Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2003. Том 44, № 1

УДК 512.54

АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА КВАЗИИЗОМЕТРИЧНОСТИ НЕКОТОРЫХ HNN–РАСШИРЕНИЙ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

О. С. Маслакова

Аннотация: Приводится алгоритм проверки квазиизометричности некоторых HNN-расширений свободных абелевых групп.

Ключевые слова: квазиизометрия, абсолютная жорданова форма, группа единиц

1. Введение

Пусть (X, d_X) и (Y, d_Y) — метрические пространства. Отображение $f : X \to Y$ называется *квазиизометрией*, если существуют константы K, C_1, C_2 такие, что

1) $\frac{1}{C_1} d_X(x_1, x_2) - C_2 \le d_Y(f(x_1), f(x_2)) \le C_1 d_X(x_1, x_2) + C_2$ для всех $x_1, x_2 \in X$;

2) K-окрестность $f(X)$ совпадает с Y.

Пространства X и Y называются *квазиизометричными*, если существует квазиизометрия $f : X \to Y$. Пусть G, H — конечно порожденные группы, d_G, d_H — словарные метрики на G, H. *Группы* G и H называются *квазиизометричными*, если метрические пространства (G, d_G) и (H, d_H) квазиизометричны. Это определение корректно, поскольку для конечно порожденной группы словарная метрика единственна с точностью до квазиизометрии.

Пусть $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$, $\det M \ne 0$. Через Γ_M обозначим HNN-расширение группы $\mathbb{Z}^n$, заданное мономорфизмом φ_M с матрицей M. Тогда

$$\Gamma_M = \langle t, a_1, \dots, a_n \mid [a_i, a_j] = 1, \quad t a_i t^{-1} = \varphi_M(a_i),\ i, j = 1, \dots, n \rangle,$$

где $\varphi_M(a_i) = a_1^{m_1} \dots a_n^{m_n}$, $(m_1, \dots, m_n)$ — i-й столбец матрицы M. В [1] Б. Фарб и Л. Мошер привели следующий критерий квазиизометричности групп вида Γ_M.

Теорема [1]. *Пусть*

$$M_1, M_2 \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z}), \quad \det M_1, \det M_2 \ne 0, \pm 1.$$

Тогда Γ_{M_1} квазиизометрична Γ_{M_2} в том и только том случае, когда найдутся натуральные r_1, r_2 такие, что $M_1^{r_1}$ и $M_2^{r_2}$ имеют одинаковые абсолютные жордановы формы.

Абсолютная жорданова форма матрицы M получается из жордановой формы заменой диагональных элементов их модулями. Условие $\det M = \pm 1$ эквивалентно полицикличности группы Γ_M (доказательство можно найти в [2]), и

Работа выполнена при финансовой поддержке СО РАН (грант Лаврентьевского конкурса молодых ученых 2002 г.) и гранта № 7 проектов-победителей 6-го конкурса-экспертизы 1999 г. научных проектов молодых ученых РАН.

на данный момент критерий квазиизометричности таких групп Γ_M неизвестен. Основным результатом данной работы является следующая

Теорема. *Пусть $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$. Тогда можно алгоритмически проверить, существуют ли натуральные k, m такие, что абсолютные жордановы формы матриц A^k и B^m совпадают.*

Следствие. *Существует алгоритм проверки квазиизометричности групп Γ_{M_1} и Γ_{M_2} при $\det M_1, \det M_2 \neq 0, \pm 1$.*

2. Разделение корней многочлена

В дальнейшем $\mathrm{Nul}(f)$ будет обозначать множество корней многочлена $f(t)$. Несложно получить оценки корней многочлена в следующем виде.

Предложение 2.1. *Пусть α_1, α_2 — различные корни многочлена $f(t) = a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0 \in \mathbb{R}[t]$. Тогда*

$$|\alpha_1| \leq A, \quad \frac{1}{n}\sqrt{\frac{|d(f)|}{2A}} \leq |\alpha_1 - \alpha_2| \leq 2A,$$

где $d(f)$ — дискриминант многочлена f, $A = \frac{1}{|a_n|} \max\limits_{0 \leq i \leq n-1} |a_i| + 1$. $\square$

Поскольку дискриминант многочлена вычисляется через его коэффициенты, приведенные оценки находятся алгоритмически.

Предложение 2.2. *Для произвольного многочлена $f(t) \in \mathbb{Q}[t]$ алгоритмически вычисляются*

1) *многочлены $f_i(t) \in \mathbb{Q}[t]$, $i = 1, \ldots, n$, такие, что $f(t) = \prod\limits_{i=1}^{n} f_i(t)^i$ и корнями многочлена $f_i(t)$ являются все корни многочлена $f(t)$ кратности i; в частности, многочлен $\prod\limits_{i=1}^{n} f_i(t) \in \mathbb{Q}[t]$ не имеет кратных корней;*

2) *взаимно простые неприводимые многочлены $F_j(t) \in \mathbb{Q}[t]$, $j = 1, \ldots, m$, такие, что $f(t) = \prod\limits_{j=1}^{m} F_j(t)^{s_j}$.*

Следующее предложение позволяет перейти от корней многочлена к их модулям.

Предложение 2.3. *Для произвольного многочлена $f(t) \in \mathbb{Q}[t]$ можно алгоритмически построить многочлен $g(t) \in \mathbb{Q}[t]$ без кратных корней такой, что $\mathrm{Nul}(g) \supseteq \{|t|^2 : t \in \mathrm{Nul}(f)\}$.*

С помощью теоремы Штурма можно алгоритмически разделить вещественные корни многочлена без кратных корней с вещественными коэффициентами. Кронекер разработал теорию, позволяющую указать набор кругов на комплексной плоскости, каждый из которых содержит единственный корень комплексного многочлена без кратных корней [3]. Следующее предложение вытекает из комбинации этих алгоритмов с использованием предложения 2.3.

Предложение 2.4. *Пусть $f(t)$ — произвольный многочлен из $\mathbb{Q}[t]$, и пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — его корни. Тогда по коэффициентам многочлена $f(t)$ можно алгоритмически указать центры $z_1, \ldots, z_n$ и радиусы $r_1, \ldots, r_n$ замкнутых кругов $K_1, \ldots, K_n$ на комплексной плоскости таких, что для всех i, j*

1) *$\alpha_i \in K_i$;*

2) *если* $\alpha_i \neq \alpha_j$, *то* $K_i \cap K_j = \varnothing$;
3) *если* $\alpha_i = \alpha_j$, *то* $K_i = K_j$;
4) *если* $|\alpha_i|^2 \neq |\alpha_j|^2$, *то интервалы*

$$[(|z_i| - r_i)^2, (|z_i| + r_i)^2], \quad [(|z_j| - r_j)^2, (|z_j| + r_j)^2]$$

не пересекаются.

Доказательство. По теореме Штурма локализуем вещественные неотрицательные корни многочлена $g(t)$ из предложения 2.3 в попарно не пересекающихся интервалах $I_1, \ldots, I_m$. По предложению $2.2, 1)$ построим многочлен $f_1(t)$ без кратных корней с $\mathrm{Nul}(f_1) = \mathrm{Nul}(f) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$. Для многочлена $f_1(t)$ методом Кронекера построим круги $K_1, \ldots, K_s$, удовлетворяющие условиям 1, 2, такие, что для каждого K_i существует $I_k \supseteq [(|z_i| - r_i)^2, (|z_i| + r_i)^2]$. Тогда для кругов $K_1, \ldots, K_s$ выполнено условие 4. Осталось взять для корня $\alpha_i = \alpha_j$, $j \leq s$, многочлена $f(t)$ круг $K_i = K_j$. $\square$

Замечание 2.5. Для данного круга K_{i_0} в силу условия 4 и предложения 2.2 можно определить число элементов в множестве $\{\alpha_i : |\alpha_i| = |\alpha_{i_0}|, i = 1, \ldots, n\}$.

Будем говорить, что корень α многочлена $f(t)$ *задается кругом* K_α, если $\mathrm{Nul}(f) \cap K_\alpha = \{\alpha\}$.

3. Сведения о группе единиц

Формулировки и определения из данного раздела можно найти в книге [4]. Пусть F — поле алгебраических чисел. Оно может быть получено присоединением к $\mathbb{Q}$ примитивного элемента θ, являющегося корнем неприводимого многочлена $h(t) \in \mathbb{Q}[t]$ со старшим коэффициентом, равным 1. Пусть a — число вещественных, $2b$ — число комплексных невещественных корней многочлена $h(t)$, $m = \deg(h) = a + 2b$. Пусть o_F — множество алгебраических целых поля $F = \mathbb{Q}(\theta)$, кольцо o_F является свободным $\mathbb{Z}$-модулем ранга m.

Замечание 3.1. Пусть $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$. Тогда для любого $\alpha \in \mathrm{Sp}(A)$ числа α и $|\alpha|^2$ являются алгебраическими целыми.

Число $\alpha \in F$ назовем *вычислимым алгоритмически*, если существует алгоритм нахождения рациональных коэффициентов в разложении α по степеням θ. В книге [5] приведен алгоритм нахождения $\mathbb{Z}$-базиса модуля алгебраических целых.

Пусть $\{\omega_1, \ldots, \omega_m\}$ — $\mathbb{Q}$-базис F. Тогда для любого $\alpha \in F$ линейный оператор $\mathscr{A}_\alpha : x \to \alpha x$ задает матрицу $M_\alpha \in \mathscr{M}_m(\mathbb{Q})$ в этом базисе. Обозначим через $N(\alpha) = \det M_\alpha \in \mathbb{Q}$ *норму* α.

Замечание 3.2. Если базис $\{\omega_1, \ldots, \omega_m\}$ и число α вычислимы алгоритмически, то матрица M_α и норма α вычисляются алгоритмически.

Группа единиц $U(o_F)$ состоит из всех обратимых по умножению элементов o_F. Число $\alpha \in o_F$ попадает в группу единиц тогда и только тогда, когда $|N(\alpha)| = 1$. Подгруппа $TU(o_F) \leq U(o_F)$ *единиц кручения* состоит из всех корней из 1, попадающих в o_F. Следующая теорема описывает строение группы единиц.

Теорема 3.3 (Дирихле). *Группа единиц модуля* o_F *поля* F *является прямым произведением своей (циклической) подгруппы* $TU(o_F)$ *порядка* w *и* $r = a+$

$b-1$ бесконечных циклических подгрупп, порожденных основными единицами $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r \in o_F$:

$$U(o_F) = TU(o_F) \times \langle \varepsilon_1 \rangle \times \cdots \times \langle \varepsilon_r \rangle \cong C_w \times \mathbb{Z}^r.$$

Метод алгоритмического вычисления основных единиц и группы $TU(o_F)$ приведен, например, в работе [6].

Предложение 3.4. *Пусть $\varepsilon \in U(o_F)$, ε_0 — порождающий группы $TU(o_F)$, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ — основные единицы кольца o_F. Предположим, что $\varepsilon, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ заданы алгоритмически. Тогда можно алгоритмически вычислить целые числа $k_0, \ldots, k_r$ такие, что $\varepsilon = \varepsilon_0^{k_0} \ldots \varepsilon_r^{k_r}$.*

Доказательство. Оценим $k_0, \ldots, k_r$. Можно считать, что $k_0 \leq |TU(o_F)|$. Пусть $\sigma_1, \ldots, \sigma_a$ — вещественные изоморфизмы поля F. Из каждой пары сопряженных между собой комплексных изоморфизмов выберем какой-нибудь один и обозначим полученные изоморфизмы через $\sigma_{a+1}, \ldots, \sigma_{a+b}$. Обозначим через

$$l(x) = (\ln|\sigma_1(x)|, \ldots, \ln|\sigma_a(x)|, 2\ln|\sigma_{a+1}(x)|, \ldots, 2\ln|\sigma_{a+b}(x)|)$$

логарифмическое изображение $x \in F$. Известно, что векторы $l(\varepsilon_1), \ldots, l(\varepsilon_r)$ линейно независимы и $l(\varepsilon) = k_1 l(\varepsilon_1) + \cdots + k_r l(\varepsilon_r)$. Тогда для всех $1 \leq j \leq r$ выполнено неравенство

$$|k_j| \leq \frac{|l(\varepsilon)|}{|G|} \sum_{i=1}^{r} |l(\varepsilon_i)|,$$

где G — матрица Грама системы $l(\varepsilon_1), \ldots, l(\varepsilon_r)$. В книге [7] приведена нижняя оценка для $|G|$, поэтому достаточно показать, как оценить $|l(\varepsilon)|, |l(\varepsilon_1)|, \ldots, |l(\varepsilon_r)|$ сверху. Покажем, как это сделать для $|l(\varepsilon)|$. Для $|l(\varepsilon_1)|, \ldots, |l(\varepsilon_r)|$ оценка получается аналогично. Поскольку ε вычислимо алгоритмически и известен минимальный многочлен для θ, можно построить многочлен $f(t) \in \mathbb{Q}[t]$ такой, что

$$\mathrm{Nul}(f) \supseteq \{\sigma_i(\varepsilon) | 1 \leq i \leq a+b\}.$$

Тогда по предложению 2.1 алгоритмически вычислима константа A такая, что $|\sigma_i(\varepsilon)| \leq A$ для всех i. Отсюда $|l(\varepsilon)| \leq A\sqrt{a+b}$. В итоге для всех $1 \leq j \leq r$ можно найти константу C такую, что $|k_j| \leq C$. Осталось перебрать конечное число произведений вида $\varepsilon_0^{k_0} \ldots \varepsilon_r^{k_r}$ для $k_0 \leq |TU(o_F)|, |k_j| \leq C$ и сравнить их с ε. $\square$

4. Доказательство основной теоремы

Пусть $\mathbb{Q}_f$ — расширение $\mathbb{Q}$ с помощью корня неприводимого многочлена f. Следующее предложение позволяет по оценке корней α, β многочленов $f(t), g(t)$ построить минимальный многочлен для примитивного элемента γ расширения $\mathbb{Q}(\gamma) = \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$.

Предложение 4.1. *Пусть $f(t), g(t) \in \mathbb{Q}[t]$ — неприводимые многочлены, α и β — корни, заданные кругами K_α, K_β. Тогда можно алгоритмически вычислить неприводимый многочлен $h(t) \in \mathbb{Z}[t]$ со старшим коэффициентом 1 такой, что для некоторого его корня γ выполнено $\mathbb{Q}(\alpha, \beta) = \mathbb{Q}(\gamma)$. Также можно алгоритмически вычислить многочлены $h_\alpha(t), h_\beta(t) \in \mathbb{Q}[t]$ такие, что $\alpha = h_\alpha(\gamma), \beta = h_\beta(\gamma)$.*

Доказательство. По теореме о примитивном элементе [8] можно положить $\theta = \alpha + c\beta$ для произвольного

$$c \notin X = \left\{ \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta_1 - \beta_2} : \alpha_1 \neq \alpha_2 \in \mathrm{Nul}(f), \beta_1 \neq \beta_2 \in \mathrm{Nul}(g) \right\}.$$

В качестве c можно взять любое натуральное число, большее $\max\limits_{x\in X} |x|$, используя оценки предложения 2.1

Положим $d = \deg(f)\deg(g)$, и пусть v — d-мерный вектор-столбец с координатами

$$v_{i,j} = \alpha^i \beta^j, \quad 0 \le i < \deg(f),\ 0 \le j < \deg(g).$$

Так как $1, \alpha, \ldots, \alpha^{\deg(f)-1}$ и $1, \beta, \ldots, \beta^{\deg(g)-1}$ — $\mathbb{Q}$-базисы расширений $\mathbb{Q}_f$ и $\mathbb{Q}_g$, по коэффициентам многочленов f и g можно вычислить матрицу $M \in \mathscr{M}_d(\mathbb{Q})$ такую, что $(\alpha + c\beta)v = Mv$. Значит, $\theta = \alpha + c\beta$ — корень характеристического многочлена χ_M матрицы M с рациональными коэффициентами. Разлагая по предложению 2.2 многочлен χ_M на неприводимые множители и оценивая корни α, β (а следовательно, и θ) с необходимой точностью, можно найти неприводимый многочлен $\tilde{h}(t) \in \mathbb{Z}[t]$, корнем которого является θ. Пусть k — старший коэффициент $\tilde{h}(t)$. Положим $h(t) = k^{n-1}\tilde{h}(t/k)$ и $\gamma = k\theta$.

Многочлены $g(t)$ и $f(\theta - ct)$ имеют единственный общий корень β, поэтому $t - \beta = \text{НОД}(g(t), f(\theta - ct))$. С другой стороны, $g(t), f(\theta - ct) \in \mathbb{Q}(\theta)[t]$, и по алгоритму Евклида коэффициенты $\text{НОД}(g(t), f(\theta - ct))$ можно выразить через коэффициенты $g(t)$ и $f(\theta - ct)$. Так мы получим выражение β в виде многочлена от θ с коэффициентами из $\mathbb{Q}$, по которому можно построить многочлен h_β. Положим $h_\alpha(t) = t/k - ch_\beta(t)$. $\square$

Предложение 4.2. *Пусть $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$, α — характеристический корень матрицы A, заданный кругом K_α. Тогда ранг матрицы $(A - \alpha E)^j$ вычисляется алгоритмически (с помощью метода окаймления миноров) для любого натурального j.*

Лемма 4.3. *Пусть $f(t), g(t) \in \mathbb{Q}[t]$, $\alpha \in \mathrm{Nul}(f), \beta \in \mathrm{Nul}(g)$ заданы кругами K_α, K_β, числа $\alpha, \beta > 0$ алгебраические целые. Тогда можно алгоритмически проверить, существуют ли такие натуральные k, m, что $\alpha^k = \beta^m$, и найти такие k, m, если они существуют.*

Доказательство. Рассмотрим расширение $\mathbb{Q}(\alpha, \beta) = \mathbb{Q}(\theta)$ (предложение 4.1). По замечанию 3.2 можно вычислить нормы α, β в расширении $\mathbb{Q}(\theta)$. Необходимым условием равенства α^k и β^m является $N(\alpha)^k = N(\beta)^m$. Поскольку $N(\alpha), N(\beta) \in \mathbb{Q}$, то можно выяснить, существуют ли натуральные p, q такие, что $N(\alpha)^p = N(\beta)^q$. Предположим, что существуют. Возьмем некоторые из них. Тогда $N(\alpha^p) = N(\beta^q)$. Заметим, что вместо α, β можно рассматривать α^p, β^q и в дальнейшем считать, что $N(\alpha) = N(\beta)$. Рассмотрим возможные случаи.

1. $|N(\alpha)| = |N(\beta)| \neq 1$. Если $\alpha^k = \beta^m$ для некоторых k и m, то $k = m$. Отсюда $\alpha = \beta$, так как по условию $\alpha, \beta > 0$.

2. $|N(\alpha)| = |N(\beta)| = 1$. В этом случае α, β являются единицами модуля o_F и могут быть представлены как произведение основных единиц: $\alpha = \varepsilon_0^{i_0} \ldots \varepsilon_r^{i_r}$, $\beta = \varepsilon_0^{j_0} \ldots \varepsilon_r^{j_r}$ с целыми показателями. Эти показатели можно вычислить алгоритмически по предложению 3.4. Используя теорему 3.3, можно найти натуральные k, m (если они существуют) такие, что $\alpha^k = \beta^m$. $\square$

Пусть имеется s пар α_i, β_i и для всех $1 \le i \le s$ найдены показатели k_i, m_i такие, что $\alpha_i^{k_i} = \beta_i^{m_i}$. Следующее предложение позволяет находить общие показатели k, m такие, что для всех $1 \leq i \leq s$ выполнено $\alpha_i^k = \beta_i^m$, если они существуют.

Предложение 4.4. *Пусть α_i, β_i $(1 \leq i \leq s)$ — вещественные положительные числа, не равные 1. Предположим, что $\alpha_i^{k_i} = \beta_i^{m_i}$ для некоторых натуральных k_i, m_i таких, что* НОД$(k_i, m_i) = 1$, $i = 1, \ldots, s$. *Тогда существуют натуральные k, m такие, что $\alpha_i^k = \beta_i^m$ в том и только в том случае, если $k_1 = \cdots = k_s$ и $m_1 = \cdots = m_s$.* $\square$

Теорема 4.5. *Пусть $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$. Тогда можно алгоритмически проверить, существуют ли натуральные k, m такие, что абсолютные жордановы формы матриц A^k и B^m совпадают.*

Доказательство. Пусть $\mathrm{Sp}(A) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, $\mathrm{Sp}(B) = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ с учетом кратности и $\widehat{\alpha_i} = |\alpha_i|^2$, $\widehat{\beta_i} = |\beta_i|^2$. Пусть $K_1, \ldots, K_n$ и $L_1, \ldots, L_n$ — круги, удовлетворяющие условиям предложения 2.4 для характеристических многочленов матриц A, B соответственно.

Если искомые k, m существуют и матрицы имеют нулевые собственные значения, то (увеличив k, m в несколько раз) можно считать, что все жордановы клетки с нулем на диагонали порядка один. Поэтому в дальнейшем предполагаем, что $0 \notin \mathrm{Sp}(A) \cup \mathrm{Sp}(B)$. Так как при возведении в степень таких матриц структура жордановых клеток не меняется, необходимые и достаточные условия существования степеней k, m таковы:

(а) модули собственных значений в некоторой степени совпадают: существуют подстановка $\sigma \in S_n$ и числа $k, m \in \mathbb{Z}^{>0}$ такие, что для любого i

$$|\alpha_i|^k = |\beta_{\sigma(i)}|^m;$$

(б) совпадает структура клеток в абсолютной жордановой форме: для k, m, найденных в предыдущем пункте, при всех i_0, j должно выполняться равенство

$$\sum_{i:\widehat{\alpha_i} = \widehat{\alpha_{i_0}}} s_A^j(\alpha_i) = \sum_{i:\widehat{\beta_i} = \widehat{\beta_{\sigma(i_0)}}} s_B^j(\beta_{\sigma(i)}),$$

где $s_C^j(\gamma)$ — число жордановых клеток порядка j с числом γ на диагонали в жордановой форме матрицы C.

Сложность проверки условия (а) заключается в том, что собственные числа матриц неизвестны. По предложению 2.3 можно построить многочлены $f(t), g(t)$ такие, что $f(\widehat{\alpha_i}) = g(\widehat{\beta_i}) = 0$ для всех i.

Фиксируем $\sigma \in S_n$. Так как по замечанию 3.1 числа $\widehat{\alpha_i}, \widehat{\beta_j}$ алгебраические целые, то для каждой пары $\widehat{\alpha_i}, \widehat{\beta_{\sigma(i)}}$ можно применять лемму 4.3 для отыскания чисел $k_i, m_i \in \mathbb{Z}^{>0}$ таких, что $\widehat{\alpha_i}^{k_i} = \widehat{\beta_{\sigma(i)}}^{m_i}$. Чтобы условие (а) выполнялось при данном σ, по предложению 4.4 необходимо и достаточно, чтобы $k_1 = \cdots = k_n$ и $m_1 = \cdots = m_n$. Таким образом, проверка условия (а) может быть выполнена алгоритмически и в случае успеха позволит определить k и m.

Условие (б) также проверяется алгоритмически. В силу замечания 2.5 множество $\{i : \widehat{\alpha_i} = \widehat{\alpha_{i_0}},\ i = 1, \ldots, n\}$ перечисляется алгоритмически. Числа $s_C^j(\gamma)$ выражаются через ранги матриц $(C - \gamma E)^\ell$ и, следовательно, по предложению 4.2 могут быть вычислены алгоритмически. $\square$

Автор благодарит своего научного руководителя д.ф.-м.н. О. В. Богопольского за внимание и помощь, оказанные в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Farb B., Mosher L.* On the asymptotic geometry of abelian-by-cyclic groups. I // Acta Math. 2000. V. 184, N 2. P. 145–202.
2. *Farb B., Mosher L.* Quasi-isometric rigidity for the solvable Baumslag-Solitar groups. II // Invent. Math. 1999. V. 137, N 3. P. 273–296.
3. *Прасолов В.* Многочлены. M.: МЦНМО, 1999.
4. *Боревич З. И., Шафаревич И. Р.* Теория чисел. M.: Наука, 1964.
5. *Pohst M., Zassenhaus H.* Algorithmic algebraic number theory. Camridge: Cambridge Univ. Press, 1989.
6. *Pohst M., Zassenhaus H., Weiler P.* On effective computation of fundamental units. I, II // Math. Comp. 1982. V. 38. P. 275–292, 293–329.
7. *Pohst M.* Computational algebraic number theory. Basel; Boston; Berlin: Birkhauser, 1993 (DMV Seminar Band; 21).
8. *Ван дер Варден Б. Л.* Алгебра. M.: Наука, 1979.

Статья поступила 5 ноября 2002 г.

Маслакова Ольга Сергеевна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Коптюга, 4, Новосибирск 630090
tessae@ngs.ru