*Сибирский математический журнал*
*Январь—февраль, 2002. Том 43, № 1*

*УДК 517.957*

# УСТОЙЧИВОСТЬ КЛАССОВ ОТОБРАЖЕНИЙ И ГЁЛЬДЕРОВОСТЬ СТАРШИХ ПРОИЗВОДНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

**А. П. Копылов**

**Аннотация:** В 1954 г. Л. Ниренберг получил следующий хорошо известный результат: *если $z : U \to \mathbb{R}$, $U$ — область в $\mathbb{R}^n$, является решением класса $C^2$ эллиптического уравнения с частными производными*

$$F(x_1,\dots,x_n;z;\partial z/\partial x_1,\dots,\partial z/\partial x_n;\partial^2 z/\partial x_1^2,\dots,\partial^2 z/\partial x_n^2)=0$$

*2-го порядка, где $F$ — функция класса $C^1$, то тогда частные производные $\partial^2 z/\partial x_i\partial x_j$ 2-го порядка функции $z$ локально непрерывны по Гёльдеру в $U$.* Одновременно с Ниренбергом Ч. Морри получил аналогичный результат для эллиптических систем нелинейных уравнений 2-го порядка.

В настоящей статье получен такой же результат, но уже для эллиптических решений систем нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными произвольного порядка и весьма общего вида. В основе его доказательства лежат результаты исследований последних лет автора статьи, посвященных изучению явлений устойчивости в $C^l$-норме классов отображений. Библиогр. 10.

В работе [1] Л. Ниренберг опубликовал следующий хорошо известный результат. *Пусть $z : U \to \mathbb{R}$, $U$ — область (открытое связное множество) в вещественном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, является дважды непрерывно дифференцируемым решением эллиптического уравнения*

$$F(x_1,\dots,x_n;z;\partial z/\partial x_1,\dots,\partial z/\partial x_n;\partial^2 z/\partial x_1^2,\dots,\partial^2 z/\partial x_n^2)=0$$

*2-го порядка. Предположим, что $F$ — непрерывная функция, обладающая непрерывными частными производными 1-го порядка относительно всех своих аргументов. Тогда частные производные 2-го порядка $\partial^2 z/\partial x_i\partial x_j$ функции $z$ локально непрерывны по Гёльдеру в $U$.* Одновременно с Ниренбергом Ч. Морри получил аналогичный результат (см. [2]) в более общей ситуации эллиптических систем нелинейных уравнений 2-го порядка.

В настоящей работе мы устанавливаем, что свойством непрерывности по Гёльдеру обладают старшие производные эллиптических решений систем нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными произвольного порядка и весьма общего вида. Для формулирования результатов статьи нам необходимо ввести ряд понятий.

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99–01–00517), Международной ассоциации INTAS и государственной поддержке ведущих научных школ Российской Федерации.

Пусть

$$\mathfrak{L}_j(x; f_1(x), \dots, f_m(x); \dots, \partial^{p_1} f_\varkappa(x), \dots; \\ \dots, \partial^{p_2} f_\varkappa(x), \dots; \dots; \dots, \partial^{p_l} f \varkappa(x), \dots) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (1)$$

($x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$; $p_\nu = (p_{\nu 1}, p_{\nu 2}, \dots, p_{\nu n})$ — мультииндекс порядка $|p_\nu| = \sum\limits_{s=1}^{n} p_{\nu s} = \nu = 0, 1, \dots, l$; $\partial^{p_\nu} f_\varkappa = [(\partial_1)^{p_{\nu 1}} \circ (\partial_2)^{p_{\nu 2}} \circ \dots \circ (\partial_n)^{p_{\nu n}}] f_\varkappa$, $\partial_s = \partial / \partial x_s$, — частная производная функции $f_\varkappa$ ($= \partial^{p_0} f_\varkappa$), $\varkappa = 1, 2, \dots, m$, соответствующая мультииндексу $p_\nu$, причем в (1) используются символы всех таких частных производных вплоть до порядка $l$ каждой из функций $f_\varkappa$, $\varkappa = 1, 2, \dots, m$), — система $l$-го порядка с частными производными, составленная из $k$ (вообще говоря) нелинейных уравнений относительно $m$ искомых вещественных функций $f_\varkappa$, $\varkappa = 1, 2, \dots, m$, $n$ вещественных переменных. Здесь $\mathfrak{L}_j$ — вещественные непрерывные функции, обладающие непрерывными частными производными 1-го порядка относительно всех своих аргументов (функции класса $C^1$):

$$\mathfrak{L}_j = \mathfrak{L}_j(x; \dots, v_{p_0, \varkappa}, \dots; \dots, v_{p_1, \varkappa}, \dots; \dots; \dots, v_{p_l, \varkappa}, \dots), \qquad (2)$$

$(x; \dots, v_{p_0, \varkappa}, \dots; \dots, v_{p_1, \varkappa}, \dots; \dots; \dots, v_{p_l, \varkappa}, \dots) = y \in Y$, $Y$ — область пространства $\mathbb{R}^{N_l}$, $N_l = n + m \sum\limits_{\nu=0}^{l} n_\nu$, $n_\nu = \frac{(n+\nu-1)!}{\nu!(n-1)!}$, $\nu = 0, 1, \dots, l$.

Определение 1. Отображение $f : U \to \mathbb{R}^m$, $U$ — область в $\mathbb{R}^n$, называется *решением класса* $C^l = C^l(U, \mathbb{R}^m)$ ($C^l$-*решением*) системы (1), если 1) $f \in C^l$ и 2) для любого $x \in U$ точка

$$y = (x; \dots, \partial^{p_0} f_\varkappa(x), \dots; \dots, \partial^{p_1} f_\varkappa(x), \dots; \dots; \dots, \partial^{p_l} f_\varkappa(x), \dots)$$

принадлежит множеству $Y$ и удовлетворяет (1).

Определение 2. Система (1) называется *эллиптической*, если[1)]

$$\operatorname{rank} \left\{ \sum_{p_l} \zeta^{p_l} \begin{pmatrix} \partial_{v_{p_l,1}} \mathfrak{L}_1(y) & \dots & \partial_{v_{p_l,m}} \mathfrak{L}_1(y) \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial_{v_{p_l,1}} \mathfrak{L}_k(y) & \dots & \partial_{v_{p_l,m}} \mathfrak{L}_k(y) \end{pmatrix} \right\} = m \qquad (3)$$

для каждых $\zeta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и $y \in Y$. Решение $f : U \to \mathbb{R}^m$, $U$ — область в $\mathbb{R}^n$, класса $C^l$ системы (1) называется *эллиптическим*, если условие эллиптичности (3) выполняется в каждой точке $y = (x; \dots, \partial^{p_0} f_\varkappa(x), \dots; \dots, \partial^{p_1} f_\varkappa(x), \dots; \dots; \dots, \partial^{p_l} f_\varkappa(x), \dots)$, $x \in U$.

Замечание 1. В (1)–(3), как и всюду в настоящей работе, используются мультииндексные обозначения.

Замечание 2. В том случае, когда (1) — система линейных уравнений с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами, ее эллиптичность в смысле определения 1 эквивалентна эллиптичности этой системы в смысле понятий из [3].

Основной результат данной статьи представляет собой

[1)] Суммирование в (3) осуществляется с использованием всех мультииндексов $p_l$ порядка $|p_l| = l$.

**Теорема 1.** *Предположим, что функции* $\mathfrak{L}_j$ *в* (1), (2) *принадлежат классу* $C^1(Y)$, *т. е. являются непрерывными и обладают непрерывными частными производными 1-го порядка относительно всех своих аргументов в* $Y$. *Тогда частные производные* $l$*-го порядка любого эллиптического* $C^l$*-решения* $f : U \to \mathbb{R}^m$, $U$ — *область в* $\mathbb{R}^n$, *системы* (1) *локально в* $U$ *удовлетворяют условию Гёльдера с любым показателем* $\alpha$, *принадлежащим интервалу* $]0,1[$: *если* $0 < \alpha < 1$ *и* $E$ — *компактное подмножество области* $U$, *то существует число* $C_{\alpha,E} \geq 0$ *такое, что*

$$|\partial^{p_l} f_\varkappa(x') - \partial^{p_l} f_\varkappa(x'')| \leq C_{\alpha,E}|x' - x''|^\alpha, \tag{4}$$

$x', x'' \in E$, $|p_l| = l$, $\varkappa = 1, 2, \dots, m$.

Из определения эллиптичности решения системы (1) и из условий теоремы 1 вытекает, что эта теорема есть следствие такого утверждения.

**Теорема 1′.** *Предположим, что система* (1) *удовлетворяет условиям теоремы* 1 *и является эллиптической. Тогда каждое ее* $C^l$*-решение обладает свойством* (4).

Основу доказательства теоремы 1′ составляет следующая ниже теорема 2, которая представляет собой один из итогов исследований последних лет автора настоящей статьи, посвященных изучению явлений устойчивости в $C^l$-норме ($l = 0, 1, 2, \dots$) классов отображений [4–8]. В этой теореме изучаются свойства решений систем (5) уравнений в частных производных. Такого рода система является важным частным случаем систем, рассмотренных в [6–8], и имеет вид[2)]

$$\begin{aligned}&\mathfrak{L}_j(x; v_{l-1}(f,x); v^l(f,x))\\ &\qquad = \mathfrak{L}_j(x; v^0(f,x); v^1(f,x); \dots; v^{l-1}(f,x); v^l(f,x)) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k,\end{aligned} \tag{5}$$

где $v^\nu(f,x) = (\dots, \partial^{p_\nu} f_\varkappa(x), \dots)$ — совокупность значений в точке $x$ всех частных производных $\partial^{p_\nu} f_\varkappa(x)$ $\nu$-го порядка всех функций $f_\varkappa$, $\varkappa = 1, 2, \dots, m$ ($p_\nu$, как и выше, — мультииндекс порядка $\nu$), упорядоченная, например, лексикографическим способом (см. [6, 7]); $v_{l-1}(f,x) = (v^0(f,x);\ v^1(f,x); \dots; v^{l-1}(f,x))$; функции $\mathfrak{L}_j$ заданы на множестве $U_1 = U \times \prod\limits_{\nu=0}^{l} (\mathbb{R}^m)^{n_\nu}$ ($U$ — область в $\mathbb{R}^n$) пространства $\mathbb{R}^{N_l}$, для почти всех $x \in U$ (в смысле обычной меры Лебега в $\mathbb{R}^n$) принимают конечные значения $\mathfrak{L}_j(x; v_{l-1}; v^l) = \mathfrak{L}_j(x; v^0; v^1;\ \dots; v^{l-1}; v^l)$ всякий раз, когда $(v_{l-1}; v^l) = (v^0; v^1; \dots; v^{l-1};\ v^l) \in \prod\limits_{\nu=0}^{l} (\mathbb{R}^m)^{n_\nu}$, $v^\nu = (\dots, v_{p_\nu,\varkappa}, \dots) \in (\mathbb{R}^m)^{n_\nu}$, и допускают разложение

$$\mathfrak{L}(x; v_{l-1}; v^l) = V(x; v_{l-1}; v^l) + T(x; v_{l-1}) \tag{6}$$

($\mathfrak{L} = (\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \dots, \mathfrak{L}_k)$, $V = (V_1, V_2, \dots, V_k)$, $T = (T_1, T_2, \dots, T_k)$), которое удовлетворяет следующим условиям (ср. с условиями (i)–(iv) из статей [6–8]).

(a) *Функции* $V_j$, $j = 1, 2, \dots, k$, *измеримы, причем существуют неотрицательное вещественное число* $\varepsilon$ *и эллиптический линейный дифференциальный оператор*[3)]

$$D = (D_1, D_2, \dots, D_k) = \sum_{|p|=l} a_p \partial^p \tag{7}$$

[2)]Мы используем далее обозначения и понятия из работ [6–8].

[3)]Заметим, что условию эллиптичности линейного дифференциального оператора (7) можно придать следующий вид: $\operatorname{rank} \sigma_D(\zeta) = m$ для каждого $\zeta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, где $\sigma_D(\zeta) = \sum\limits_{|p|=l} \zeta^p a_p$ — символ оператора $D$.

*порядка* $l$ ($p$ — *мультииндекс,* $a_p = \left(a_p^{j\varkappa}\right)_{\substack{j=1,\dots,k\\ \varkappa=1,\dots,m}}$ — *вещественная* ($k\times m$)-*матрица) такие, что для почти каждой точки* $x\in U$

$$\left|V(x;v_{l-1};v^l) - \sum_{|p|=l} a_p\tilde v^p\right| \le \varepsilon |v^l|,$$

*если* $(v_{l-1};v^l)\in\mathbb{R}^{N_l-n}$ ($\tilde v^p$ — вектор пространства $\mathbb{R}^m$ с компонентами $v_{p,\varkappa} = v_{p_l,\varkappa}$, $\varkappa = 1,2,\dots,m$).

(b) *Отображение* $(x;v_{l-1})\mapsto T(x;v_{l-1})$ $(=\mathfrak{L}(x;v_{l-1};0))$, $(x;v_{l-1})\in U\times\mathbb{R}^{N_{l-1}-n}$, *измеримо. Кроме того, существует число* $q_0>n$ *такое, что*

1) *для почти всех точек* $x\in U$ *отображение* $T(x;\cdot) : v_{l-1}\mapsto T(x;v_{l-1})$, $v_{l-1}\in\mathbb{R}^{N_{l-1}-n}$, *удовлетворяет условию Липшица:*

$$\left|T\left(x;v'_{l-1}\right) - T\left(x;v''_{l-1}\right)\right| \le E(x)\left|v'_{l-1}-v''_{l-1}\right|, \quad v'_{l-1},v''_{l-1}\in\mathbb{R}^{N_{l-1}-n},$$

*где* $E$ *принадлежит пространству* $L_{q_0,\mathrm{loc}}(U,\mathbb{R})$ *вещественных функций, суммируемых локально (в* $U$*) в степени* $q_0$;

2) *для любого* $v_{l-1}\in\mathbb{R}^{N_{l-1}-n}$ *отображение* $T(\cdot;v_{l-1}) : x\mapsto T(x;v_{l-1})$, $x\in U$, *принадлежит* $L_{q_0,\mathrm{loc}}(U,\mathbb{R}^k)$ (из п. 1 вытекает, что достаточно предполагать выполнение условия $T(\cdot;v_{l-1})\in L_{q_0,\mathrm{loc}}(U,\mathbb{R}^k)$ хотя бы для одного $v_{l-1}\in\mathbb{R}^{N_{l-1}-n}$).

Определение 3 (ср. с определением 1 в [7]). *Решением класса Соболева*[4)] $W^l_{q,\mathrm{loc}}(U,\mathbb{R}^m)$ ($W^l_{q,\mathrm{loc}}(U,\mathbb{R}^m)$-*решением*) системы (5) называется любое отображение этого класса, удовлетворяющее (5) почти всюду в $U$.

Замечание. Здесь и ниже мы полагаем, что отображение $\mathfrak{L}$ в (5) — это лучший с точки зрения теории интеграла Лебега представитель отображений, отличающихся от $\mathfrak{L}$ разве что на множестве меры нуль, который в работе [8] определяется соотношениями (58), т. е.

$$\mathfrak{L}_j(y) = \varlimsup_{r\searrow 0}\frac{1}{r^{N_l}v_{N_l}}\int\limits_{\{w\in\mathbb{R}^{N_l},|w-y|<r\}}\mathfrak{L}_j(w)dw, \quad y\in U_1, \quad j=1,2,\dots,k.$$

Для дальнейшего нам необходимо напомнить определения оператора $D^0$ первого порядка, присоединенного в смысле понятий из [5] к дифференциальному оператору $D$ порядка $l$ с постоянными коэффициентами вида (7), и функций $\chi$ и $\chi^1$ из формулировок лемм 1 и 2 статьи [7]. С этой целью рассмотрим множество $\mathscr{O}=\mathscr{O}^{n,m,k,l}$ всех эллиптических линейных дифференциальных операторов вида (7).

Замечание. Далее мы используем еще и следующую запись оператора (7):

$$\begin{aligned} Dg(x) = \sum_{j=1}^k\{D_jg(x)\}e_j &= \sum_{1\le\mu_1\le\dots\le\mu_l\le n}\mathring{a}_{\mu_1\dots\mu_l}\partial_{\mu_1\dots\mu_l}g(x)\\ &= \sum_{j=1}^k\left\{\sum_{\varkappa=1}^m\sum_{1\le\mu_1\le\dots\le\mu_l\le n}\mathring{a}^{j\varkappa}_{\mu_1\dots\mu_l}\partial_{\mu_1\dots\mu_l}g_\varkappa(x)\right\}e_j \qquad (7')\end{aligned}$$

($e_1,\dots,e_k$ — канонический базис в $\mathbb{R}^k$).

---

[4)] $W^l_{q,\mathrm{loc}}(U,\mathbb{R}^m)$ — пространство всех отображений $g : U\to\mathbb{R}^m$, обладающих свойством: у каждой точки $x\in U$ существует окрестность $U_x\subset U$ такая, что $g|_{U_x}\in W^l_q(U_x,\mathbb{R}^m)$.

Определение 4 (см. [5, 7]). Линейный дифференциальный оператор 1-го порядка

$$D^0F(y) = \Biggl(\sum_{\varkappa=1}^{m} \sum_{1\le\mu_1\le\dots\le\mu_l\le n} \overset{\circ}{a}{}^{1\varkappa}_{\mu_1\dots\mu_l}\partial_{\mu_1}F_{\mu_2\dots\mu_l,\varkappa}(y), \dots,$$

$$\sum_{\varkappa=1}^{m} \sum_{1\le\mu_1\le\dots\le\mu_l\le n} \overset{\circ}{a}{}^{k\varkappa}_{\mu_1\dots\mu_l}\partial_{\mu_1}F_{\mu_2\dots\mu_l,\varkappa}(y), \dots, \partial_{\nu_1}F_{\nu_2\dots\nu_l,\varkappa}(y)$$

$$- \partial_{\nu_{\varphi(1)}}F_{\nu_{\varphi(2)}\dots\nu_{\varphi(l)},\varkappa}(y), \dots\Biggr) \quad (8)$$

($1 \le \nu_1 \le n$; $1 \le \nu_2 \le \dots \le \nu_l \le n$; $1 \le \varkappa \le m$; $\overset{\circ}{a}{}^{j\varkappa}_{\mu_1\dots\mu_l}$ — коэффициенты оператора $D$ в записи (7′); $\varphi = \varphi_\nu : \{1, \dots, l\} \to \{1, \dots, l\}$ — «упорядочивающая» по возрастанию значения отображения $\nu : \{1, \dots, l\} \to \{1, \dots, n\}$ биекция множества $\{1, \dots, l\}$: $\nu_{\varphi(1)} \le \dots \le \nu_{\varphi(l)}$) называется *присоединенным* к оператору $D$ из (7).

Отметим, что оператор $D^0$ эллиптичен в том и только том случае, если эллиптичен оператор $D$ [5], и что в случае, когда $m = 1$ и $D = \triangle = \sum\limits_{s=1}^{n}\partial_{ss}$, решение системы $D^0g = 0$ представляет собой систему сопряженных гармонических функций М. Рисса.

Пусть теперь при $t > 1$

$$\mathscr{O}_t = \mathscr{O}_t^{n,m,k,l} = \Bigl\{D = \sum_{|p|=l} a_p\partial^p \in \mathscr{O},\ \bigl|a_p^{j\varkappa}\bigr| \le t,\ j = 1, \dots, k,$$

$$\varkappa = 1, \dots, m,\ |p| = l,\ \inf_{\zeta\in\mathbb{R}^n,\, u\in\mathbb{R}^m,\, |\zeta|=1,\, |u|=1}\Bigl|\sum_{|p|=l}\zeta^p a_p u\Bigr| \ge 1/t\Bigr\}. \quad (9)$$

Замечание. В силу (9) $\bigcup\limits_{t>1}\mathscr{O}_t = \mathscr{O}$.

Упомянутые выше функции $\chi$ и $\chi^1$ можно определить (при $t > 1$) следующим способом:

$$\chi(t) = \inf_{D\in\mathscr{O}_t}\Lambda(D^0), \quad (10)$$

$$\Lambda(D^0) = \min_{\zeta\in\mathbb{R}^n, u\in\mathbb{R}^{mn_{l-1}},\, |\zeta|=1,\, |u|=1}|\sigma_{D^0}(\zeta)u|,$$

где $D^0$ — линейный дифференциальный оператор (8) первого порядка, присоединенный к оператору $D$, и[5])

$$\chi^1(t) = \sup_{D\in\mathscr{O}_t}\Biggl\{\sup_{2\le q<+\infty}\biggl[\frac{1}{q}\Upsilon_q\biggl(\frac{D^0}{\Lambda(D^0)}\biggr)\biggr]\Biggr\}. \quad (11)$$

Здесь

$$\Upsilon_q(D^0) = \sup_{h\in L_q(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^{k_0}),\, \|h\|_q=1}\|\overline{P}h\|_q$$

[5]) Обращаем внимание читателя на то, что в формулировке леммы 2 в [7] допущена опечатка: вместо «$\Upsilon_q(D^0/\lambda(D^0))$» должно быть «$\Upsilon_q(D^0/\Lambda(D^0))$».

$\bigl(\|h\|_q = \bigl\{\int\limits_{\mathbb{R}^n} |h(y)|^q dy\bigr\}^{1/q}\bigr)$ — $q$-норма сингулярного интегрального оператора $\overline{P} = (\overline{P}_1, \dots, \overline{P}_n)$ такого, что[6)]

$$(\overline{P}_s h)(x) = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_s} H_{D^0}(y-x) \right\}^T h(y)dy - \left[ \int\limits_{|y|=1} y_s \{H_{D^0}(y)\}^T ds \right] h(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{12}$$

При этом $H_{D^0} = D^0 U$, где, в свою очередь, $U$ — (матричнозначное) фундаментальное решение эллиптического линейного дифференциального оператора $L = (D^0)^* D^0$ второго порядка с постоянными коэффициентами ($(D^0)^*$ — формально сопряженный к $D^0$ оператор), которое при $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ определяется на основе символа $\sigma_L$ оператора $L$ формулами

$$U(y) = \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{4(2\pi)^{n-1}} \Delta^{(n-1)/2} \int\limits_{|\zeta|=1} |\langle y, \zeta \rangle| \sigma_L^{-1}(\zeta) ds_\zeta, \tag{13}$$

если $n$ нечетно, и

$$U(y) = \frac{(-1)^{n/2}}{2(2\pi)^n} \Delta^{n/2} \int\limits_{|\zeta|=1} |\langle y, \zeta \rangle|^2 \ln |\langle y, \zeta \rangle| \sigma_L^{-1}(\zeta) ds_\zeta, \tag{14}$$

если $n$ четно. Заметим, что $\Delta^\nu$ — «итерированный лапласиан», интегралы в (13) и (14), равно как и второй из интегралов справа в (12), вычисляются по единичной сфере в $\mathbb{R}^n$ относительно поверхностной меры и $\sigma_L^{-1} : \zeta \mapsto [\sigma_L(\zeta)]^{-1}$, $\zeta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, — отображение, которое точке $\zeta$ ставит в соответствие матрицу $[\sigma_L(\zeta)]^{-1}$, обратную матрице $\sigma_L(\zeta)$ (в силу определения $\sigma_L^{-1}$ связано с символом $\sigma_{D^0}$ оператора $D^0$ соотношением $\sigma_L^{-1}(\zeta) = [-\{\sigma_{D^0}(\zeta)\}^T \sigma_{D^0}(\zeta)]^{-1}$).

Замечание. Из лемм 1 и 2 работы [7] вытекает, что

$$0 < \chi(t) \quad (< +\infty)$$

и

$$(0 <) \quad \chi^1(t) < +\infty,$$

$t > 1$.

**Теорема 2.** *Для каждых числа $q_0 > n$ и эллиптического линейного дифференциального оператора $D$ вида* (7) *существует положительное число $\varepsilon = \varepsilon(q_0, D)$ такое, что если для системы* (5) *выполнены условия* (a) *и* (b), *в которых роль параметров и эллиптического оператора играют $q_0$, $\varepsilon(q_0, D)$ и $D$, а вещественное число $q$ удовлетворяет неравенству $q > n$, то каждое $W^l_{q,\mathrm{loc}}(U, \mathbb{R}^m)$-решение $f : U \to \mathbb{R}^m$ этой системы принадлежит пространству $W^l_{q_0,\mathrm{loc}}(U, \mathbb{R}^m)$. Кроме того, для каждой точки $x_0 \in U$ существует число $\tau > 0$ такое, что шар $B_n(x_0, \tau) = \{x \in \mathbb{R}^n, |x - x_0| < \tau\}$ содержится в области $U$ вместе со своим замыканием и для любых двух точек $x', x'' \in B_n(x_0, \tau/4)$ и любого мультииндекса $p_{l-1}$ порядка $l-1$ выполняется неравенство*

$$\begin{aligned} \bigl|\partial^{p_{l-1}} f(x') - \partial^{p_{l-1}} f(x'')\bigr| \le \Biggl\{ & C_1 \max_{|x-x_0|=\tau/2} \bigl| v^{l-1}(f, x) - v^{l-1}(f, x_0) \bigr| \\ & + C_2 \tau^{1-l} \left[ \rho_1 \frac{1}{1-\zeta_0^n} + \rho_2 \frac{(1-\zeta)^{-(n-1)}}{1-\zeta_0^n \zeta^{-(n-1)}} + \rho_3 \frac{(1-\zeta)^{-n}}{1-\zeta_0^n \zeta^{-n}} \right] \Biggr\} \tau^{n/q_0 - 1} |x' - x''|^{1-n/q_0}, \end{aligned} \tag{15}$$

---

[6)] $\{\cdot\}^T$ — операция транспонирования матриц.

*где*

$$\rho_1 = [\chi(t)]^{-1}\tau^{l-n/q_0}\Bigg[\|T(\cdot;0)\|_{q_0,B(x_0,\tau)} + \tau^{1-l}\|E\|_{q_0,B(x_0,\tau)} \sum_{0\le|p^1+p^2|\le l-2} \frac{1}{(p^1)!}\tau^{|p^1+p^2|}\Big|\partial^{p^1+p^2}f(x_0)\Big|\Bigg] \tag{16}$$

($p^1, p^2$ — *мультииндексы*),

$$\rho_2 = C_3\tau^{l-n/q_0}\|E\|_{q_0,B(x_0,\tau)} \max_{|x-x_0|\le\tau}|v^{l-1}(f,x)|, \tag{17}$$

$$\rho_3 = C_4\tau^{l-1} \max_{|x-x_0|\le\tau}|v^{l-1}(f,x) - v^{l-1}(f,x_0)|, \tag{18}$$

$$\zeta_0 = \{[\varepsilon_1 q_0\chi^1(t)+1]/2\}^{1/n}, \tag{19}$$

$$\zeta_0 < \zeta < 1,$$

$$\varepsilon/\chi(t) < \varepsilon_1 < 1/\big[q_0\chi^1(t)\big]. \tag{20}$$

*В* (15)–(20) *величины* $C_1$–$C_4$ *зависят только лишь от* $n$, $m$, $l$, $q_0$ *и оператора* $D$; $t = \max\{\tilde{t}, 2\}$, *при этом* $\tilde{t}$ *представляет собой наименьшее из чисел* $\lambda$, *удовлетворяющих неравенствам*

$$|a_p^{j\varkappa}| \le \lambda, \quad j = 1,2,\dots,k, \quad \varkappa = 1,2,\dots,m, \quad |p| = l,$$
$$\inf_{\zeta\in\mathbb{R}^n, u\in\mathbb{R}^m, |\zeta|=1, |u|=1}\Big|\sum_{|p|=l}\zeta^p a_p u\Big| \ge 1/\lambda \tag{21}$$

($a_p^{j\varkappa}$ — *коэффициенты оператора* $D$); *параметр* $\varepsilon = \varepsilon(q_0, D)$ *выбирается столь малым, чтобы выполнялось неравенство*

$$\varepsilon/\chi(t) < 1/[q_0\chi^1(t)];$$

*наконец,* $\chi$ *и* $\chi^1$ *— это функции, определенные соотношениями* (10) *и* (11).

Замечание. Отображение $f$ в формулировке теоремы 2 — это лучший с точки зрения теории интеграла представитель в классе отображений, эквивалентных $f$ (т. е. совпадающих с $f$ почти всюду в $U$), который в силу условия $f \in W^l_{q,\mathrm{loc}}(U, \mathbb{R}^m)$, $q > n$, и теорем вложения для пространств Соболева принадлежит $C^{l-1}(U, \mathbb{R}^m)$.

Доказательство теоремы 2 основывается на результатах, идеях и методах из работ [6–8].

В самом деле, рассматривая число $q_0 > n$ и эллиптический линейный дифференциальный оператор $D$ с постоянными коэффициентами вида (7), выберем в качестве $\varepsilon(q_0, D)$ число $\varepsilon$, удовлетворяющее неравенствам

$$0 < \varepsilon < \frac{\chi(t)}{q_0\chi^1(t)}. \tag{22}$$

Если $f : U \to \mathbb{R}^m$ — $W^l_{q,\mathrm{loc}}(U, \mathbb{R}^m)$-решение системы (5), $q > n$, то в силу (22) и того, что система (5) является частным случаем систем (1) статьи [7], теорема 4 работы [8] (см. также теорему 1 в [7]) и замечание, помещенное в конце статьи [7], влекут принадлежность отображения $f$ классу $W^l_{q_0,\mathrm{loc}}(U, \mathbb{R}^m)$. Тем самым первое из утверждений теоремы доказано.

Что же касается второго, то фиксируя точку $x_0 \in U$, подберем число $\tau = \tau(x_0) > 0$ так, чтобы выполнялись соотношения $\tau < 1$, $\operatorname{cl} B(x_0,\tau) = \operatorname{cl} B_n(x_0,\tau) \subset U$ и[7)]

$$2^{1-n/q_0}\left(nv_n\frac{q_0-1}{q_0-n}\right)^{1-1/q_0} c_l[\chi(t)]^{-1}[\max_{|w|=1}\|H_{D^0}(w)\|]\tau^{l-n/q_0} \times \|E\|_{q_0,B(x_0,\tau)} \le \frac{1-\varepsilon_1 q_0\chi^1(t)}{2}, \quad (23)$$

где $v_n$ — объем $n$-мерного единичного шара,

$$c_l = \left\{(l-1)!\sum_{s=1}^{l-1}\frac{1}{(s!)^2}+1\right\}^{1/2}, \quad l=2,3,\dots, \quad c_1 = 1, \quad (24)$$

$D^0$ — присоединенный в смысле определения 4 к оператору $D$ дифференциальный оператор 1-го порядка, $H_{D^0}$ — фундаментальное решение системы

$$(D^0)^*H(x) = 0,$$

наконец, $E$ — это функция из условия (b), которому согласно условию нашей теоремы удовлетворяет система (5).

Используя обозначения из статьи [7], положим далее

$$\tilde f(z) = f(\tau z + x_0), \quad z \in B = B_n(0,1), \quad (25)$$

и

$$F_{\tilde f} = (\dots, F_{s_1,\dots,s_{l-1},\varkappa}, \dots) : B \to \mathbb{R}^{mn_{l-1}}, \quad (26)$$

где скалярные функции-компоненты отображения $F_{\tilde f}$

$$F_{s_1,\dots,s_{l-1},\varkappa} = \partial_{s_1\dots s_{l-1}}\tilde f_\varkappa, \quad 1 \le s_1 \le \dots \le s_{l-1} \le n, \quad \varkappa = 1,\dots,m, \quad (27)$$

представляют собой частные производные $(l{-}1)$-го порядка функций $\tilde f_\varkappa$ (ср. (25)–(27) с (19) и (25) в [7]). Согласно теореме 3.2.2 из [9, гл. 3] для отображения $F_{\tilde f}$ при $y \in B_r = B_n(0,r)$, $0 < r \le 1$, имеет место представление

$$F_{\tilde f}(z) = \Phi_r(z) + (R_r(D^0F_{\tilde f}))(z), \quad (28)$$

при этом почти всюду в $B_r$

$$F'_{\tilde f}(z) = \Phi'_r(z) + (\overline{P}_r(D^0F_{\tilde f}))(z),$$

($g'(z)$ — производная (дифференциал) 1-го порядка отображения $g : U \to \mathbb{R}^{mn_{l-1}}$ в точке $z$: $[g(z+\delta)-g(z)-g'(z)\delta]/|\delta| \to 0$, когда $\delta \to 0$. Как и в [7], эту производную мы отождествляем с элементом пространства $\mathbb{R}^{nmn_{l-1}}$. В случае, когда $g$ принадлежит пространству $W^1_{1,\mathrm{loc}}(X, \mathbb{R}^{mn_{l-1}})$, $X$ — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, производная $g'(z)$ определяется формально на основе обобщенных частных производных почти всюду в $X$). В (28)

$$\Phi_r(z) = -\int\limits_{|u|=r}[H_{D^0}(u-z)]^T\sigma_{D^0}\left(\frac{u}{|u|}\right)F_{\tilde f}(u)\,ds_u,$$

[7)] Ср. неравенство (23) с соотношениями, рассмотренными в конце с. 873 в [7] (при этом в последних вместо «$2^{(1-n)/q_0}$» следует читать «$2^{1-n/q_0}$»).

$$(R_r g)(z) = \int\limits_{|u|<r} [H_{D^0}(u-z)]^T g(u)\, du, \quad z \in B_r,$$

$$\overline{P}_r g = (R_r g)',$$

где $g \in L_{q,\mathrm{loc}}(B_r, \mathbb{R}^{k_0})$, $k_0 = k + m \sum\limits_{\nu=2}^{\min\{l,n\}} \frac{n!(l-1)!}{\nu!(n-\nu)!(\nu-2)!(l-\nu)!}$, $q > 1$, и, как и выше, $\sigma_{D^0}$ — символ дифференциального оператора $D^0$, присоединенного к оператору $D$, и $H_{D^0}$ — фундаментальное решение системы $(D^0)^* H(x) = 0$. Заметим, что $\overline{P}$ совпадает с оператором (12) (см. [9, гл. 3]).

Рассмотрим случай $r = 1/2$. Если $z', z'' \in B_{1/4}$, то

$$|\Phi_{1/2}(z') - \Phi_{1/2}(z'')| \le |z' - z''| \max_{z \in B_{1/4}} |\Phi'_{1/2}(z)|. \tag{29}$$

Учитывая еще лемму 3.3.1 из [9, гл. 3], имеем

$$\begin{aligned}|\Phi'_{1/2}(z)| &\le c(D^0) \int\limits_{|w|=1/2} \frac{\left|F_{\tilde f}(w) - F_{\tilde f}(0)\right|}{|w-z|^n}\, ds_w \\ &\le 2^{n+1} n v_n c(D^0) \max_{|w|=1/2} |F_{\tilde f}(w) - F_{\tilde f}(0)|, \quad z \in B_{1/4}, \end{aligned} \tag{30}$$

где

$$c(D^0) = A_{D^0} \left\{ \sum_{s=1}^{n} [\max_{|u|=1} \|\partial_s H_{D^0}(u)\|]^2 \right\}^{1/2}, \tag{31}$$

$$A_{D^0} = \max_{|\zeta|=1, |u|=1} |\sigma_{D^0}(\zeta) u|. \tag{32}$$

Тем самым

$$\begin{aligned}|\Phi_{1/2}(z') - \Phi_{1/2}(z'')| &\le 2^{n+1} n v_n c(D^0) |z' - z''| \max_{|w|=1/2} |F_{\tilde f}(w) - F_{\tilde f}(0)| \\ &\le 2^{n+1-n/q_0} n v_n c(D^0) |z' - z''|^{1-n/q_0} \max_{|w|=1/2} |F_{\tilde f}(w) - F_{\tilde f}(0)|, \quad z', z'' \in B_{1/4}. \end{aligned} \tag{33}$$

Далее, в силу леммы 3.2.5 монографии [9, гл. 3]

$$\begin{aligned}|(R_{1/2}(D^0 F_{\tilde f}))(z') - (R_{1/2}(D^0 F_{\tilde f}))(z'')| &\le 2^{n+1} v_n^{-1/q_0} (1 - n/q_0)^{-1} \\ \times (m n_{l-1})^{(q_0-2)/2q_0} \Upsilon_{q_0}(D^0) |z' - z''|^{1-n/q_0} &\|D^0 F_{\tilde f}\|_{q_0, B_{1/2}}, \quad z', z'' \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{34}$$

В то же время из (10)–(14) вытекает, что

$$\Upsilon_{q_0}(D^0) = \Upsilon_{q_0}\left(\Lambda(D^0) \frac{D^0}{\Lambda(D^0)}\right) = \frac{1}{\Lambda(D^0)} \Upsilon_{q_0}\left(\frac{D^0}{\Lambda(D^0)}\right) \le \frac{q_0 \chi^1(t)}{\chi(t)}, \tag{35}$$

где $t = \max\{\tilde t, 2\}$, $\tilde t = \inf\{\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda$ удовлетворяет неравенствам (21)$\}$. Следовательно, соотношения (28)–(35) приводят нас к неравенству

$$|F_{\tilde f}(z') - F_{\tilde f}(z'')| \le \{C_1 \max_{|w|=1/2} |F_{\tilde f}(w) - F_{\tilde f}(0)| + C_2 \|D^0 F_{\tilde f}\|_{q_0, B_{1/2}}\} |z' - z''|^\alpha,$$

$z', z'' \in B_{1/4}$, где $\alpha = 1 - n/q_0$,

$$C_1 = 2^{n+1-n/q_0} n v_n c(D^0)$$

и

$$C_2 = 2^{n+1} v_n^{-1/q_0} \frac{q_0^2}{q_0 - n} (mn_{l-1})^{(q_0-2)/2q_0} \frac{\chi^1(t)}{\chi(t)},$$

которому в силу (25)–(27) можно придать следующий вид:

$$|\partial^{p_{l-1}} f(x') - \partial^{p_{l-1}} f(x'')| \le \{C_1 \max_{|x-x_0|=\tau/2} |v^{l-1}(f,x) - v^{l-1}(f,x_0)| \\ + C_2 \tau^{1-l} \|D^0 F_{\tilde f}\|_{q_0, B_{1/2}}\} |z' - z''|^\alpha, \quad x', x'' \in B(x_0, \tau/4).$$

Нам осталось показать, что если число $\varepsilon_1$ удовлетворяет неравенствам (20), число $\zeta_0$ определено посредством (19) и $\zeta_0 < \zeta < 1$, то

$$\|D^0 F_{\tilde f}\|_{q_0, B_{1/2}} \le \rho_1 \frac{1}{1 - \zeta_0^n} + \rho_2 \frac{(1-\zeta)^{-(n-1)}}{1 - \zeta_0^n \zeta^{-(n-1)}} + \rho_3 \frac{(1-\zeta)^{-n}}{1 - \zeta_0^n \zeta^{-n}}, \tag{36}$$

где $\rho_1$, $\rho_2$ и $\rho_3$ — те же величины, что и в (16)–(18).

Собственно, неравенство (36) ранее было доказано в подобной ситуации в [7, с. 875]. Но величины $\rho_i$, $i = 1, 2, 3$, там имели несколько иной вид. Мы сейчас внесем необходимые изменения в доказательство этого неравенства в [7], которые позволят получить его в искомой форме (36). При этом можно полагать, что параметры $\varepsilon'$ и $\varepsilon''$ из доказательства теоремы 1 в [7] в обсуждаемом сейчас случае совпадают с параметрами $\varepsilon$ и $\varepsilon_1$. Но прежде, чем приступить к детальному обсуждению неравенства (36), мы сделаем еще ряд замечаний.

Во-первых, мы утверждаем, что неравенства (20) настоящей статьи и неравенства (34) в [7] суть одно и тоже. В самом деле, в силу определения (11) функции $\chi^1$ и теоремы 3.3.2 из [9, гл. 3]

$$\chi^1(t) \ge 1/q, \quad 2 \le q < +\infty.$$

Последнее неравенство влечет соотношение

$$\min\{1, 1/[q_0 \chi^1(t)]\} = 1/[q_0 \chi^1(t)],$$

а вместе с ним и упомянутое выше совпадение неравенств (20) данной работы и неравенств (34) статьи [7].

Второе замечание связано с неравенством (18) в [7]. Как указано в конце статьи [8], при предъявлении этого неравенства в [7] допущены неточности в записях. Учитывая это обстоятельство, важность неравенства (18) статьи [7] для излагаемого в настоящей работе и исходя из соображений удобства для читателя, мы приведем сейчас доказательство указанного неравенства (в интересующей нас ситуации).

К неравенству (18) в [7] мы приходим, оценивая величину $|T^\tau(y; v_{l-1,1}) - T^\tau(y; v_{l-1,2})|$ (см. неравенство (17) в [7]). В рассматриваемом в настоящей работе случае отображение $T^\tau$ (определяемое в [7] равенством (14)) выглядит так:

$$T^\tau(z; v_{l-1}) = T^\tau(z; v^0; v^1; \ldots; v^{l-1}) = \tau^l T(\tau z + x_0; v^0; \tau^{-1} v^1; \ldots; \tau^{-(l-1)} v^{l-1}),$$

где $T$ — отображение из соотношений (6) данной статьи. Но тогда в силу свойств последнего (см. выше условие (b)) и того, что $\tau < 1$, для почти всех $z \in B$ $(= B(0,1))$ имеем

$$|T^\tau(z; v_{l-1,1}) - T^\tau(z; v_{l-1,2})| \le \tau^l E(\tau z + x_0) \{|v_1^0 - v_2^0|^2 \\ + \tau^{-2} |v_1^1 - v_2^1|^2 + \cdots + \tau^{-2(l-1)} |v_1^{l-1} - v_2^{l-1}|^2\}^{1/2} \le \tau E(\tau z + x_0) |v_{l-1,1} - v_{l-1,2}|,$$

$v_{l-1,i} = (v_i^0; v_i^1; \dots; v_i^{l-1}) \in \mathbb{R}^{N_{l-1}-n}$, $i = 1, 2$. Следовательно,

$$\|E^\tau\|_{q_0,B} \le \tau^{1-n/q_0} \|E\|_{q_0,B(x_0,\tau)}. \tag{37}$$

Тем самым аналог неравенства (18) из работы [7] получен. Доказательство самого неравенства (18) статьи [7] осуществляется тем же способом, что и в случае неравенства (37), при этом окончательная форма записи первого следующая:

$$\|E^\tau\|_{q_0,B} = \left\{ \int\limits_B [E^\tau(y)]^{q_0} dy \right\}^{1/q_0}$$
$$\le \tau^{1-n/q_0} c(\beta) b(\omega) |J_\omega|^{1/q_0} c(\psi, x_0, r_0) \|E\|_{q_0,\omega^{-1}(B(z_0,\tau))}. \tag{38}$$

Следующее замечание касается параметра $\nu$, введенного в соотношениях (36) в [7][8)]: ради упрощения записи мы полагаем ниже $\nu = 1/2$.

Наконец, мы обращаем внимание читателя на те описки и опечатки в статье [7], которые указаны в конце работы [8] и которые необходимо учитывать при ознакомлении с доказательством теоремы 1 в [7].

Итак, обратимся к обсуждению доказательства неравенства (36). С этой целью напомним прежде всего, что

$$\rho_1 = \rho_1^1 + \rho_1^2 \tag{39}$$

(см. [7, с. 874, 875]). В рассматриваемом в настоящей статье случае

$$\rho_1^1 = [\chi(t)]^{-1} \tau^{l-n/q_0} \|T(\cdot; 0)\|_{q_0,B(x_0,\tau)}. \tag{40}$$

Для второго же слагаемого в (39) имеем

$$\rho_1^2 = [\chi(t)]^{-1} \|E^\tau(\cdot) |\Lambda_{l-2,\tilde f}(\cdot)|\|_{q_0,B}, \tag{41}$$

где $\Lambda_{l-2,\tilde f}$ — отображение, построенное по отображению $\tilde f$ способом, предложенным в [7, с. 867], причем, как легко показать,

$$|\Lambda_{l-2,\tilde f}(z)| \le \sum_{\nu=0}^{l-2} \sum_{1 \le s_1 \le \dots \le s_\nu \le n} |\Lambda^{l-\nu-2}_{\partial_{s_1 \dots s_\nu} \tilde f}(z)|$$
$$\le \sum_{0 \le |p^1+p^2| \le l-2} \frac{1}{(p^1)!} \tau^{|p^1+p^2|} |\partial^{p^1+p^2} f(x_0)|, \quad |z| \le 1. \tag{42}$$

Из (39)–(42) вытекает, что в качестве $\rho_1$ можно принять число, определяемое формулой (16).

Далее, к параметру $\rho_2$ мы приходим, оценивая величину

$$\sqrt{2} c_l [\chi(t)]^{-1} \|E^\tau(\cdot) |\Phi_\mu(\cdot)|\|_{q_0,B^{\mu-1}},$$

где $c_l$ определяется равенством (24) и (как и в [7, формулы (38)])

$$\Phi_\mu(z) = -\int\limits_{|u|=r_\mu} [H_{D^0}(u-z)]^T \sigma_{D^0}\left(\frac{u}{|u|}\right) F_{\tilde f}(u) ds_u, \quad |z| < r_\mu,$$

8) В соотношениях (36) в [7] вместо «$y \in B^0$ $(= B(0, 1-\nu))$» следует читать «$y \in B^0$ $(= B(0, \nu))$».

$r_\mu = 1-(1-\nu)\zeta^\mu = 1-\zeta^\mu/2$, $B^\mu = B(0, r_\mu)$, $\mu = 0, 1, 2, \dots$. Так как при $|z| \le r_{\mu-1}$

$$|\Phi_\mu(z)| \le cA_{D^0} \int\limits_{|u|=r_\mu} \frac{|F_{\tilde f}(u)|}{|u-z|^{n-1}}\, ds_u \le cA_{D^0}\{\max_{|u|=r_\mu} |F_{\tilde f}(u)|\} nv_n \frac{\zeta^{-(\mu-1)(n-1)}}{[(1-\nu)(1-\zeta)]^{n-1}}$$

$$\le 2^{n-1} nv_n cA_{D^0}\tau^{l-1}\{\max_{|x-x_0|\le\tau} |v^{l-1}(f,x)|\}\frac{\zeta^{-(\mu-1)(n-1)}}{(1-\zeta)^{n-1}}, \quad c = \max_{|u|=1} \|H^T_{D^0}(u)\|$$

($A_{D^0}$ — величина, определяемая посредством (32)), то

$$\sqrt{2}c_l[\chi(t)]^{-1}\|E^\tau(\cdot)|\Phi_\mu(\cdot)|\|_{q_0,B^{\mu-1}} \le \sqrt{2}c_l[\chi(t)]^{-1}\|E^\tau\|_{q_0,B}\{\max_{z\in B^{\mu-1}} |\Phi_\mu(z)|\}$$
$$\le \sqrt{2}c_l[\chi(t)]^{-1}\tau^{1-n/q_0}\|E\|_{q_0,B(x_0,\tau)} 2^{n-1} nv_n cA_{D^0}\tau^{l-1}\{\max_{|x-x_0|\le\tau} |v^{l-1}(f,x)|\}$$
$$\times \frac{\zeta^{-(\mu-1)(n-1)}}{(1-\zeta)^{n-1}} = 2^{n-1/2} nv_n c_l[\chi(t)]^{-1} cA_{D^0}\tau^{l-n/q_0}\|E\|_{q_0,B(x_0,\tau)}$$
$$\times \{\max_{|x-x_0|\le\tau} |v^{l-1}(f,x)|\}\frac{\zeta^{-(\mu-1)(n-1)}}{(1-\zeta)^{n-1}}.$$

Таким образом, согласно [7, с. 874] в качестве $\rho_2$ можно принять величину (17), где

$$C_3 = 2^{n-1/2} nv_n c_l[\chi(t)]^{-1} cA_{D^0}.$$

Наконец, параметр $\rho_3$ мы получаем, оценивая величину $\varepsilon_1\|\Phi'_\mu\|_{q_0,B^{\mu-1}}$ (см. [7, с. 874, 875]). Рассуждая так же, как и при выводе соотношений (30), учитывая, что если $|w| = r_\mu$ и $|z| \le r_{\mu-1}$, то $|w-z| \ge r_\mu - r_{\mu-1} = \zeta^\mu(1-\zeta)/2$, и используя при этом соотношения (25)–(27), последовательно имеем

$$\varepsilon_1\big\|\Phi'_\mu\big\|_{q_0,B^{\mu-1}} \le \varepsilon_1 c(D^0)\bigg\{\int\limits_{B^{\mu-1}}\bigg[\int\limits_{|w|=r_\mu}\frac{|F_{\tilde f}(w)-F_{\tilde f}(0)|}{|w-z|^n}ds_w\bigg]^{q_0} dz\bigg\}^{1/q_0}$$
$$\le \varepsilon_1 2^n nv_n^{1+\frac{1}{q_0}} c(D^0)\tau^{l-1}\{\max_{|x-x_0|\le\tau}|v^{l-1}(f,x)-v^{l-1}(f,x_0)|\}\frac{\zeta^{-(\mu-1)n}}{(1-\zeta)^n}$$
$$\le [q_0\chi^1(t)]^{-1}2^n nv_n^{1+\frac{1}{q_0}} c(D^0)\tau^{l-1}\{\max_{|x-x_0|\le\tau}|v^{l-1}(f,x)-v^{l-1}(f,x_0)|\}\frac{\zeta^{-(\mu-1)n}}{(1-\zeta)^n},$$

$c(D^0)$ — величина из (31) (здесь мы воспользовались неравенствами (20)). Тем самым в качестве $\rho_3$ можно принять величину (18) с

$$C_4 = [q_0\chi^1(t)]^{-1}2^n nv_n^{1+\frac{1}{q_0}} c(D^0).$$

Доказательство теоремы 2 завершено.

Замечание 1. Как следует из доказательства теоремы 2 выбор параметра $\tau = \tau(x_0)$ в ее формулировке определяется (только лишь!) условиями $0 < \tau < 1$ и $\operatorname{cl} B(x_0,\tau) \subset U$ и неравенством (23).

Замечание 2. Доказательство теоремы 1 статьи [7] и, следовательно, теоремы 2 данной работы проведено, собственно, в том случае, когда порядок рассматриваемой системы $l \ge 2$. Это доказательство (с небольшими изменениями) сохраняет свою силу и в случае $l = 1$. Суть этих изменений состоит в том, что если $l = 1$, то обе эти теоремы доказываются непосредственно по тому же плану, что и теорема 3.4.1$''$ из [9, гл. 3, § 3.4], с использованием теоремы 1 из [8]. При этом в формулировке теоремы 2 настоящей статьи $\partial^{p_{l-1}}f$ и $v^{l-1}(f,\cdot)$ заменяются на $f$, в качестве присоединенного оператора $D^0$ к оператору $D$ выступает сам оператор $D$, $\chi(t)=t^{-1}$,

$$\rho_1 = t\tau^{1-n/q_0}\|T(\cdot;0)\|_{q_0,B(x_0,\tau)}$$

и

$$C_3 = 2^{n-1}nv_n tcA_D.$$

Замечание 3. Полезно отметить, что в ходе доказательства теоремы 2 мы установили истинность такого утверждения

**Теорема 3.** *В условиях теоремы* 2

$$\|\partial^{p_l}f\|_{q_0,B(x_0,\tau/2)} \le \tau^{n/q_0-l}\left\{\rho_1\frac{1}{1-\zeta_0^n}+\rho_2\frac{(1-\zeta)^{-(n-1)}}{1-\zeta_0^n\zeta^{-(n-1)}}+\rho_3\frac{(1-\zeta)^{-n}}{1-\zeta_0^n\zeta^{-n}}\right\}.$$

При этом сама теорема 2 является прямым следствием последней теоремы.

Доказательство теоремы $1'$. Рассматривая $C^l$-решение $f:U\to\mathbb{R}^m$ эллиптической системы (1), удовлетворяющей условиям теоремы, построим разностное отношение

$$f_s^h(x)=\frac{f(x+he_s)-f(x)}{h},$$

$s=1,2,\dots,n$, где $h$ — малое вещественное число ($e_1,e_2,\dots,e_n$ — канонический базис в $\mathbb{R}^n$, степень малости параметра $h$ мы будем уточнять по ходу доказательства и для определенности будем полагать $h>0$). Ясно, что при достаточно малом значении параметра $h$ отображение $f_h^s$ есть решение системы

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_h^s\big(x;v_{l-1}\big(f_h^s,x\big);v^l\big(f_h^s,x\big)\big) = h^{-1}\big\{\mathfrak{L}\big(x+he_s;v_{l-1}(f,x)+hv_{l-1}\big(f_h^s,x\big);\\ v^l(f,x)+hv^l\big(f_h^s,x\big)\big)-\mathfrak{L}(x;v_{l-1}(f,x);v^l(f,x))\big\}=0.\end{aligned}\tag{43}$$

Так как изучение свойства гёльдеровости старших производных отображения $f$ осуществляется нами на локальном уровне, то мы зафиксируем далее точку $x_0\in U$ и изберем следующий план действий. Мы постараемся выбрать столь малую окрестность этой точки и столь малое число $h$, что ограничение отображения $f_h^s$ на эту окрестность будет представлять собой решение системы вида (5), удовлетворяющей условиям (a) и (b) со сколь угодно малым значением параметра $\varepsilon$ и сколь угодно большим значением параметра $q_0$ (степень малости величин $\varepsilon$ и $1/q_0$ предписывается заранее). Последнее окажется возможным в силу эллиптичности системы (1), $C^1$-гладкости функций $\mathfrak{L}_j$ и $C^l$-гладкости отображения $f$. При этом роль $D$ будет играть оператор

$$\sum_{p_l}\{(\partial_{v_{p_l,\varkappa}}\mathfrak{L}_j(y_0))_{\substack{j=1,\dots,k\\ \varkappa=1,\dots,m}}\}\partial^{p_l},\tag{44}$$

$$\begin{aligned}y_0 &= (x_0;v_{l-1}(f,x_0);v^l(f,x_0))\\ &= (x_0;\dots,\partial^{p_0}f_\varkappa(x_0),\dots;\dots,\partial^{p_1}f_\varkappa(x_0),\dots;\dots;\dots,\partial^{p_l}f_\varkappa(x_0),\dots),\end{aligned}$$

выбор функций $E=E_h^s$ не будет зависеть от $h$, для отображений $T(\cdot;0)=T_h^s(\cdot;0)$ будет иметь место представление

$$T_h^s(x;0)=\int\limits_0^1\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial x_s}(x+\tau he_s;v_{l-1}(f,x);v^l(f,x))\,d\tau\tag{45}$$

и тем самым в малой окрестности точки $x_0$ эти отображения будут равномерно относительно $h$ ограничены.

Учитывая теорему 2 и замечание к ней, мы сможем в итоге заключить, что в некоторой окрестности точки $x_0$ неравенство (15) для отображений $f_h^s$ выполняется равномерно по $h$. Следовательно, устремляя $h$ к нулю, убеждаемся в справедливости теоремы $1'$.

Перейдем к реализации намеченного плана.

С этой целью прежде всего заметим, что без умаления общности можно полагать $v_{l-1}(f, x_0) = 0$ и $v^l(f, x_0) = 0$ (вычитая, если потребуется, из решения $f$ системы (1) его многочлен Тейлора степени $l$ в точке $x_0$). Понятно, что можно полагать также $x_0 = 0$.

Предположим далее, что число $\alpha$ больше 0 и меньше 1. Пусть

$$q_0 = \frac{n}{1-\alpha}, \tag{46}$$

и пусть $t = \max\{\tilde{t}, 2\}$, где $\tilde{t}$ — наименьшее из чисел $\lambda$, удовлетворяющих неравенствам

$$\left|a_p^{j\varkappa}\right| \le \lambda, \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad \varkappa = 1, 2, \dots, m, \quad |p| = l,$$
$$\inf_{\zeta \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, |\zeta|=1, |u|=1} |\sigma_D(\zeta)u| \ge 1/\lambda,$$

в которых $D$ — эллиптический линейный дифференциальный оператор (44). Отправляясь от этих параметров и $C^1$-гладкости отображения $\mathfrak{L}$, подберем окрестность $G$ точки $y_0 = (0; 0; 0)$ $(\operatorname{cl} G \subset Y)$ вида

$$G = B_n(0, r_1) \times B_{N_{l-1}-n}(0, r_2) \times B_{mn_l}(0, r_3),$$

где участвующие в построении декартова произведения множества суть $n$-мерный, $(N_{l-1} - n)$-мерный и $mn_l$-мерный шары: $B_n(0, r_1) \subset \mathbb{R}^n$, $B_{N_{l-1}-n}(0, r_2) \subset \mathbb{R}^{N_{l-1}-n}$, $B_{mn_l}(0, r_3) \subset \mathbb{R}^{mn_l}$, так, чтобы

$$\left\|\mathfrak{L}'_{v^l}(x; v_{l-1}; v^l) - \mathfrak{L}'_{v^l}(0; 0; 0)\right\| \le \varepsilon < \frac{\chi(t)}{q_0 \chi^1(t)}, \quad (x; v_{l-1}; v^l) \in \operatorname{cl} G. \tag{47}$$

Здесь $\mathfrak{L}'_{v^l}(x; v_{l-1}; v^l)$ — производная (частный дифференциал) по переменному $v^l$ отображения $\mathfrak{L}$ в точке $(x; v_{l-1}; v^l) \in Y$, $\|\Omega\|$ — операторная норма линейного отображения $\Omega : \mathbb{R}^{mn_l} \to \mathbb{R}^k$ (число $\varepsilon$ в (47) мы ниже фиксируем). А затем, учитывая $C^l$-гладкость отображения $f$, подберем число $\rho > 0$ такое, что $\rho \le r_1/2$, $|v_{l-1}(f, x)| < r_2/2$ и $|v^l(f, x)| < r_3/2$, если $|x| \le \rho$, и вслед за ним число $\gamma > 0$, удовлетворяющее условиям $\gamma < \rho/2$ и $|v_{l-1}(f, x + he_s) - v_{l-1}(f, x)| < r_2/2$ и $|v^l(f, x + he_s) - v^l(f, x)| < r_3/2$ при $|x| \le \rho/2$ и $h \le \gamma$. В итоге (в силу (47)) мы получаем следующее неравенство:

$$\left\|\int_0^1 \left\{\mathfrak{L}'_{v^l}(x + he_s; v_{l-1}(f, x) + h\bar{v}_{l-1}; v^l(f, x) + \tau h \bar{v}^l) - \mathfrak{L}'_{v^l}(0; 0; 0)\right\} d\tau\right\| \le \varepsilon, \tag{48}$$

где $|x| \le \rho/2$, $h \le \gamma$, $|\bar{v}_{l-1}| \le r_2/2h$ и $|\bar{v}^l| \le r_3/2h$ ($\bar{v}_{l-1} \in \mathbb{R}^{N_{l-1}-n}$, $\bar{v}^l \in \mathbb{R}^{mn_l}$).

Пусть далее[9)]

$$\begin{aligned} V_h^s(x; \bar{v}_{l-1}; \bar{v}^l) &= \mathfrak{L}_h^s(x; \bar{v}_{l-1}; \bar{v}^l) - \mathfrak{L}_h^s(x; \bar{v}_{l-1}; 0) \\ &= h^{-1}\big\{\mathfrak{L}(x + he_s; v_{l-1}(f, x) + h\bar{v}_{l-1}; v^l(f, x) + h\bar{v}^l) \\ &\qquad - \mathfrak{L}(x + he_s; v_{l-1}(f, x) + h\bar{v}_{l-1}; v^l(f, x))\big\} \end{aligned} \tag{49}$$

[9)] $\mathfrak{L}'_{v^l}(0; 0; 0)v^l(f, x)$ — это эквивалентная форма записи оператора (44), где $y_0 = (0; 0; 0)$.

$$(= \mathfrak{L}'_{v^l}(0;0;0)\bar v^l + \Bigg[\int_0^1 \big\{\mathfrak{L}'_{v^l}(x+he_s; v_{l-1}(f,x)+h\bar v_{l-1}; v^l(f,x)+\tau h\bar v^l) - \mathfrak{L}'_{v^l}(0;0;0)\big\}\,d\tau\Bigg]\bar v^l),$$

$$T_h^s(x;\bar v_{l-1}) = \mathfrak{L}_h^s(x;\bar v_{l-1};0) = h^{-1}\big\{\mathfrak{L}(x+he_s; v_{l-1}(f,x)+h\bar v_{l-1}; v^l(f,x)) - \mathfrak{L}(x; v_{l-1}(f,x); v^l(f,x))\big\} \quad (50)$$

$$(= \partial_{x_s}\mathfrak{L}(0;0;0) + \mathfrak{L}'_{v_{l-1}}(0;0;0)\bar v_{l-1} + \int_0^1 \{\partial_{x_s}\mathfrak{L}(x+\tau he_s; v_{l-1}(f,x)+\tau h\bar v_{l-1}; v^l(f,x)) - \partial_{x_s}\mathfrak{L}(0;0;0)\}\,d\tau + \Bigg[\int_0^1 \big\{\mathfrak{L}'_{v_{l-1}}(x+\tau he_s; v_{l-1}(f,x)+\tau h\bar v_{l-1}; v^l(f,x)) - \mathfrak{L}'_{v_{l-1}}(0;0;0)\big\}\,d\tau\Bigg]\bar v_{l-1}),$$

$x \in B_n(0,\rho/2)$, $\bar v_{l-1} \in B_{N_{l-1}-n}(0, r_2/2h)$, $\bar v^l \in B_{mn_l}(0, r_3/2h)$, $h \le \gamma$ ($\mathfrak{L}_h^s$ — оператор из (43)). Тогда для ограничения $\widetilde{\mathfrak{L}}_h^s = \mathfrak{L}_h^s|_{Y_h}$ отображения $\mathfrak{L}_h^s$ на область

$$Y_h = B_n(0,\rho/2) \times B_{N_{l-1}-n}(0, r_2/2h) \times B_{mn_l}(0, r_3/2h)$$

имеет место представление

$$\widetilde{\mathfrak{L}}_h^s(x;\bar v_{l-1};\bar v^l) = V_h^s(x;\bar v_{l-1};\bar v^l) + T_h^s(x;\bar v_{l-1}), \quad (x;\bar v_{l-1};\bar v^l) \in Y_h.$$

Кроме того, осуществленный выше выбор параметров $r_1$, $r_2$, $r_3$, $\rho$ и $\gamma$ позволяет заключить, что ограничение $\tilde f_h^s = f_h^s|_{B_n(0,\rho/2)}$ отображения $f_h^s$ на шар $B_n(0,\rho/2)$ при $h \le \gamma$ является $C^l$-решением (в смысле определения 1) системы

$$\widetilde{\mathfrak{L}}_h^s(x; v_{l-1}(\tilde f_h^s, x); v^l(\tilde f_h^s, x)) = 0.$$

Остановимся на некоторых важных для дальнейшего свойствах отображений $V_h^s$ и $T_h^s$ ($h \le \gamma$).

Во-первых, эти отображения продолжаются по непрерывности в замыкание $\operatorname{cl} Y_h$ области $Y_h$ (мы сохраним для продолжений обозначения $V_h^s$ и $T_h^s$).

Во-вторых, из (48) следует, что

$$\big|V_h^s(x;\bar v_{l-1};\bar v^l) - \mathfrak{L}'_{v^l}(0;0;0)\bar v^l\big| \le \varepsilon|\bar v^l|, \quad (51)$$

если $(x;\bar v_{l-1};\bar v^l) \in Y_h$.

В-третьих, для любых двух точек $\bar v'_{l-1}, \bar v''_{l-1} \in \operatorname{cl} B_{N_{l-1}-n}(0, r_2/2h)$ и для каждой точки $x \in \operatorname{cl} B_n(0,\rho/2)$

$$T_h^s\big(x;\bar v''_{l-1}\big) - T_h^s\big(x;\bar v'_{l-1}\big) = h^{-1}\big\{\mathfrak{L}\big(x+he_s; v_{l-1}(f,x)+h\bar v''_{l-1}; v^l(f,x)\big) - \mathfrak{L}(x+he_s; v_{l-1}(f,x)+h\bar v'_{l-1}; v^l(f,x))\big\}$$

$$= \Bigg[\int_0^1 \mathfrak{L}'_{v_{l-1}}(x+he_s; v_{l-1}(f,x)+h\bar v'_{l-1}+\tau h(\bar v''_{l-1}-\bar v'_{l-1}); v^l(f,x))\,d\tau\Bigg](\bar v''_{l-1}-\bar v'_{l-1}). \quad (52)$$

В-четвертых,

$$T_h^s(x;0) = h^{-1}\{\mathfrak{L}(x+he_s; v_{l-1}(f,x); v^l(f,x)) - \mathfrak{L}(x; v_{l-1}(f,x); v^l(f,x))\},$$

$x \in \operatorname{cl} B_n(0,\rho/2)$, и тем самым для $T_h^s(\cdot;0)$ имеет место представление (45).

Наконец, из последнего и соотношений (52) вытекает, что для тех же значений переменных $x$, $\bar{v}'_{l-1}$ и $\bar{v}''_{l-1}$ выполняются неравенства

$$\bigl|T_h^s\bigl(x;\bar{v}''_{l-1}\bigr) - T_h^s\bigl(x;\bar{v}'_{l-1}\bigr)\bigr| \le E_h^s(x)\bigl|\bar{v}''_{l-1} - \bar{v}'_{l-1}\bigr|, \tag{53}$$

где

$$E_h^s(x) = \max_{(x;v_{l-1};v^l)\in \operatorname{cl} G}\bigl\|\mathfrak{L}'_{v_{l-1}}(x;v_{l-1};v^l)\bigr\| = \Omega_1 < +\infty \tag{54}$$

и

$$\bigl|T_h^s(x;0)\bigr| \le \max_{(x;v_{l-1};v^l)\in \operatorname{cl} G}\bigl\|\partial_{x_s}\mathfrak{L}(x;v_{l-1};v^l)\bigr\| = \Omega_2 < +\infty. \tag{55}$$

Построим теперь продолжения операторов $V_h^s$ и $T_h^s$, определенных соотношениями (49) и (50), в цилиндрическую область $B_n(0,\rho/2)\times\mathbb{R}^{N_l-n} \subset \mathbb{R}^{N_l}$ (второй оператор достаточно продолжить в $N_{l-1}$-мерную область $B_n(0,\rho/2)\times\mathbb{R}^{N_{l-1}-n}$), которые будут наследовать отмеченные выше свойства операторов $V_h^s$ и $T_h^s$.

*Оператор* $V_h^s$. Его продолжение есть отображение

$$\widehat{V}_h^s : B_n(0,\rho/2)\times\mathbb{R}^{N_l-n} \to \mathbb{R}^k$$

такое, что $\widehat{V}_h^s(y) = V_h^s(y)$, если $y \in \{\operatorname{cl} Y_h\} \cap \{B_n(0,\rho/2)\times\mathbb{R}^{N_l-n}\}$. А если $y = (x;\bar{v}_{l-1};\bar{v}^l) \in \{B_n(0,\rho/2)\times\mathbb{R}^{N_l-n}\} \setminus \operatorname{cl} Y_h$, то

$$\widehat{V}_h^s(x;\bar{v}_{l-1};\bar{v}^l) = V_h^s(x;v_{l-1}^*;v^{l*}) + \mathfrak{L}'_{v^l}(0;0;0)(\bar{v}^l - v^{l*}),$$

где $(v_{l-1}^*;v^{l*})$ — точка пересечения (в $\mathbb{R}^{N_l-n}$) границы множества $B_{N_{l-1}-n}(0, r_2/2h)\times B_{mn_l}(0,r_3/2h)$ и луча, выходящего из точки $(v_{l-1}(f,0);v^l(f,0)) = (0;0) \in \mathbb{R}^{N_l-n}$ в направлении точки $(\bar{v}_{l-1};\bar{v}^l)$.

*Оператор* $T_h^s$. Продолжение

$$\widehat{T}_h^s : B_n(0,\rho/2)\times\mathbb{R}^{N_{l-1}-n} \to \mathbb{R}^k$$

строится следующим способом. Если $(x;\bar{v}_{l-1}) \in B_n(0,\rho/2)\times\operatorname{cl} B_{N_{l-1}-n}(0,r_2/2h)$, то $\widehat{T}_h^s(x;\bar{v}_{l-1}) = T_h^s(x;\bar{v}_{l-1})$. В случае же $(x;\bar{v}_{l-1}) \in \{B_n(0,\rho/2)\times\mathbb{R}^{N_{l-1}-n}\} \setminus \{B_n(0,\rho/2)\times\operatorname{cl} B_{N_{l-1}-n}(0,r_2/2h)\}$ мы полагаем

$$\widehat{T}_h^s(x;\bar{v}_{l-1}) = T_h^s(x;v_{l-1}^{**}),$$

где

$$v_{l-1}^{**} = \frac{r_2}{2h}\frac{\bar{v}_{l-1}}{|\bar{v}_{l-1}|}$$

— точка пересечения (в $\mathbb{R}^{N_{l-1}-n}$) граничной сферы шара $B_{N_{l-1}-n}(0,r_2/2h)$ и луча, выходящего из центра этого шара в направлении точки $\bar{v}_{l-1}$.

Не составляет труда проверить, что отображения $\widehat{V}_h^s$ и $\widehat{T}_h^s$ непрерывны (хотя, возможно, и потеряли свойство принадлежности классу $C^1$), при этом неравенство (51) остается справедливым и в случае $\widehat{V}_h^s$:

$$\bigl|\widehat{V}_h^s(x;\bar{v}_{l-1};\bar{v}^l) - \mathfrak{L}'_{v^l}(0;0;0)\bar{v}^l\bigr| \le \varepsilon|\bar{v}^l|, \quad (x;\bar{v}_{l-1};\bar{v}^l) \in B_n(0,\rho/2)\times\mathbb{R}^{N_l-n}. \tag{56}$$

По аналогичной причине легко показать, что соотношения (53) и (55) имеют место также и для операторов $\widehat{T}^s_h$, причем с теми же постоянными $\Omega_1$ и $\Omega_2$:

$$\big|\widehat{T}^s_h(x;\bar v''_{l-1})-\widehat{T}^s_h(x;\bar v'_{l-1})\big|\le\Omega_1\big|\bar v''_{l-1}-\bar v'_{l-1}\big|,\tag{57}$$

$$\big|\widehat{T}^s_h(x;0)\big|(=\big|T^s_h(x;0)\big|)\le\Omega_2,\tag{58}$$

$x\in B_n(0,\rho/2)$, $\bar v'_{l-1},\bar v''_{l-1}\in\mathbb{R}^{N_{l-1}-n}$.

Таким образом, мы пришли к следующей ситуации: система

$$\widehat{\mathfrak{L}}^s_h\big(x;v_{l-1}\big(\tilde f^s_h,x\big);v^l\big(\tilde f^s_h,x\big)\big)=\widehat{V}^s_h\big(x;v_{l-1}\big(\tilde f^s_h,x\big);v^l\big(\tilde f^s_h,x\big)\big)+\widehat{T}^s_h\big(x;v_{l-1}\big(\tilde f^s_h,x\big)\big)=0$$

в силу неравенств (56)–(58) удовлетворяет условиям теоремы 2 (где сейчас $D$ — это оператор (44)), а отображение $\tilde f^s_h:B_n(0,\rho/2)\to\mathbb{R}^m$ является ее ($C^l$-) решением.

Зафиксируем теперь положительное число $\tau$, меньшее, чем $\min\{1,\rho/2\}$, и такое, что выполняется неравенство (23), в котором мы полагаем сейчас $E(x)=E^s_h(x)$ , $x\in B_n(0,\tau)$ (другими словами, в (23) в обсуждаемом в данный момент случае $\|E\|_{q_0,B(x_0,\tau)}=\Omega_1 v_n^{1/q_0}\tau^{n/q_0}$), а в качестве эллиптического линейного дифференциального оператора $D$ с постоянными коэффициентами мы, как и выше, выбираем оператор (44). Учитывая теорему 2 и замечание к ней, мы видим, что в шаровой окрестности $B_n(0,\tau)$ точки $0\in\mathbb{R}^n$ для отображения $\tilde f^s_h|_{B_n(0,\tau)}$ выполняется неравенство (15). В то же время неравенства (54), (57) и (58), в которых постоянные $\Omega_1$ и $\Omega_2$ не зависят от параметра $h$, а также то обстоятельство, что из $C^l$-гладкости рассматриваемого нами решения $f$ системы (1) и из способа подбора параметров $\rho$ и $\gamma$ вытекает равномерная по $h\le\gamma$, $s=1,2,\dots,n$ и $x\in B_n(0,\rho/2)$ ограниченность величин

$$\big|v_{l-1}(\tilde f^s_h,x)\big|=\frac{|v_{l-1}(f,x+he_s)-v_{l-1}(f,x)|}{h},$$

позволяют (без затраты больших усилий) убедиться в следующем: неравенство (15) в нашем случае обретает вид

$$\big|\partial^{p_{l-1}}\tilde f^s_h(x')-\partial^{p_{l-1}}\tilde f^s_h(x'')\big|\le\Theta|x'-x''|^\alpha,\quad x',x''\in B_n(0,\tau),\tag{59}$$

где постоянная $\Theta$ также не зависит от $h$ (мы использовали здесь равенство (46)). Тем самым, устремляя $h$ к нулю, мы убеждаемся в выполнении неравенства (59) и для частных производных $l$-го порядка решения $f$ системы (1). Таким образом, произвол в выборе числа $\alpha\in\,]0,1[$ и точки $x_0\in\operatorname{dom}f$ позволяет утверждать, что теорема $1'$ доказана (а вместе с ней доказана и теорема 1).

Замечание. Исследование, осуществленное Л. Ниренбергом в [1], основывается на использовании идей из квазиконформного анализа. Как следует из вышеизложенного, наше исследование также зиждется на подобных идеях (но их использование у нас несколько отличается от того, что представлено в [1]). В самом деле, в том случае, когда для системы (5) выполнено условие

$$T(x;v_{l-1})=0\quad((x;v_{l-1})\in U\times\mathbb{R}^{N_{l-1}-n}),$$

где $T(x;v_{l-1})$ — второе слагаемое в (6), ее решения в силу условий (a) и (b) являются решениями дифференциального неравенства

$$|Df(x)|\ (=|\mathfrak{L}(x;v_{l-1}(f,x);v^l(f,x))-Df(x)|)\ \le\varepsilon|v^l(f,x)|\tag{60}$$

($D$ — дифференциальный оператор из условия (a)). При этом решение неравенства (60) (при малом значении параметра $\varepsilon$), по нашему мнению, следует рассматривать как естественный аналог квазиконформного отображения. Изучение тех свойств решений дифференциальных неравенств (60) при малых $\varepsilon$, которые роднят эти решения с решениями эллиптических систем $Dg(x) = 0$ линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами, как раз и составляет предмет исследований устойчивости в $C^{l-1}$-норме пучков решений систем линейных дифференциальных уравнений (см. [4, 5]).

В заключение отметим, что результаты настоящей работы анонсированы в статье [10].

## *ЛИТЕРАТУРА*


**1.** *Nirenberg L.* On a generalization of quasi-conformal mappings and its application to elliptic partial differential equations // Contributions to the Theory of Partial Differential Equations, Ann. Math. Studies. 1954. N 33. P. 95–100.

**2.** *Morrey C. B., Jr.* Second order elliptic systems of differential equations // Contributions to the Theory of Partial Differential Equations, Ann. Math. Studies. 1954. N 33. P. 101–159.

**3.** *Шварц Л.* Комплексные аналитические многообразия. Эллиптические уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.

**4.** *Копылов А. П.* Об основах теории устойчивости в $C^l$-норме классов решений систем линейных уравнений с частными производными // Докл. РАН. 1999. Т. 365, № 5. С. 589–592.

**5.** *Копылов А. П.* Устойчивость в $C^l$-норме классов решений систем линейных уравнений с частными производными эллиптического типа // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 2. С. 352–371.

**6.** *Копылов А. П.* О $W_q^l$-регулярности решений систем уравнений с частными производными, локально близких к эллиптическим системам линейных уравнений с постоянными коэффициентами // Докл. РАН. 1999. Т. 368, № 3. С. 303–306.

**7.** *Копылов А. П.* О регулярности решений систем уравнений с частными производными, локально близких к эллиптическим системам линейных уравнений с постоянными коэффициентами. I // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 4. С. 861–879.

**8.** *Копылов А. П.* О регулярности решений систем уравнений с частными производными, локально близких к эллиптическим системам линейных уравнений с постоянными коэффициентами. II // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 1. С. 98–117.

**9.** *Копылов А. П.* Устойчивость в $C$-норме классов отображений. Новосибирск: Наука, 1990.

**10.** *Копылов А. П.* Устойчивость классов отображений и непрерывность по Гёльдеру старших производных решений эллиптических систем нелинейных уравнений с частными производными произвольного порядка // Докл. РАН. 2001. Т. 379, № 4. С. 442–446.


*Статья поступила 25 мая 2001 г.*

*Копылов Анатолий Павлович*
*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск 630090*
kopylov@math.nsc.ru