^2 \times 0,\ 0 \in \mathbb{R}^{n-2}$, следовательно, $\Gamma \cong \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_2$. Как и в примере 1, евклидова метрика на $\mathbb{R}^n$ задает риманову структуру на орбиобразии $\mathscr{N} = \mathbb{R}^n/\Gamma$, причем стратификация $\mathscr{N}$ имеет вид $\Delta(\mathscr{N}) = \{\Delta_n, \Delta_{n-2}, \Delta_2, \Delta_0\}$ и $\mathfrak{I}(\mathscr{N}) \cong O(2) \times SO(n-2)$.

7. Конформная структура на орбиобразии

Пусть $\mathscr{N}$ — гладкое n-мерное орбиобразие, $n \ge 3$. Положим по определению $CO(n, \mathbb{R}) := \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : A^t A = cI, c \in \mathbb{R}^+\}$. Алгебра Ли группы Ли $CO(n, \mathbb{R})$ есть $co(n, \mathbb{R}) := \{a \in gl(n, \mathbb{R}) : a^t + a = cI, c \in \mathbb{R}\}$. $CO(n, \mathbb{R})$-структура $\mathscr{R}$ на орбиобразии $\mathscr{N}$ называется *конформной структурой.* Автоморфизм $CO(n, \mathbb{R})$-структуры на орбиобразии называется *конформным.* Группу конформных автоморфизмов обозначим через $\mathfrak{C}(\mathscr{N})$, а подгруппу изотропии в точке $x \in \mathscr{N}$ — через $\mathfrak{C}_x$.

Как и в случае многообразий, возможен другой, эквивалентный, подход к понятию конформной структуры на орбиобразии. Две римановы метрики g и g' на $\mathscr{N}$ будем называть *конформно эквивалентными*, если существует такая гладкая положительная функция λ на $\mathscr{N}$, что $g' = \lambda g$. Класс конформно эквивалентных метрик $[g]$ определяет конформную структуру на $\mathscr{N}$. При этом автоморфизм $CO(n, \mathbb{R})$-структуры можно рассматривать как конформное преобразование риманова орбиобразия $(\mathscr{N}, g)$, т. е. как такой автоморфизм f орбиобразия $\mathscr{N}$, для которого $f^* g \in [g]$, где f^* — кодифференциал отображения f.

Теорема 5. 1. *Группа конформных автоморфизмов* $\mathfrak{C}(\mathcal{N})$ n*-мерного риманова орбиобразия* $\mathcal{N}$, $n \geq 3$, *допускает структуру группы Ли, размерность которой не превосходит* $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

2. *Если существует* $\Delta_k \neq \varnothing$ *при* $k \in \{0\} \cup \{3, \dots, n-3\}$, *то*

$$\dim \mathfrak{C}(\mathcal{N}) \leq \frac{(n-k)^2 + (k+2)^2 + n - 2}{2} \leq \frac{n^2 + n + 2}{2}.$$

3. *Если* $x \in \Delta_k,\ k \in \{0\} \cup \{3, \dots, n-3\}$, *то*

$$\dim \mathfrak{C}_x \leq \frac{(n-k)^2 + (k+1)^2 + n + 1}{2}.$$

Доказательство. 1. Известно [12], что алгебра $co(n, \mathbb{R})$ имеет порядок 2 и ее первое продолжение $\mathfrak{g}_1$ естественно изоморфно дуальному пространству $(\mathbb{R}^n)^*$ векторного пространства $\mathbb{R}^n$. Следовательно, $CO(n, \mathbb{R})$-структура является G-структурой второго порядка, и к ней применима теорема 2, согласно которой $\mathfrak{C}(\mathcal{N})$ — группа Ли, причем $\dim \mathfrak{C}(\mathcal{N}) \leq n + \dim(\mathfrak{g} + \mathfrak{g}_1)$. Поскольку

$$\dim CO(n, \mathbb{R}) = \dim co(n, \mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2} + 1,$$

а $\dim \mathfrak{g}_1 = n$, то

$$\dim \mathfrak{C}(\mathcal{N}) \leq n + \frac{n(n-1)}{2} + 1 + n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

2. Пусть существует $\Delta_k \neq \varnothing$ при $k \in \{3, \dots, n-3\}$. Как отмечалось выше, для оценки размерности группы автоморфизмов, не нарушая общности, можно считать, что Δ_k — связное многообразие, образованное орбифолдными точками одного типа. Тогда на Δ_k индуцируется конформная структура. Определим гомоморфизм $\chi : \mathfrak{C}(\mathcal{N}) \to \mathfrak{C}(\Delta_k) : f \mapsto f|_{\Delta_k}$. Имеем

$$\dim \mathfrak{C}(\mathcal{N}) \leq \dim \mathfrak{C}(\Delta_k) + \dim \ker \chi.$$

Согласно 1

$$\dim \mathfrak{C}(\Delta_k) \leq \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Оценим размерность $\ker \chi$. Возьмем $f \in \ker \chi$, тогда $f|_{\Delta_k} = \mathrm{id}_{\Delta_k}$. Для $x \in \Delta_k$ существует такая карта (U, Ω, Γ, p) в x, что представитель $\bar{f}$ удовлетворяет равенству $\bar{f}|_{\mathbb{R}^k \times 0} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^k \times 0}$. Отождествим $T_{(0,0)}(\mathbb{R}^k \times 0)$ с $\mathbb{R}^k \times 0$, а $T_{(0,0)}(0 \times \mathbb{R}^{n-k})$ с $0 \times \mathbb{R}^{n-k}$. Так как $\bar{f}_* \in CO(n, \mathbb{R})$ и $\bar{f}_*|_{\mathbb{R}^k \times 0} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^k \times 0}$, то $\bar{f}_* \in O(n, \mathbb{R})$. Поскольку $\bar{f}_*$ сохраняет углы между векторами, то $\bar{f}_*|_{0 \times \mathbb{R}^{n-k}} \in O(n-k, \mathbb{R})$. Таким образом, определен гомоморфизм

$$\alpha : \ker \chi \to O(n-k, \mathbb{R}) : f \mapsto \bar{f}_*|_{0 \times \mathbb{R}^{n-k}}$$

и, следовательно,

$$\dim \ker \chi \leq \dim O(n-k, \mathbb{R}) + \dim \ker \alpha.$$

Поскольку $\dim \ker \alpha \leq \dim \mathfrak{g}_1 = n$, то

$$\dim \mathfrak{C}(\mathcal{N}) \leq \frac{(k+1)(k+2)}{2} + \frac{(n-k)(n-k-1)}{2} + n = \frac{(n-k)^2 + (k+2)^2 + n - 2}{2}.$$

Нетрудно проверить, что эта оценка сохраняется и при $k = 0$. Заметим, что

$$\frac{(n-k)^2 + (k+2)^2 + n - 2}{2} \le \frac{n^2 + n + 2}{2},$$

причем равенство достигается только при $\Delta_0 \ne \varnothing$ и $\Delta_k = \varnothing$, $k \in \{3, \ldots, n-3\}$.

3. Определим гомоморфизм $\chi' : \mathfrak{C}_x(\mathscr{N}) \to \mathfrak{C}_x(\Delta_k) : f \mapsto f|_{\Delta_k}$. Согласно предложению 10

$$\dim \mathfrak{C}_x(\Delta_k) \le \frac{k^2 + k + 2}{2}.$$

Поскольку

$$\ker \chi' = \{f \in \mathfrak{C}_x(\mathscr{N}) : f|_{\Delta_k} = \mathrm{id}_{\Delta_k}\} = \ker \chi,$$

где χ то же, что и в п. 2, то

$$\dim \ker \chi' \le \frac{(n-k)(n-k-1)}{2} + n.$$

Таким образом,

$$\dim \mathfrak{C}_x(\mathscr{N}) \le \dim \ker \chi' + \dim \mathfrak{C}_x(\Delta_k) \le \frac{(n-k)^2 + (k+1)^2 + n + 1}{2}. \qquad \square$$

Замечание 1. В случае, когда $\mathscr{N}$ — риманово многообразие, из первого утверждения теоремы 5 вытекает теорема 1 из примечания 11 в [19].

Замечание 2. Равенство

$$\dim \mathfrak{C}(\mathscr{N}) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

достигается в классе многообразий только для стандартной конформной структуры на сфере S^n [12].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dixon L., Harwey J. A., Vafa C., Witten E.* Strings on orbifolds (2) // Nucl. Phys. B. 1985. V. 261, N 4. P. 678–686.
2. *Грин М., Шварц Дж., Виттен Э.* Теория суперструн. М.: Мир, 1990. Т. 2.
3. *Žukova N.* On the stability of leaves of Riemannian foliation // Ann. Global Anal. Geom. 1987. V. 5, N 3. P. 261–271.
4. *Reinhart B.* Closed metric foliations // Michigan Math. J. 1961. V. 8. P. 7–9.
5. *Edwards R., Millet K., Sullivan D.* Foliations with all leaves compact // Topology. 1977. V. 16, N 1. P. 13–32.
6. *Жукова Н. И.* Слоения с локально стабильными слоями // Изв. вузов. Математика. 1996. № 7. С. 21–31.
7. *Satake I.* On a generalization of the notion of manifold // Proc. Nat. Acad. Sci. 1956. V. 42, N 6. P. 359–363.
8. *Baily W. L. Jr.* The decomposition theorem for V-manifolds // Amer. J. Math. 1956. V. 78, N 4. P. 862–888.
9. *Gasparini I.* Global reduction of dynamical system on a foliated manifold // J. Math. Phys. 1984. V. 25, N 10. P. 2918–2921.
10. *Bonahon F., Siebenmann L.* The classification of Seifert fibred 3-orbifolds. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985. (London Math. Soc. Lect. Notes Ser.; 95).
11. *Haefliger A., Salem E.* Action of tori on orbifolds // Ann. Global Anal. Geom. 1991. V. 9, N 1. P. 37–59.
12. *Кобаяси Ш.* Группы преобразований в дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1986.
13. *Myers S. B., Steenrod N.* The group of isometries of a riemannian manifold // Ann. Math. 1939. V. 40. P. 400–416.

14. *Kobayashi S.* Groupes transformations qui laissent invariant une connexion infinitesimale // C. R. Acad. Sci. Paris A. 1954. V. 238. P. 644–645.
15. *Ehresmann C.* Sur les pseudo-groupes de Lie de type fini // C. R. Acad. Sci. Paris. 1958. V. 246. P. 360–362.
16. *Kobayashi S.* Theory of connections // Ann. di Mat. 1957. V. 43. P. 119–194.
17. *Thurston W. P.* The geometry and topology of 3-manifolds. Princeton: Princeton Univ., 1978. (Mimeographed Notes).
18. *Molino P.* Riemannian foliations. Boston: Birkhäuser, 1988. (Progress in Math.; V. 73).
19. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1981. Т. 1.
20. *Blumenthal R. A., Hebda J. J.* Ehresmann connections for foliations // Indiana Univ. Math. J. 1984. V. 33, N 4. P. 597–611.
21. *Жукова Н. И.* График слоения со связностью Эресмана и стабильность слоев // Изв. вузов. Математика. 1994. № 2. С. 79–81.

Статья поступила 10 ноября 2002 г.

Багаев Андрей Владимирович
Нижегородский гос. университет им. Н. И. Лобачевского,
пр. Гагарина, 23, корп. 2, Нижний Новгород 603950
bagaev@mail.nnov.ru

Жукова Нина Ивановна
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского,
кафедра геометрии и высшей алгебры механико-математического факультета,
пр. Гагарина, 23, корп. 2, Нижний Новгород 603950
zhukova@mail.nnov.ru