Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2002. Том 43, № 1

УДК 510.649

О ГОМОМОРФИЗМАХ РАЗМЫТЫХ ГРУПП

В. П. Добрица, Г. Э. Яхъяева

Аннотация: Уточняется введенное ранее понятие гомоморфизмов размытых групп. Рассматриваются условия выполнения некоторых свойств гомоморфизмов четких групп, а также свойства, характерные только для систем с размытой операцией. Обсуждается корректность введенного понятия сохранения размытой операции. Библиогр. 2.

1. Ядро гомоморфизма размытых групп

В работе [1] было введено понятие нечеткой бинарной операции, т. е. операции, результат действия которой состоит не из одного элемента, а представляет собой некоторое подмножество исходного множества. При этом каждое конкретное значение действия задается с некоторым весом. Соответственно этому было введено обозначение $a * b =_\alpha c$, где $\alpha \in (0,1]$ показывает вес, с которым произведению элемента a на элемент b соответствует элемент c.

Пусть дана алгебраическая система $\langle G, * \rangle$ с нечеткой бинарной операцией. Операция $*$ называется *ассоциативной*, если для любых $a, b, c \in G$ выполняется равенство множеств $(a * b) * c = a * (b * c)$.

Операция $*$ называется *компактной*, если для любых $a, b, c, d \in G$ справедливо следующее утверждение:

$$\exists\alpha[a * b =_\alpha c] \Rightarrow [(a * b) * d = c * d \wedge d * (a * b) = d * c].$$

Элемент $e \in G$ называется *нейтральным*, если для любого $a \in G$ найдутся такие числа $\alpha, \beta \in (0,1]$, что $e * a =_\alpha a$, $a * e =_\beta a$. Через E будем обозначать множество всех нейтральных элементов системы $\langle G, * \rangle$.

Элемент $b \in G$ будем называть *обратным* к элементу $a \in G$ относительно нейтрального элемента $e \in E$, если найдутся такие числа $\alpha, \beta \in (0,1]$, что $b*a =_\alpha e$, $a * b =_\beta e$.

Определение 1. Алгебраическая система $\langle G, * \rangle$ называется *размытой группой*, если операция $*$ ассоциативна и компактна, множество E непусто и для каждого элемента множества G найдется по крайней мере один обратный.

В работе [1] дано определение гомоморфизма размытых групп. Так же, как и в классическом случае, под гомоморфизмом понимается отображение, сохраняющее операцию. Однако в случае нечеткой операции будем говорить, что при отображении φ операция *сохраняется*, если для любых $a, b, c \in G$ выполняется условие

$$\exists\alpha \in (0,1][a * b =_\alpha c] \Rightarrow \exists\beta \in (0,1][\varphi(a) \circ \varphi(b) =_\beta \varphi(c)]. \tag{1}$$

В общем случае образ гомоморфизма $\varphi(G)$ может быть незамкнутым множеством. Однако если операцию $\circ$ ограничить до операции $\circ_{\varphi(G)}$, считая нулевым результат выполнения операции на всех элементах, не лежащих в $\varphi(G)$, то мы получим замкнутость множества $\varphi(G)$. Далее для удобства записи будем полагать, что операция $\circ$ ограничена на $\varphi(G)$.

Условие (1) можно записать в виде

$$\varphi(a * b) \subseteq \varphi(a) \circ \varphi(b). \tag{2}$$

В общем случае равенство множеств в (2), даже при ограничении операции, может не выполняться. Покажем это на примере. Пусть множество нейтральных элементов E группы G отображается в собственное подмножество нейтральных элементов E_1 группы G_1, т. е. $\varphi(E) \subset E_1$, и пусть элемент $a \in G - E$ таков, что $\varphi(a) \in E_1 - \varphi(E)$. Тогда $\varphi(a * a^{-e}) = \varphi(E) \subset \varphi(a) \circ \varphi(a^{-e})$.

Теорема 1. *Необходимым и достаточным условием существования гомоморфного отображения размытой группы G на размытую группу G_1 является существование гомоморфизма соответствующих им скелетных групп.*

Доказательство. Пусть $f : G \to G/E$, $f_1 : G_1 \to G_1/E_1$ — естественные гомоморфизмы, переводящие размытые группы на соответствующие им скелетные группы.

Допустим, что дан гомоморфизм скелетных групп $\varphi : G/E \to G_1/E_1$. Каждому элементу $a \in G$ поставим в соответствие некоторый элемент $b \in \varphi(aE)$. Отображение $\psi : a \mapsto b$ и будет искомым гомоморфизмом размытых групп.

Пусть теперь дан гомоморфизм размытых групп $\psi : G \to G_1$. Тогда отображение $\varphi(aE) = \psi(a)E_1$ будет гомоморфизмом соответствующих скелетных групп.

Определение 2 [1]. Прообраз множества всех нейтральных элементов размытой группы G_1 назовем *ядром* гомоморфизма и будем обозначать через $\operatorname{Ker}\varphi$.

Определение ядра гомоморфизма размытых групп аналогично определению ядра гомоморфизма четких групп. Более того, справедливы следующие свойства, имеющие аналог в классическом случае.

Свойство 1. $\operatorname{Ker}\varphi$ — *размытая группа.*

Доказательство этого свойства см. в [1].

Свойство 2. $\forall a \in G \ (a * \operatorname{Ker}\varphi * a^{-e} \subseteq \operatorname{Ker}\varphi)$.

Доказательство. Пусть $h \in \operatorname{Ker}\varphi$. Тогда $\varphi(a * h * a^{-e}) \subseteq \varphi(a) \circ \varphi(h) \circ \varphi(a^{-e})$. Так как образом гомоморфизма размытой группы является размытая группа, применяя свойства ассоциативности и компактности, получим $(\varphi(a) \circ \varphi(h)) \circ \varphi(a^{-e}) = \varphi(a) \circ \varphi(a^{-e}) \subseteq E'$.

Свойство 2 показывает, что ядро гомоморфизма размытых групп является *нормальной* размытой подгруппой. Однако не все свойства гомоморфизмов четких групп переносятся на рассматриваемые гомоморфизмы.

Свойство 3. *Существуют различные гомоморфизмы, переводящие группу G в группу G', которые обладают одним и тем же ядром.*

Доказательство свойства следует из доказательства теоремы 1. По гомоморфизму скелетных групп гомоморфизм соответствующих им размытых групп определяется неоднозначно. Все гомоморфизмы данных размытых групп, сопоставленные одному и тому же гомоморфизму скелетных групп, будут обладать общим ядром.

Для того чтобы в (2) было равенство множеств, необходимо и достаточно в (1) заменить знак импликации знаком эквивалентности. Гомоморфизм, отвечающий этому условию, будем называть *скелетным гомоморфизмом*. Очевидно, что при таком гомоморфизме мы не нуждаемся в ограничении операции.

2. Родственный гомоморфизм и гомоморфизм с тривиальным ядром

Пусть дано некоторое множество A. Очевидно, что, задавая на этом множестве различные размытые операции, мы можем получать различные размытые группы. Рассмотрим две размытые группы $G_1 = \langle A, *\rangle$, $G_2 = \langle A, \circ\rangle$, Возникает вопрос: всегда ли возможно построить гомоморфное отображение группы G_1 на группу G_2? В общем случае это невозможно. Покажем на примере.

Пусть $A = \{a, b\}$ — двухэлементное множество. Определим операции на этом множестве согласно таблицам

$*$	a	b
$a * a$	α_1	α_2
$a * b$	α_3	α_4
$b * a$	α_5	α_6
$b * b$	α_7	α_8

$\circ$	a	b
$a \circ a$	α_1	0
$a \circ b$	0	α_4
$b \circ a$	0	α_6
$b \circ b$	α_7	0

Из таблиц видно, что группа G_1 является размытой группой нейтральных элементов, а группа G_2 обладает структурой обычной четкой двухэлементной группы. В связи с этим любое взаимно-однозначное отображение множества A на себя является гомоморфизмом группы G_2 на группу G_1, однако не может служить гомоморфизмом группы G_1 на группу G_2.

Предложение 1. *Отображение φ множества A на себя является гомоморфизмом группы $G_1 = \langle A, *\rangle$ на размытую группу $G_2 = \langle A, \circ\rangle$ тогда и только тогда, когда*

1) *существует гомоморфизм ψ, переводящий скелетную группу G_1/E_1 на скелетную группу G_2/E_2;*

2) $\forall a \in A\ (\varphi(a) \in \psi(aE_1))$.

Доказательство. В теореме 1 показано, что (1) и (2) являются необходимым и достаточным условием существования гомоморфного отображения, и обеспечение отображения «на» возможно в силу выбора рассматриваемых групп.

В дальнейшем гомоморфизм размытой группы на равномощную группу будем называть *родственным гомоморфизмом*.

Заметим, что если G_1 и G_2 — конечные четкие группы, то родственный гомоморфизм $\varphi : G_1 \to G_2$ превращается в автоморфизм.

Частным случаем родственного гомоморфизма при общем носителе является *тождественный гомоморфизм* $\varphi : x \mapsto x$. В отличие от четкого случая тождественный гомоморфизм может переводить размытую группу G_1 не только на себя, но и на некоторые неизоморфные ей группы.

Теорема 2. *Пусть $\varphi : G_1 \to G_2$ — тождественный гомоморфизм. Тогда для любого элемента $b \in A$ существует непустое подмножество A_b множества A такое, что $bE_2 = \bigcup\limits_{a \in A_b} aE_1$.*

Доказательство. Положим $A_b \rightleftharpoons \{a \mid \psi(aE_1) = bE_2\}$, где ψ — гомоморфизм соответствующих скелетных групп. В силу условия (2) из того, что

$a \in A_b$, вытекает $a \in bE_2$. Пусть теперь $a \notin A_b$. Тогда $\psi(aE_1) \neq bE_2$. Следовательно, найдется такой элемент $c \in A - bE_2$, что $\psi(aE_1) = cE_2$. Это означает, что $a \in cE_2$, т. е. $a \notin bE_2$.

Покажем теперь, что из $a \in bE_2$ вытекает $aE_1 \subset bE_2$. Допустим противное. Пусть элемент a' такой, что $a' \in aE_1$ и $a' \notin bE_2$. Тогда для любого $e \in E_1$ в группе G_1 справедливо $a' * e =_\alpha a$ $(\alpha \in (0,1])$. Так как φ — гомоморфизм, то $\varphi(e) = e$ является нейтральным элементом в группе G_2. Тогда в группе G_2 имеем $a' \circ e \neq a$. Это невозможно, так как гомоморфизм сохраняет операцию.

Определение 3. Если ядро гомоморфизма φ размытых групп состоит только из нейтральных элементов, то такой гомоморфизм будем называть *гомоморфизмом с тривиальным ядром.*

Легко понять, что тождественный гомоморфизм с тривиальным ядром является скелетным гомоморфизмом. Более того, он переводит размытую группу на группу, обладающую той же структурой. Несмотря на то, что данный гомоморфизм является взаимно-однозначным отображением, его нельзя воспринимать как изоморфизм (это показано в статье [2]). В отличие от четкого случая помимо перечисленных свойств для изоморфизма необходимо сохранение порядка на числах, т. е. для любых $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \in G$ должно выполняться следующее условие:

$$(a_1 * a_2 =_{\alpha_1} a_3 \wedge a_4 * a_5 =_{\alpha_2} a_6 \wedge \varphi(a_1) \circ \varphi(a_2) =_{\beta_1} \varphi(a_3) \wedge \varphi(a_4) \circ \varphi(a_5) =_{\beta_2} \varphi(a_6)) \Rightarrow (\alpha_1 \leq \alpha_2 \Leftrightarrow \beta_1 \leq \beta_2),$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in (0,1]$.

Тождественный гомоморфизм группы G на себя будем обозначать через $\mathrm{Id}(G)$.

Теорема 3. *Всякий гомоморфизм из размытой группы G на размытую группу G' может быть представлен в виде композиции тождественного гомоморфизма и гомоморфизма с тривиальным ядром, т. е.*

$$\varphi(G) = \varphi_{\mathrm{id}} \circ \varphi_t(G), \tag{3}$$

где $\varphi_{\mathrm{id}}, \varphi_t$ — тождественный гомоморфизм и гомоморфизм с тривиальным ядром соответственно.

Доказательство. Если φ — тождественный гомоморфизм, то в 3 положим $\varphi_{\mathrm{id}} = \varphi$, $\varphi_t = \mathrm{Id}(G')$. Если φ — гомоморфизм с тривиальным ядром, то в 3 положим $\varphi_{\mathrm{id}} = \mathrm{Id}(G)$, $\varphi_t = \varphi$.

Допустим теперь, что φ не является ни тождественным гомоморфизмом, ни гомоморфизмом с тривиальным ядром. Обозначим ядро $\mathrm{Ker}\,\varphi$ через H.

Пусть множество A является носителем группы G. На множестве A определим новую операцию $\circ$ следующим образом: $a \circ b =_\alpha c \Leftrightarrow aH \cdot bH = cH$ для некоторого $\alpha \in (0,1]$. Покажем, что структура $G_1 = \langle A, \circ \rangle$ является размытой группой.

По теореме о гомоморфизмах (рассмотренной в статье [1]) фактор-множество G/H является четкой группой, изоморфной группе $\varphi(G)/E'$. Таким образом, $\forall a, b, c \in A$ $[(aH \cdot bH) \cdot cH = aH \cdot (bH \cdot cH)]$. Отсюда $\forall d \in A$ $[d \in (a \circ b) \circ c \Leftrightarrow d \in a \circ (b \circ c)]$. Тем самым мы показали выполнение свойства ассоциативности на структуре G_1. Аналогично показывается выполнение свойства компактности.

Роль нейтральных элементов будут исполнять элементы, принадлежащие классу H. Для элемента $a \in A$ обратными будут все элементы класса $(aH)^{-1}$.

Итак, структура G_1 является размытой группой. Более того, четкая группа G_1/E_1 является подгруппой группы G/E. Это означает, что тождественное отображение $\varphi_{\mathrm{id}} : A \to A$ является тождественным гомоморфизмом группы G на группу G_1.

Построим теперь отображение $\varphi_t : G_1 \to G'$ следующим образом: $\varphi_t(a) = \varphi(a)$ для любого $a \in A$. Так как четкие группы G/H и $\varphi(G)/E'$ изоморфны, отображение φ_t будет гомоморфизмом с тривиальным ядром.

Как уже неоднократно отмечалось, множество-носитель размытой группы G разбивается на классы эквивалентности aE. Наибольшую мощность этих классов будем называть *показателем размытости* группы G. Очевидно, что размытость образа гомоморфизма с тривиальным ядром не превышает размытости прообраза. Однако при тождественном гомоморфизме размытость может и повышаться. Более того, из теорем 2 и 3 вытекают следующие утверждения.

Следствие 1. *Если показатель размытости не более чем счетной группы G равен ее мощности, то образом любого тождественного гомоморфизма группы G является группа той же размытости.*

Следствие 2. *Если размытость группы G' не превышает размытости группы G, то гомоморфизм $\varphi : G \to G'$ может быть представлен в виде композиции скелетного гомоморфизма и гомоморфизма с тривиальным ядром, т. е. $\varphi = \varphi_{sk} \circ \varphi_t$.*

Доказательство. Пусть ψ_{id} — некоторый тождественный гомоморфизм, переводящий группу G на родственную ей группу G_1. В каждом классе aE_1 группы G_1 зафиксируем произвольный элемент a_0. Будем теперь строить гомоморфизм с тривиальным ядром ψ_t группы G_1 в себя, для любого $b \in aE_1$ полагая

$$\psi_t(b) = \begin{cases} b, & b \in a_0E, \\ a_0, & b \notin a_0E. \end{cases}$$

В силу теоремы 2 такое отображение всегда возможно.

Легко убедиться, что искомый скелетный гомоморфизм φ_{sk} является композицией гомоморфизмов $\psi_{\mathrm{id}} \circ \psi_t$. Гомоморфизм φ_t определяется так же, как в теореме 3. В результате получим $\varphi = (\psi_{\mathrm{id}} \circ \psi_t) \circ \varphi_t$.

Определение 4. Подгруппу H размытой группы G будем называть *скелетной подгруппой (подгруппой слоя)* и обозначать через $H \leq_{sk} G$ ($H \leq_t G$), если существует скелетный гомоморфизм (гомоморфизм с тривиальным ядром) группы G в себя такой, что $\varphi(G) = H$.

Следствие 3. *Пусть H — подгруппа размытой группы G. Тогда в G существует такая подгруппа H', что $H \leq_t H' \leq_{sk} G$.*

Доказательство вытекает непосредственно из следствия 2.

3. Жесткий гомоморфизм

Рассматривая понятие сохранения операции, мы не обращали внимания на конкретные значения функции приоритета. Усилим условие (1) следующим образом:

$$\exists\alpha \in (0,1][a * b =_\alpha c] \Rightarrow \exists\beta \in (0,1][\alpha \leq \beta \wedge \varphi(a) \circ \varphi(b) =_\beta \varphi(c)]. \tag{4}$$

Гомоморфизм, отвечающий такому условию сохранения операции, будем называть *жестким гомоморфизмом.* Очевидно, что жесткий гомоморфизм является частным случаем гомоморфизма размытых групп. Также легко понять, что достаточное условие теоремы 1 для жесткого гомоморфизма не будет выполняться. Покажем это на примере.

Пусть $G_1 = \{e_1\}$ и $G_2 = \{e_2\}$ — одноэлементные размытые группы, и пусть $e_1 * e_1 =_\alpha e_1$, $e_2 \circ e_2 =_\beta e_2$, где $\alpha, \beta \in (0, 1]$. Необходимо потребовать, чтобы $\alpha \neq \beta$, иначе G_1 и G_2 будут представлять одну и ту же группу. Допустим, что $\alpha < \beta$. Очевидно, что существуют гомоморфизмы $\varphi_1 : G_1 \to G_2$, $\varphi_2 : G_2 \to G_1$. Гомоморфизм φ_1 будет жестким гомоморфизмом, а гомоморфизм φ_2 не будет обладать условием (4). Таким образом, существования гомоморфизма скелетных групп недостаточно для существования жесткого гомоморфизма соответствующих им размытых групп.

Более того, введенное в статье [2] понятие изоморфизма размытых групп также будет неправомочным. Необходимым условием для изоморфности групп G_1 и G_2 является существование гомоморфизмов $\varphi_1 : G_1 \to G_2$ и $\varphi_2 : G_2 \to G_1$. В случае жесткого гомоморфизма это возможно, если для любых $a, b, c \in G_1$ $a * b =_\alpha c \Rightarrow \varphi_1(a) \circ \varphi_1(b) =_\alpha \varphi_1(c)$. Таким образом, при определении изоморфизма относительно жесткого гомоморфизма условие «сохранения порядка на числах» будет преобразовываться в условие «абсолютного совпадения значений функции приоритета».

Заметим, что с точностью до изоморфизма существует единственная одноэлементная размытая группа, которая изоморфна своей скелетной группе. Однако с точностью до жесткого изоморфизма существует континуум различных одноэлементных размытых групп. В современной алгебре одно или несколько алгебраических действий в множестве изучаются только с точки зрения результатов этих действий безотносительно каких-либо иных свойств элементов, составляющих данное множество. В этом смысле абстрактная теория алгебраических систем интересуется только правилом выполнения операции умножения в каждой из них. При таком подходе две алгебраические системы с одинаковым количеством элементов, в которых действия определены одинаковым образом, отличаются несущественно или даже вовсе могут быть признаны одной и той же алгебраической системой. Эта точка зрения оформляется при помощи понятия изоморфизма алгебраических систем. Введенное нами понятие изоморфизма, сохраняющего порядок на числах, полностью удовлетворяет этой концепции. Однако если интересоваться взаимосвязью размытой системы с внешней средой или же рассматривать энтропию размытости нечеткой операции, то могут обнаружиться свойства, которыми изоморфные системы будут обладать в разной степени. В этом случае возникнет потребность в изоморфизме, соблюдающем абсолютное совпадение значений функции приоритета.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Добрица В. П., Яхъяева Г. Э.* О группах с нечеткими операциями // Вычислит. системы. 2000. № 165. С. 127–138.
2. *Яхъяева Г. Э.* Изоморфизмы размытых полугрупп // Вестн. АГУ. Сер. физ.-мат. наук. 2000. № 1. С. 90–98.

Статья поступила 6 мая 2000 г.

Добрица Вячеслав Петрович, Яхъяева Гульнара Эркиновна
Алматинский гос. университет им. Абая,
кафедра алгебры, геометрии и прикладной логики,
пр. Достык, 100, Алматы 480001, Казахстан