Сибирский математический журнал
Июль—август, 2001. Том 42, № 4

УДК 517.9

ОБРАТНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К НЕЛИНЕЙНЫМ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ КРАЕВЫМ ЗАДАЧАМ

В. С. Климов, А. Н. Павленко

Аннотация: Устанавливаются неравенства вида $\|u; E_1\| \leq V(\|u; E\|)$, где E, E_1 — банаховы пространства функций многих переменных, E_1 компактно вложено в E, $u \in \mathfrak{M} \subset E_1$, $V : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ — возрастающая функция. Основное внимание уделяется случаю, когда множество $\mathfrak{M}$ задается поточечным дифференциальным неравенством. Приложения посвящены нелинейным эллиптическим краевым задачам, содержащим параметр λ и имеющим две ветви решений u_λ $(\lambda \geq 0)$, U_λ $(\lambda > 0)$, первая из которых непрерывна в нуле, а вторая неограниченно растет при $\lambda \to 0$. Библиогр. 17.

В статье устанавливаются неравенства вида $\|u; E_1\| \leq V(\|u; E\|)$, где E, E_1 — банаховы пространства функций многих переменных, E_1 компактно вложено в E, $u \in \mathfrak{M} \subset E_1$, $V : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — возрастающая функция. Основное внимание уделяется случаю, когда множество $\mathfrak{M}$ задается поточечным дифференциальным неравенством. Приложения посвящены нелинейным эллиптическим краевым задачам, содержащим параметр λ и имеющим две ветви решений u_λ $(0 \leq \lambda < \lambda_0)$, U_λ $(0 < \lambda < \lambda_0)$, первая из которых непрерывна в 0, а вторая неограниченно растет при $\lambda \to 0$. При любом $\lambda > 0$ типичное число решений изучаемых краевых задач четно; специализация этих результатов влечет существование ветви U_λ ненулевых решений.

Используются обозначения: Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ с границей $\partial\Omega$, $|x|$ — евклидова норма вектора x, $\rho(x) = \min\{|x-y|,\ y \in \partial\Omega\}$ — расстояние от x до $\partial\Omega$; $L_{q,t}(\Omega)$ $(1 \leq q < \infty,\ 0 \leq t < \infty)$ — пространство измеримых по Лебегу функций с нормой $\|v; L_{q,t}(\Omega)\| = \|\rho^t v;\, L_q(\Omega)\|$; как обычно, совпадающие п. в. функции отождествляются; $M_\delta(\Omega)$ $(0 < \delta < 1)$ — пространство Марцинкевича, определяемое как совокупность измеримых по Лебегу функций $v : \Omega \to \mathbb{R}$, для которых имеет смысл и конечна норма

$$\|v; M_\delta(\Omega)\| = \sup_{\omega \subset \Omega} \left\{ \operatorname{mes}_n^{\delta-1} \omega \int\limits_\omega |v(x)|dx \right\},$$

$\operatorname{mes}_n \omega$ — n-мерная лебегова мера множества ω; $L_Q(\Omega)$ — пространство Орлича, порождаемое N-функцией Q [1–3]. Для любого натурального числа k через $L_q^k(\Omega)$ обозначается совокупность функций из $L_q(\Omega)$, производные в смысле Соболева которых до порядка k включительно существуют и принадлежат пространству $L_q(\Omega)$. Норма в $L_q^k(\Omega)$ определяется равенством

$$\left\|u; L_q^k(\Omega)\right\| = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u; L_q(\Omega)\|.$$

Здесь и далее $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ — порядок мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $D^\alpha u = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n} u$, $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Аналогичным образом с помощью пространств $L_{q,t}(\Omega)$, $M_\delta(\Omega)$, $L_Q(\Omega)$ определяются дифференциальные надстройки $L^k_{q,t}(\Omega)$, $M^k_\delta(\Omega)$, $L^k_Q(\Omega)$ [3–5].

Если E — банахово пространство, k — неотрицательное целое число, $0 < \nu \le 1$, то $C^{k,\nu}(\Omega, E)$ — совокупность функций $g : \Omega \to E$, производные которых до порядка k ограничены и удовлетворяют условию Гёльдера с показателем ν. Все рассматриваемые в статье величины (функции, пространства) предполагаются действительными. Через $C, C_0, C_1 \dots$ обозначаются постоянные; их нумерация в каждом пункте своя.

1. Рассматривается краевая задача

$$Au(x) = z(x) \quad (x \in \Omega), \tag{1}$$

$$B_j u(x) = 0 \quad (j = 1, \dots, m;\ x \in \partial\Omega). \tag{2}$$

Здесь $z \in L_p(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$; A; $B_1, \dots, B_m$ — линейные дифференциальные операторы, определенные на Ω и $\partial\Omega$ соответственно равенствами

$$Au(x) = \sum_{|\alpha| \le 2m} a_\alpha(x) D^\alpha u(x), \quad B_j u(x) = \sum_{|\rho| \le r_j} b_{j\beta}(x) D^\beta u(x),$$

причем $0 \le r_1 < r_2 < \dots < r_m \le 2m - 1$. Коэффициенты a_α, $b_{j\beta}$ и граница $\partial\Omega$ предполагаются достаточно гладкими:

$$a_\alpha \in C^l(\overline{\Omega}), \quad b_{j\beta} \in C^{l+2m-r_j}(\partial\Omega), \quad \partial\Omega \in C^{l+2m}, \tag{3}$$

где $l \ge 0$, классы C^l определены стандартным образом (см., например, [6, с. 30]). Оператор A равномерно эллиптичен:

$$(-1)^m \sum_{|\alpha| = 2m} a_\alpha(x) t_1^{\alpha_1} \dots t_n^{\alpha_n} \ge \mu_0 \big(t_1^2 + \dots + t_n^2\big)^m,$$

μ_0 больше 0 и не зависит от x из Ω. Граничные операторы удовлетворяют условию дополнительности всюду на $\partial\Omega$ [7; 2, с. 321]. Под решением задачи (1), (2) понимается функция класса $L_p^{2m}(\Omega)$, удовлетворяющая уравнению (1) и краевым условиям (2).

Задачу (1), (2) называют *невырожденной*, если при $z = 0$ она имеет лишь нулевое решение. Невырожденность влечет однозначную разрешимость задачи (1), (2) для любой функции z из $L_p(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$. Оператор K, сопоставляющий функции z решение $u = Kz$ задачи (1), (2), допускает интегральное представление

$$Kz = \int_\Omega G(x, y) z(y)\, dy, \tag{4}$$

где $G(x, y)$ — функция Грина задачи (1), (2). В этом случае оператор A называют *обратимым*; если $G(x, y) \ge 0$, то A — *положительно обратимый оператор*.

Положим $r = r_m$, $s = 2m - 1 - r$; через $\varphi(t, \varkappa)$ $(t > 0, \varkappa \in \mathbb{R})$ обозначим функцию, определяемую соотношениями: $\varphi(t; \varkappa) = t^\varkappa$, если $\varkappa < 0$; $\varphi(t; 0) = 1 + \big(\ln \frac{1}{t}\big)_+$; $\varphi(t, \varkappa) = 1$, если $\varkappa > 0$. Введем следующие обозначения частных производных функции Грина:

$$G_\beta(x, y) = D_x^\beta G(x, y), \quad G^\gamma(x, y) = D_y^\gamma G(x, y), \quad G_\beta^\gamma = D_x^\beta D_y^\gamma G.$$

Предложение 1. *Пусть выполнено условие*
Y_1. Задача (1), (2) невырожденна и справедливы включения (3) при $l > s$. Тогда

1) функция Грина $G(x,y)$ задачи (1), (2) существует, и найдется такая постоянная $C > 0$, что

$$\left|G_\beta^\gamma(x,y)\right| \le C\varphi(|x-y|; -n+2m-|\beta|-|\gamma|), \tag{5}$$

$$\left|G_\beta^\gamma(x,y^1) - G_\beta^\gamma(x,y^2)\right| \le C|y^1-y^2|^\nu \sum_{k=1}^{2} \varphi(|x-y^k|; -n+2m-|\beta|-|\gamma|-\nu), \tag{6}$$

где $|\beta| \le l+2m$, $|\gamma|+\nu \le l$, $0<\nu\le 1$;

2) имеет место равенство

$$G^\gamma(x,y)|_{y\in\partial\Omega} = 0 \quad (x\in\Omega,\ |\gamma| \le s-1). \tag{7}$$

Предложение 1 вытекает из результатов [8]. Оценки (5), (6) описывают дифференциальные свойства функции Грина. Равенство (7) имеет смысл лишь при $s \ge 1$ и означает, что след функции $G(x,\cdot)$ и ее частных производных по y до порядка $s-1$ включительно на $\partial\Omega$ равен 0. Ниже, если не оговорено противное, условие Y_1 считается выполненным.

Изучим порождаемую функцией Грина вектор-функцию $g(y) = G(\cdot,y)$, определенную при $y \in \Omega' \subset \Omega$ со значениями в различных функциональных пространствах E. Варьируя область определения Ω' вектор-функции g и пространство E, можно получить оценки норм $\|g(y);E\|$. В связи с этим полезно учесть, что среди содержащих функцию $v(x) = |x-x_0|^{-\tau}$ $(x\in\Omega,\ 0<\tau<n)$ пространств Марцинкевича $M_\delta(\Omega)$ имеется самое узкое: $M_{\tau/n}(\Omega)$; нормы соответствующих функций $\|v; M_{\tau/n}(\Omega)\|$ ограничены не зависящей от $x_0\in\Omega$ константой [2, с. 155]. Данное замечание показывает, что пространства Марцинкевича учитывают особенности функции Грина точнее, чем традиционно используемые пространства $L_p(\Omega)$. Положим $\Omega_d = \{x\in\Omega : \rho(x) > d\}$, $0<d<d_0$. Считаем, что $\Omega_d \ne \varnothing$ при $0<d<d_0$ и d_0 — наибольшее из этих чисел.

Лемма 1. *Пусть $\delta_n = 1-\frac{1}{n}$, $r \le i \le 2m-1$. Тогда справедлива оценка*

$$\left\|g(y); M_{\delta n}^i(\Omega_d)\right\| d^{i-r} \le C_1\rho^s(y), \tag{8}$$

постоянная C_1 не зависит от d и y.

Доказательство. Если $\beta = (\beta_1,\dots,\beta_n)$, $\gamma = (\gamma_1,\dots,\gamma_n)$ — мультииндексы, удовлетворяющие условиям $|\beta| \le i$, $i+|\gamma| \le 2m-2$, то в силу (5), (6) справедливы оценки

$$\left|G_\beta^\gamma(x,y)\right| \le \frac{C}{|x-y|^{n-1}}, \quad \left|G_\beta^\gamma(x,y^1) - G_\beta^\gamma(x,y^2)\right| \le C\sum_{k=1}^{2} \frac{|y^1-y^2|}{|x-y^k|^{n-1}}.$$

Из этих оценок следует, что отображение $g : \Omega \to M_{\delta_n}^i(\Omega)$ принадлежит классу $C^{2m-2-i,1}\big(\Omega, M_{\delta_n}^i(\Omega)\big)$. Отсюда и из (7) вытекает неравенство

$$\left\|g(y); M_{\delta_n}^i(\Omega)\right\| \le C_0\rho^{2m-1-i}(y), \tag{9}$$

постоянная C_0 не зависит от y из Ω; это неравенство верно и при $i = 2m-1$. Оценка (9) влечет (8) для y из $\Omega_{d/2}$.

Если $\rho(y) \le d/2$, $x \in \Omega_d$, то $|x-y| \ge d/2$. Используя (6), получаем оценку

$$\left|G^\gamma_\beta(x,y^1) - G^\gamma_\beta(x,y^2)\right| \le C|y^1-y^2|\sum_{k=1}^{2}\frac{(d/2)^{r-i}}{|x-y^k|^{n-1}}, \tag{10}$$

где $|\beta| \le i$, $|\gamma| \le s-1$, $x \in \Omega_d$; $y^1, y^2 \in \Omega \setminus \Omega_{d/2}$. Данная оценка означает, что $g \in C^{s-1,1}\big(\Omega\setminus\Omega_{d/2}, M^i_{\delta_n}(\Omega_d)\big)$. Согласно (7), (10) производные до порядка $s-1$ включительно отображения $g : \Omega\setminus\Omega_{d/2} \to M^i_{\delta_n}(\Omega)$ обращаются в 0 на $\partial\Omega$ и удовлетворяют условию Липшица с константой, имеющей порядок d^{r-i}. Отсюда вытекает оценка (8) при $\rho(y) \le d/2$. Лемма доказана.

При $i = r$ оценка (8) влечет неравенство $\left\|g(y); M^r_{\delta_n}(\Omega)\right\| \le C_1\rho^s(y)$, из которого следует

Лемма 2. *Оператор K может быть расширен до непрерывного из $L_{1,s}(\Omega)$ в $M^r_{\delta_n}(\Omega)$ оператора.*

Доказательство. Для функции z из $L_p(\Omega)$ в силу неравенства Минковского имеем оценку

$$\left\|Kz; M^r_{\delta_n}(\Omega)\right\| \le \int_\Omega \left\|g(y); M^r_{\delta_n}(\Omega)\right\||z(y)|\,dy \le C_1\|z; L_{1,s}(\Omega)\|.$$

Поскольку $L_p(\Omega)$ всюду плотно в $L_{1,s}(\Omega)$, искомое продолжение оператора K определено однозначно. Лемма доказана.

За продолженным на $L_{1,s}(\Omega)$ оператором K сохраним прежнее обозначение.

Лемма 3. *Пусть $1 \le q < q_1$, $t \ge 0$. Тогда*

$$\|v; L_{q,t}(\Omega)\| \le C_2 \sup_{d>0} d^t\|v; L_{q_1}(\Omega_d)\|.$$

Доказательство. Область Ω — объединение измеримых множеств $\omega_i = \{x \in \Omega, 2^{-(i+1)} \le \rho(x) < 2^{-i}\}$ $(i \ge i_0 > -\infty)$. Справедлива оценка

$$\begin{aligned}\left\|\rho^t v; L_q(\omega_i)\right\| \le 2^{-it}\|v; l_q(\omega_i)\| \le 2^{-it}\operatorname{mes}_n^{1/q-1/q_1}(\omega_i)\|v; L_q(\omega_i)\| \\ \le 2^t \operatorname{mes}_n^{1/q-1/q_1}(\omega_i)\sup_{d>0} d^t\|v; L_{q_1}(\Omega_d)\|.\end{aligned}$$

Ввиду гладкости $\partial\Omega$ ряд с общим членом $\operatorname{mes}_n^{1/q-1/q_1}(\omega_i)$ сходится, что и приводит к требуемому. Лемма доказана.

Справедливы непрерывные вложения $L_p(\Omega) \subset M_\delta(\Omega) \subset L_{p_1}(\Omega)$ $(p \ge 1/\delta > p_1 \ge 1)$, показывающие, в частности, что пространства Марцинкевича $M_\delta(\Omega)$ близки к пространствам $L_{1/\delta}(\Omega)$. Объединяя это замечание с леммами 1, 3, получаем неравенство

$$\left\|g(y); L^{2m-1}_{q,s}(\Omega)\right\| \le C_3\rho^s(y) \quad (y \in \Omega),$$

где $1 \le q < n/(n-1)$, C_3 — некоторая постоянная. Последняя оценка влечет непрерывность оператора $K : L_{1,s}(\Omega) \to L^{2m-1}_{q,s}(\Omega)$. Этот факт допускает следующее усиление.

Лемма 4. *Оператор $K : L_{1,s}(\Omega) \to L^{2m-1}_{q,s}(\Omega)$ $(1 \le q < n/(n-1))$ вполне непрерывен.*

Доказательство. Пусть $0 < d < d_0$, $|\beta| \le 2m-1$, K_1^β и K_2^β — операторы из $L_{1,s}(\Omega)$ в $L_1(\Omega_d)$, определяемые равенствами

$$K_1^\beta z = \int\limits_{\Omega_{d/2}} G_\beta(x,y)z(y)\,dy, \quad K_2^\beta z = \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_{d/2}} G_\beta(x,y)z(y)\,dy.$$

Оператор K_1^β — суперпозиция непрерывного оператора вложения $L_{1,s}(\Omega) \to L_1(\Omega_{d/2})$ и оператора типа потенциала, действующего и компактного из $L_1(\Omega_{d/2})$ в $L_1(\Omega_d)$ [2–5]. Следовательно, $K_1^\beta : L_{1,s}(\Omega) \to L_1(\Omega_d)$ — компактный оператор. В силу предложения 1 функция $G_\beta(x,y)\rho^{-s}(y)$ измерима и ограничена на $\Omega_d \times (\Omega \setminus \Omega_{d/2})$, поэтому $K_2^\beta : L_{1,s}(\Omega) \to L_1(\Omega_d)$ также компактный оператор.

Ввиду произвольности $d > 0$ оператор $K^\beta = D^\beta K : L_{1,s}(\Omega) \to L_{q,s}(\Omega)$ компактен по мере. Поскольку при любом $q < \frac{n}{n-1}$ этот оператор непрерывен, то он и вполне непрерывен из $L_{1,s}(\Omega)$ в $L_{q,s}(\Omega)$ $(1 \le q < \frac{n}{n-1})$. Это равносильно полной непрерывности оператора $K : L_{1,s}(\Omega) \to L^{2m-1}_{q,s}(\Omega)$ $(1 \le q < \frac{n}{n-1})$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть i — целое неотрицательное число, $r-n+1 \le i \le 2m-n-1$. Тогда справедлива оценка*

$$\|g(y); C^i(\Omega_d)\|d^{t_i} \le C_4\rho^s(y), \tag{11}$$

где $t_i > i - r + n - 1$, постоянная C_4 не зависит от d, y.

Доказательство аналогично доказательству леммы 1, поэтому ограничимся указанием необходимых изменений. Будем считать, что $t_i = i-r+n-1+\varepsilon$ $(0 < \varepsilon \ll 1)$. Положим $k_i = [s-t_i] = 2m-n-i-1$, тогда $k_i \ge 0$ и $s-t_i = k_i+1-\varepsilon$. Отображение $g : \Omega \to C^i(\overline{\Omega})$ принадлежит классу $C^{k_i,1-\varepsilon}(\Omega, C^i(\overline{\Omega}))$. Для доказательства достаточно учесть неравенство $-n + 2m - (k_i + 1 - \varepsilon) - i > 0$ и воспользоваться оценкой (6). Поскольку функция g обращается в нуль на $\partial\Omega$ вместе с производными до порядка k_i включительно, имеем

$$\|g(y); C^i(\overline{\Omega})\| \le C_5\rho^{k_i+1-\varepsilon}(y) = C_5\rho^{s-t_i}(y).$$

Это неравенство влечет (11) при $\rho(y) > \frac{d}{2}$.

Далее, замечаем, что функция $g : \Omega \setminus \Omega_{d/2} \to C^i(\Omega_d)$ имеет производные до порядка $s-1$ включительно, обращающиеся в нуль на $\partial\Omega$ и удовлетворяющие условию Липшица с константой порядка d^{-t_i}. Поэтому $\|g(y); C^i(\Omega_d)\| \le C_4 d^{-t_i}\rho^s(y)$ для всех d, y. Лемма доказана.

Лемма 5 содержательна при условии $2m \ge n+1$. Неравенство $i \ge r-n+1$ существенно лишь в случае $r \ge n$. В этом случае пространство Марцинкевича — Соболева $M^r_{\delta_n}(\Omega)$ непрерывно вложено в пространство $C^{r-n}(\overline{\Omega}) \cap L_Q^{r-n+1}(\Omega)$, где $L_Q(\Omega)$ — пространство Орлича, порождаемое функцией $Q(t) = -1 - |t| + \exp|t|$ [9]. В качестве следствия леммы 2 получаем непрерывность оператора $K : L_{1,s}(\Omega) \to C^{r-n}(\overline{\Omega}) \cap L_Q^{r-n+1}(\Omega)$ $(r \ge n)$.

Считая $2m \ge n+1$, введем в рассмотрение числа

$$t_i = \begin{cases} n+i-r-1+\varepsilon, & \text{если } (r+1-n)_+ \le i \le 2m-n-1, \\ 0, & \text{если } 0 \le i < (r+1-n)_+ \end{cases} \tag{12}$$

$(0 < \varepsilon \ll 1)$, и банахово пространство $2m - n - 1$ раз непрерывно дифференцируемых функций $u : \Omega \to \mathbb{R}$ с конечной нормой

$$\|u; H_r(\Omega)\| = \sum_{i=0}^{2m-n-1} \sup_{\Omega} \rho^{t_i}(x)|D^i u(x)|,$$

где $D^i u = \{D^\alpha u; |\alpha| = i\}$ — набор производных порядка i.

Лемма 6. *Если $2m \geq n + 1$, то оператор K действует и непрерывен из $L_{1,s}(\Omega)$ в $H_r(\Omega)$.*

Доказательство. Достаточно установить неравенство

$$\rho^{t_i}(x)|D^i u(x)| \leq C_6\|z; L_{1,s}(\Omega)\| \quad (u = Kz,\ i = 0, 1, \dots, 2m - n - 1).$$

Если $(r + 1 - n)_+ \leq i \leq 2m - n - 1$, то требуемое неравенство следует из (11). При малых i результат вытекает из непрерывности оператора $K : L_{1,s}(\Omega) \to C^{r-n}(\overline{\Omega})$. Лемма доказана.

2. Фиксируем число p из $(1, \infty)$ и положим

$$\overset{\circ}{E} = \bigl\{u \in L_p^{2m}(\Omega); B_j u = 0, j = 1, \dots, m\bigr\}.$$

Очевидно, что $\overset{\circ}{E}$ — замкнутое подпространство пространства $L_p^{2m}(\Omega)$.

В этом пункте устанавливаются обратные неравенства для функций u из $\overset{\circ}{E}$, удовлетворяющих дополнительным ограничениям типа поточечных дифференциальных неравенств.

Пусть $\mathfrak{K}(A) = \{u \in \overset{\circ}{E}; Au \geq 0\}$, A — эллиптический оператор, введенный в п. 1. При определенных предположениях относительно данных задачи (1), (2) выполнено условие

Y_2. Существует такая неотрицательная функция ψ из $L_\infty(\Omega)$, что справедливо неравенство

$$\|Au; L_{1,s}(\Omega)\| \leq \|\psi u; L_{1,s}(\Omega)\| \quad (u \in \mathfrak{K}(A)), \tag{13}$$

где $S = 2m - 1 - r_m$.

Условие Y_2 играет ключевую роль в данной работе. Вначале отметим некоторые его следствия, а затем обсудим предположения, гарантирующие выполнение этого условия. Из неравенства (1) и лемм 1, 6 следует соотношение

$$\bigl\|u; M_{\delta_n}^r(\Omega)\bigr\| + \|u; H_r(\Omega)\| \leq C\|\psi u; L_{1,s}(\Omega)\| \quad (u \in \mathfrak{K}(A)); \tag{14}$$

если $2m < n + 1$, то величина $\|u; H_r(\Omega)\|$ заменяется нулем. Оценка (14) носит характер обратного неравенства, так как $M_{\delta_n}^r(\Omega)$ компактно вложено в $L_{1,s}(\Omega)$. Функция ψ может обращаться в нуль на множествах положительной меры, поэтому в общем случае функционал $u \to \|\psi u; L_{1,s}(\Omega)\|$ является лишь полунормой. Неравенства (13), (14) в определенной мере характеризуют степень узости замкнутого в $\overset{\circ}{E}$ конуса $\mathfrak{K}(A)$. Полезно заметить, что с ростом r нормы в левой части (14) становятся сильнее.

Анализ условия Y_2 проведем вначале для задач с гладкими данными и краевыми условиями, образующими нормальную систему [10, с. 137]. Ниже $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — билинейная форма на $L_p(\Omega) \times L_{p^*}(\Omega)$ $(p^* = \frac{p}{p-1})$, задающая двойственность между пространствами $L_p(\Omega)$ и $L_{p^*}(\Omega)$.

Теорема 1. *Пусть оператор A равномерно эллиптичен, а операторы B_j $(j = 1, \dots, m)$ удовлетворяют условию дополнительности в усиленной форме и образуют нормальную систему. Пусть включения* (3) *имеют место при любом $l > 0$. Тогда выполнено условие Y_2.*

Доказательство. Обозначим через A^* формально сопряженный к A дифференциальный оператор. В силу результатов работы [11] существует функция v_0 из $L^{2m}_{n+1}(\Omega)$, обладающая свойствами

$$\begin{gathered}\langle Au; v_0\rangle = \langle u; A^* v_0\rangle \ (u \in \overset{\circ}{E}), \quad v_0(x) \ge C_2 \rho^s(x) \ (x \in \Omega), \\ v_0(x) + |(A^* v_0)(x)| \le C_3 \rho^s(x) \quad (x \in \Omega),\end{gathered} \tag{15}$$

где C_2, C_3 — положительные постоянные.

Если $u \in \mathfrak{K}(A)$, то $Au \ge 0$ и справедливы соотношения

$$C_2 \|Au; L_{1,s}(\Omega)\| \le \big\langle Au; v_0 \big\rangle = \langle u; A^* v_0\rangle \le C_3 \langle \psi_1 |u|; \rho^s\rangle,$$

в которых $\psi_1 = \rho^{-s}|A^* v_0|$ — функция класса $L_\infty(\Omega)$, $\psi_1 \ge 0$. Последнее неравенство влечет (13) с $\psi = \frac{c_3}{c_2}\psi_1$. Теорема доказана.

Требования гладкости данных задачи (1), (2) можно ослабить; достаточно, например, потребовать, чтобы включения (3) имели место при некотором $l \gg 0$. Граничные операторы задачи Дирихле $B_j = \frac{\partial^{j-1}}{\partial N^{j-1}}$ $(j = 1, \dots, m$; N — нормаль к $\partial\Omega)$ удовлетворяют предположениям теоремы с $r = m - 1$, $s = m$. Остановимся на возможных ослаблениях требований гладкости коэффициентов эллиптического оператора.

Лемма 7. *Пусть выполнены условия теоремы* 1, $\mathfrak{A} = A + A_1$, *где A_1 — дифференциальный оператор, определяемый равенством*

$$A_1 u = \sum_{|\alpha| \le 2m-1} a_{1\alpha}(x) D^\alpha u$$

($a_{1\alpha} \in C^l(\overline{\Omega})$, $l > s$). Тогда верно неравенство

$$\|\mathfrak{A}u; L_{1,s}(\Omega)\| \le C_4 \|u; L_{1,s}(\Omega)\| \quad (u \in \mathfrak{K}(A)) \tag{16}$$

с некоторой постоянной C_4.

Доказательство. Пусть $u \in \mathfrak{K}(A)$, v_0 — функция из $L^{2m}_{n+1}(\Omega)$, обладающая свойствами (15). Имеют место оценки

$$C_2 \|\mathfrak{A}u; L_{1,s}(\Omega)\| \le \langle Au + A_1 u, v_0\rangle \le C_5 \big\|u; L^{2m-1}_{1,s}(\Omega)\big\|,$$

левая из которых будет следствием неравенств $v_0(x) \ge C_2 \rho^s(x)$, $\mathfrak{A}u \ge 0$, а правая вытекает из (15), ограниченности коэффициентов $a_{1\alpha}$ и неравенства $v_0(x) \le C_3 \rho^s(x)$. Фиксируем число t так, чтобы оператор $\mathfrak{A} + tI$ (I — оператор тождественного преобразования) был обратимым при краевых условиях (2); существование подобного числа следует из того, что система операторов B_j $(j = 1, \dots, m)$ удовлетворяет условию дополнительности в усиленной форме [7, 2].

Из леммы 4 вытекает оценка

$$\big\|u; L^{2m-1}_{1,s}(\Omega)\big\}\| \le \varepsilon \|\mathfrak{A}u + tu; L_{1,s}(\Omega)\| + C(\varepsilon)\|u; L_{1,s}(\Omega)\|,$$

в которой $\varepsilon > 0$ может быть сколь угодно малым, $C(\varepsilon)$ — постоянная, не зависящая от u [10, с. 126]. Объединение двух последних неравенств при малых $\varepsilon > 0$ влечет неравенство (16). Лемма доказана.

Неравенство (16) означает, что оператор $\mathfrak{U}$ удовлетворяет условию Y_2; в рассматриваемом случае $\psi(x) \equiv C_4$, младшие коэффициенты оператора $\mathfrak{U}$ могут быть произвольными функциями класса $C^l(\overline{\Omega})$ $(l > s)$. Если старшая часть оператора A имеет дивергентную форму, то возможно дальнейшее ослабление требований к гладкости коэффициентов. В качестве примера рассмотрим задачу Дирихле

$$Au \equiv -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x)u = z, \tag{17}$$

$$u_{\partial\Omega} = 0, \tag{18}$$

где $a_{ij} = a_{ji} \in C^l(\overline{\Omega})$ $(l > 1)$, $a_i \in C^l(\overline{\Omega})$, $a \in C^{l-1}(\overline{\Omega})$, $\partial\Omega \in C^{l+1}$, оператор A равномерно эллиптичен:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)t_i t_j \geq \mu_0\bigl(t_1^2 + \dots + t_n^2\bigr) \quad (\mu_0 > 0);$$

$z \in L_p(\Omega)$. Сопряженная к (17), (18) краевая задача состоит в отыскании обращающегося в нуль на $\partial\Omega$ решения эллиптического уравнения

$$A^*v \equiv -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial v}{\partial x_j}\right) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_i(x)v) + a(x)v = w, \tag{19}$$

$w \in L_{p^*}(\Omega)$. Как известно, невырожденность задачи (17), (18) эквивалентна невырожденности задачи (19), (18). Решения u, v соответствующих невырожденных задач определяются равенствами

$$u = Kz = \int\limits_{\Omega} G(x,y)z(y)\,dy, \quad v = K^*w = \int\limits_{\Omega} G_*(x,y)w(y)\,dy,$$

в которых G — функция Грина задачи (17), (18), $G_*(x,y) = G(y,x)$.

Предложение 2. *Функция Грина $G(x,y)$ оператора A при краевом условии (18) существует и неотрицательна тогда и только тогда, когда существует удовлетворяющая краевому условию (18) функция v_0 из $C^2(\overline{\Omega})$, для которой $v_1 = Av_0 \geq 0$, $v_1(x) \not\equiv 0$; при этом сужение оператора K^* на $C(\overline{\Omega})$ ρ-положительно, т. е. для любой неотрицательной и отличной от нуля функции w из $C(\overline{\Omega})$ справедливо неравенство $\varkappa_1\rho \leq K^*w \leq \varkappa_2\rho$, где $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ — положительные постоянные.*

Предложение 2 следует из результатов работы [12].

Лемма 8. *Пусть оператор A положительно обратим при краевом условии (18). Тогда для любого шара $\omega \subset \Omega$ положительного радиуса найдется такая константа $C(\omega)$, что*

$$\|Au; L_{1,1}(\Omega)\| \leq C(\omega)\|u; L_1(\omega)\| \quad (u \in \mathfrak{K}(A)). \tag{20}$$

Доказательство. Пусть $w \in C_0^\infty(\Omega)$, $w(x) \geq 0$, $w(x) \not\equiv 0$ и $\sup w \subset \omega$. В условиях леммы K^* — ρ-положительный оператор, поэтому $\varkappa_1\rho \leq K^*w \leq \varkappa_2\rho$ $(\varkappa_1 > 0, \varkappa_2 > 0)$. Справедливы соотношения

$$\|Au; L_{1,1}(\Omega)\| = \langle z, \rho\rangle \leq \frac{1}{\varkappa_1}\langle z, K^*w\rangle = \frac{1}{\varkappa_1}\langle Kz, w\rangle \leq \frac{\max|w|}{\varkappa_1}\|u; L_1(\omega)\|.$$

Таким образом, неравенство (20) верно с $C(\omega) = \varkappa_1^{-1} \max |w|$. Лемма доказана.

Неравенство (20) — это вариант неравенства (13). В рассматриваемом случае $\psi(x) = C(\omega)\rho^{-1}(x)$ $(x \in \omega)$ и $\psi(x) = 0$ $(x \in \Omega \setminus \omega)$; в частности, ψ может обращаться в нуль на множествах положительной меры. Следствием (20) является более грубое неравенство

$$\|Au; L_{1,1}(\Omega)\| \le C_6 \|u; L_{1,1}(\Omega)\| \quad (u \in \mathfrak{K}(A)). \tag{21}$$

Это неравенство верно и без предположения положительной обратимости оператора A.

Теорема 2. *Для произвольного оператора A, удовлетворяющего условию равномерной эллиптичности и имеющего коэффициенты a_{ij}, a_i, а указанной выше гладкости, найдется такая константа C_6, что справедливо неравенство (21).*

Доказательство. В силу результатов работы [12] задача $A^*v = \lambda v$, $v_{\partial\Omega} = 0$ имеет единственную нормированную функцию φ, причем $\varkappa_1 \rho(x) \le \varphi(x) \le \varkappa_2 \rho(x)$ $(\varkappa_1, \varkappa_2 > 0)$. Если $u \in \mathfrak{K}(A)$, то $Au \ge 0$ и

$$\begin{aligned}\|Au; L_{1,1}(\Omega)\| &\le \frac{1}{\varkappa_1}\langle Au, \varphi\rangle = \frac{1}{\varkappa_1}\langle u; A^*\varphi\rangle \\ &= \frac{\lambda}{\varkappa_1}\langle u, \varphi\rangle \le \frac{|\lambda|}{\varkappa_1}\langle |u|, \varphi\rangle \le \frac{|\lambda|\varkappa_2}{\varkappa_1}\|u; L_{1,1}(\Omega)\|.\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Аналог теоремы 2 верен при замене краевого условия Дирихле (18) краевым условием Неймана

$$\frac{\partial u}{\partial N}(x) + b(x)u(x) = 0 \quad (x \in \partial\Omega).$$

Здесь $\frac{\partial u}{\partial N}$ — производная по внешней конормали, $b(x)$ — неотрицательная функция класса $C^l(\partial\Omega)$. Соответствующий анализ может быть проведен на основе содержащихся в [12] результатов.

Установим нелинейный вариант обратных неравенств.

Теорема 3. *Пусть $0 < \delta < 1$, k, k_1 — целые числа, $0 \le k \le 2m-1$, $0 < q_0 < 1$, $k_0 = k - n\delta$,*

$$k_0 + \frac{n}{p} < k_1 \le k_0 + 1; \tag{22}$$

$C_0 = 1$, если k_0 — целое неотрицательное число, и $C_0 = 0$ в противном случае; числа p_i $(i \ge k_1)$ удовлетворяют неравенствам

$$1 < p_i < \frac{2m - k_0}{i - k_0}; \tag{23}$$

h_0 — неотрицательная функция из $L_p(\Omega)$; $C \in (0; \infty)$.

Тогда существует такая возрастающая на $[0; \infty)$ функция V, что для любой функции u из $\overset{\circ}{E}$, удовлетворяющей неравенству

$$|Au| \le h_0 + C_0 C \exp |D^{k_0}u|^{q_0} + C \sum_{i \ge k_i} |D^i u|^{p_i}, \tag{24}$$

справедлива оценка

$$\|u; \overset{\circ}{E}\| \le V\big(\|u; M^k_\delta(\Omega)\|\big). \tag{25}$$

Доказательство. Для определенности положим, что $k_0 = k - n\delta$ — целое неотрицательное число (в противном случае рассуждения упрощаются). Пусть функция u из $\overset{\circ}{E}$ удовлетворяет неравенству (24) и $\|u; M_\delta^k(\Omega)\| < R_0$. В силу теорем вложения для пространств Марцинкевича — Соболева [9] справедливо неравенство

$$\int_\Omega (\exp C_7 |D^{k_0} u| - 1)\, dx \le 1, \tag{26}$$

C_7 — зависящая от R_0 постоянная.

Используя монотонность нормы в $L_p(\Omega)$ и неравенства (24), (26), получаем соотношения

$$\|Au; L_p(\Omega)\| \le C_8 \Big(1 + \sum_{i \ge k_1} \|u; L^i_{pp_i}(\Omega)\|^{p_i}\Big),$$

C_8 не зависит от u. Далее, применим неравенства

$$\|u; L_p^{2m}(\Omega)\| \le C(A) \|Au; L_p(\Omega)\|, \tag{27}$$

$$\|u; L^i_{pp_i}(\Omega)\| \le C(k_1, i, m) \|u; L_q^{k_1}(\Omega)\|^{1-\tau_i} \|u; L_p^{2m}(\Omega)\|^{\tau_i}. \tag{28}$$

Неравенство (27) следует из непрерывности оператора $K : L_p(\Omega) \to L_p^{2m}(\Omega)$. В неравенстве (28), вытекающем из мультипликативных неравенств Гальярдо — Ниренберга [4, с. 237], число q определим из условия

$$k_1 - \frac{n}{q} < k_0 = k - n\delta < k_1 - \frac{n}{q} + \varepsilon \quad (0 < \varepsilon \ll 1);$$

тогда

$$\tau_i \left(2m - \frac{n}{p} - k_1 + \frac{n}{q}\right) = i - \frac{n}{pp_i} - k_1 + \frac{n}{q}.$$

Так как $k - n\delta > k_1 - \frac{n}{q}$, то $M_\delta^k(\Omega)$ непрерывно вложено в $L_q^{k_1}(\Omega)$. Из неравенства $\|u; M_\delta^k(\Omega)\| < R_0$ следует оценка $\|u; L_q^{k_1}(\Omega)\| < R_1$. Объединяя (27), (28), получаем неравенство

$$\|u; \overset{\circ}{E}\| \le C_9 \Big(1 + \sum_{i \ge k_1} \|u; \overset{\circ}{E}\|^{\tau_i p_i}\Big),$$

в котором C_9 не зависит от u. В силу выбора числа q имеем

$$0 < k_0 - k_1 + \frac{n}{q} < \varepsilon \ll 1,$$

отсюда и из (23) вытекает неравенство $\tau_i p_i < 1$ $(i \ge k_i)$. Следовательно, $\|u; \overset{\circ}{E}\| < R$, постоянная R зависит только от R_0. Полученная оценка влечет (25). Теорема доказана.

Основное отличие теоремы 3 от известных априорных оценок решений нелинейных эллиптических уравнений (см., например, [6; 14–16] и приведенную там литературу) связано с переходом от пространств $L_q^k(\Omega)$, $C^k(\overline{\Omega})$ к пространству Марцинкевича — Соболева $M_\delta^k(\Omega)$.

3. В этом пункте изучается нелинейное эллиптическое уравнение

$$Au(x) = \lambda f(x, u, \dots, D^{2m-1} u) + z(x) \quad (x \in \Omega). \tag{29}$$

Функция $f(x,\xi)$ предполагается непрерывной по совокупности переменных при $x \in \overline{\Omega}$ и произвольном $\xi = (\xi_0, \dots, \xi_{2m-1})$. Функция z принадлежит пространству $L_p(\Omega)$, где $p > n$. При $\lambda = 0$ уравнение (29) совпадает с уравнением (1); краевая задача (1), (2) — частный случай краевой задачи (29), (2). Под решением задачи (29), (2) понимается функция u из $\overset{\circ}{E}$, удовлетворяющая уравнению (29). Далее используются некоторые ограничения роста функции f.

Y_3. Функция $f(x,\xi)$ удовлетворяет неравенству

$$f(x,\xi) \geq \psi(x) M(|\xi_0|), \tag{30}$$

в котором ψ — функция, фигурирующая в условии Y_2, $M : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, $M(t)t^{-1} \to \infty$ при $t \to \infty$.

Y_4. Для каждой константы N_0 существует такая постоянная $C(N_0)$, что если $|\xi_0|\rho^{t_0}(x) + \dots + |\xi_{2m-n-1}|\rho^{t_{2m-n-1}}(x) \leq N_0$, то

$$|f(x,\xi)| \leq C(N_0)\Big(1 + \exp|\xi_{r-n+1}|^{\bar{p}_0} + \sum_{i>r-n+1} |\xi_i|^{p_i}\Big); \tag{31}$$

здесь числа t_i определены равенствами (12), $2m-1-r+n > p_i$ $(i-1-r+n)$, $0 < \bar{p}_0 < 1$; если $r < n-1$, то суммирование в правой части (31) распространяется на целые i от 0 до $2m-1$, слагаемое $\exp|\xi_{r-n+1}|^{\bar{p}_0}$ заменяется нулем.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия Y_1–Y_4. Тогда найдется такое число $\lambda_0 > 0$, что при любом λ из $(0;\lambda_0)$ существуют два решения u_λ, U_λ задачи* (29), (2), *причем $u_\lambda \to u_0 = Kz$ в $\overset{\circ}{E}$, $\|U_\lambda; \overset{\circ}{E}\| \to \infty$ при $\lambda \to 0$.*

Доказательство. Фиксируем $\lambda > 0$. Так как $M(t)t^{-1} \to \infty$ при $t \to \infty$, то $\lambda M(t) \geq 2t - m_0(\lambda)$ $(t \geq 0,\ m_0(\lambda) < \infty)$, что согласно (30) влечет неравенство

$$\lambda f(x,\xi) \geq 2|\xi_0|\psi(x) - m_0(\lambda)\psi(x). \tag{32}$$

Положим

$$f_\tau(x,\xi) = (1-\tau)(\lambda f(x,\xi) + z(x)) + \tau(2|\xi_0|\psi(x) + 1),$$

$$F_\tau(u) = f_\tau(\cdot, u, \dots, D^{2m-1}u), \quad F(u) = f(\cdot, u, \dots, D^{2m-1}u) \quad (0 \leq \tau \leq 1,\ u \in \overset{\circ}{E})$$

и рассмотрим семейство краевых задач

$$Au = F_\tau(u), \quad u \in \overset{\circ}{E} \quad (0 \leq \tau \leq 1), \tag{33}$$

зависящих от параметра τ.

Пусть u — решение задачи (33) при некотором τ из $[0,1]$,

$$z_1 = (1-\tau)(\lambda F(u) + m_0(\lambda)\psi) + \tau(2|u|\psi + 1), \quad z_2 = (1-\tau)(z - m_0(\lambda)\psi),$$

$w_i = Kz_i$ $(i = 1,2)$. Очевидна оценка $\|w_2; \overset{\circ}{E}\| < R_1$, где R_1 не зависит от τ.

Функция $w_1 = Kz_1$ из $\overset{\circ}{E}$ удовлетворяет неравенству $Aw_1 = z_1 \geq 0$, поэтому $w_1 \in \mathfrak{K}(A)$. Согласно (13) имеем

$$\|Aw_1; L_{1,s}(\Omega)\| \leq \|\psi w_1; L_{1,s}(\Omega)\|,$$

с другой стороны, $z_1 \geq 2|u| + \tau$, следовательно,

$$\|Aw_1; L_{1,s}(\Omega)\| = \langle z_1, \rho^s\rangle \geq 2\|(w_1 + w_2)\psi; L_{1,s}(\Omega)\| + \tau\|1; L_{1,s}(\Omega)\|.$$

Объединяя два последних неравенства, получаем соотношение

$$2\|\psi(w_1+w_2); L_{1,s}(\Omega)\| + \tau\|1; L_{1,s}(\Omega)\| \le \|\psi w_1; L_{1,s}(\Omega)\|.$$

При $\tau = 1$ функция w_2 равна 0, поэтому данное соотношение невозможно, а это означает, что задача (33) при $\tau = 1$ не имеет решений. При произвольном τ из $[0;1]$ приходим к оценке $\|\psi w_1; L_{1,s}(\Omega)\| < R_2$, из которой в силу условий Y_1, Y_2 и результатов п. 1 выводится неравенство

$$\left\|u; M_\delta^r(\Omega)\right\| + \|u; H_r(\Omega)\| \le R_3. \tag{34}$$

Из (34), (31) вытекает, что функция u удовлетворяет условиям теоремы 3 с $\delta = 1 - \frac{1}{n}$, $k = r$. Согласно теореме 3 справедлива оценка

$$\|u; \overset{\circ}{E}\| < R_4, \tag{35}$$

постоянная R_4 не зависит от τ.

Множество решений задачи (33) совпадает с множеством особых точек вполне непрерывного в пространстве $\overset{\circ}{E}$ векторного поля $\Phi_\tau u = u - KF_\tau(u)$. В силу оценки (35) векторное поле Φ_τ невырожденно на границе $\partial\mathfrak{B}_R$ шара $\mathfrak{B}_R = \{u \in \overset{\circ}{E}, \|u; \overset{\circ}{E}\| < R\}$ $(R \ge R_4, 0 \le \tau \le 1)$. Отсюда вытекает гомотопность на $\partial\mathfrak{B}_R$ полей Φ_0, Φ_1, а значит, совпадение вращений $\gamma(\Phi_0, \mathfrak{B}_R)$, $\gamma(\Phi_1, \mathfrak{B}_R)$ полей Φ_0, Φ_1 на $\partial\mathfrak{B}_R$ [17, с. 137]. Поле Φ_1 не имеет особых точек, следовательно, $\gamma(\Phi_0, \mathfrak{B}_R) = \gamma(\Phi_1, \mathfrak{B}_R) = 0$.

Таким образом, вращение поля Φ_0 на сферах больших радиусов пространства $\overset{\circ}{E}$ равно нулю: $\operatorname{ind}(\infty, \Phi_0) = 0$. Это равенство справедливо при любом $\lambda > 0$.

Фиксируем $R_0 > 0$ и положим $u_0 = Kz$, $\mathfrak{B}(u_0, R_0) = \{u \in \overset{\circ}{E}, \|u - u_0; \overset{\circ}{E}\| < R_0\}$. Оператор KF ограничен на каждом ограниченном подмножестве пространства $\overset{\circ}{E}$, поэтому найдется такое число $\lambda_0 > 0$, что $\lambda_0\|KF(u); \overset{\circ}{E}\| < R_0$, если $\|u - u_0; \overset{\circ}{E}\| = R_0$. При любом $\lambda \in (0; \lambda_0)$ векторное поле $\Phi_0 u = u - u_0 - \lambda KF(u)$ не вырождается на границе шара $\mathfrak{B}(u_0, R_0)$ и $\gamma(\Phi_0, \mathfrak{B}(u_0, R_0)) = 1$. Сравнивая это равенство с ранее установленным равенством $\operatorname{ind}(\infty, \Phi_0) = 0$, получаем, что при любом λ из $(0; \lambda_0)$

$$\gamma(\Phi_0, \mathfrak{B}(u_0, R_0)) = 1 \ne \operatorname{ind}(\infty, \Phi_0) = 0.$$

В силу теоремы об алгебраическом числе особых точек [17, с. 139] поле Φ_0 имеет две особые точки u_λ, U_λ, причем $u_\lambda \in \mathfrak{B}(u_0, R_0)$, $U_\lambda \notin \mathfrak{B}(u_0, R_0)$ $(0 < \lambda < \lambda_0)$. Если ветвь w_λ решений задачи (29), (2) ограничена в пространстве $\overset{\circ}{E}$ на некотором множестве $\Lambda \subset (0; \lambda_0)$, $0 \in \overline{\Lambda}$, то в силу равенства $w_\lambda = u_0 + \lambda KF(w_\lambda)$ имеем $w_\lambda \to u_0$ при $\lambda \to 0$ в пространстве $\overset{\circ}{E}$. Отсюда вытекает требуемое заключение о поведении ветвей решений u_λ, U_λ при $\lambda \to 0$. Теорема доказана.

Условие малости параметра λ существенно. Если, например, $\lambda f(x, \xi) + z(x) > \psi(x)|\xi_0|$, то из оценки (13) следует отсутствие решений задачи (29), (2). Обсудим вопрос о типичном числе решений этой задачи при любом $\lambda > 0$ в предположении непрерывности частных производных $\frac{\partial f}{\partial \xi_i}$ $(i = 0, \dots, 2m-1)$ по совокупности переменных. Данное предположение обеспечивает гладкость оператора $T_\lambda = A - \lambda F : \overset{\circ}{E} \to L_p(\Omega)$. Для отображения T_λ можно ввести понятия регулярной точки и регулярного значения. Элемент u из $\overset{\circ}{E}$, для которого производная $T'_\lambda(u) : \overset{\circ}{E} \to L_p(\Omega)$ — сюръекция, называется *регулярной точкой отображения* T_λ. Элемент z из $L_p(\Omega)$ называется *регулярным значением отображения* T_λ, если полный прообраз z либо пуст, либо состоит из регулярных точек. Обозначим через $\mathfrak{R}(T_\lambda)$ множество регулярных значений отображения T_λ.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия Y_1–Y_4 и функция f имеет непрерывные по совокупности переменных частные производные $\frac{\partial f}{\partial \xi_i}$ $(i = 0, \dots, 2m-1)$. Тогда при любом z из $\mathfrak{R}(T_\lambda)$ число решений задачи* (29), (2) *четно.*

Доказательство. Пусть $z \in \mathfrak{R}(T_\lambda)$, $T_\lambda u = z$ для некоторого u из $\overset{\circ}{E}$. Тогда $T'_\lambda(u) : \overset{\circ}{E} \to L_p(\Omega)$ — сюръекция, а это равносильно тому, что 1 не является собственным значением оператора $KF'(u)$. Следовательно, индекс каждой особой точки поля $\Phi_0 u = u - KF(u)$ равен ± 1 [17, с. 144]. Из равенства $\operatorname{ind}(\infty, \Phi_0) = 0$ и теоремы об алгебраическом числе особых точек [17, с. 139] вытекает, что уравнение $T_\lambda u = z$ имеет четное число решений. Если $z \notin T_\lambda \overset{\circ}{E}$, то задача (29), (2) не имеет решений. Тем самым утверждение теоремы верно для всех z из $\mathfrak{R}(T_\lambda)$. Теорема доказана.

Из общих результатов теории гладких операторов [17, с. 163] следует, что в условиях теоремы $L_p(\Omega) \setminus \mathfrak{R}(T_\lambda)$ — тощее множество, поэтому типичное число решений задачи (29), (2) четно. Теорема 5 позволяет установить существование не менее двух решений задачи (29), (2) для некоторых z из $L_p(\Omega)$.

Теорема 6. *Пусть выполнены условия теоремы* 5 *и* $f(x, 0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial \xi_i}(x, 0) = 0$ $(i = 0, \dots, 2m-1)$. *Тогда задача* (29), (2) *при* $z = 0$ *и любом* $\lambda > 0$ *имеет ненулевое решение* U_λ.

Доказательство. Функция $u_0 = 0$ — решение задачи (29), (2) при любом $\lambda > 0$. Так как $\frac{\partial f}{\partial \xi_i}(x, 0) = 0$ $(i = 1, \dots, 2m-1)$, то $T'_\lambda(u_0) = A$. Отсюда вытекает, что u_0 — регулярная точка отображения $T_\lambda : \overset{\circ}{E} \to L_p(\Omega)$. Если задача (29), (2) не имеет ненулевых решений при некотором $\lambda > 0$, то $0 \in \mathfrak{R}(T_\lambda)$. Согласно теореме 5 число решений задачи (29), (2) четно. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Обсудим условия Y_1–Y_4. Эти условия выполняются для широкого класса краевых задач. Как полагают авторы, предпринятое в статье исследование конуса $\mathfrak{K}(A)$ представляет самостоятельный интерес. Обратное неравенство (14) можно усилить, расширяя класс функциональных пространств.

Условия Y_3, Y_4 легко обозримы. Неравенство (30) означает сверхлинейный рост функции $f(x, \xi)$ по переменной ξ_0 для тех x, при которых $\psi(x) > 0$; (как вытекает из результатов п. 2, функция для некоторых задач положительна лишь на множествах малой меры). Условие можно заменить требованием

$$\|F(u); L_{1,s}(\Omega)\| \geq M_1(\|Au; L_{1,s}(\Omega)\|),$$

где функция $M_1 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ непрерывна и $M_1(t)t^{-1} \to \infty$ при $t \to \infty$.

Жесткость условия Y_4 зависит от r, m и уменьшается при их возрастании. По переменным ξ_i $(i \leq r-n)$ функция f может иметь произвольный рост. Ограничения на рост функции f по переменным ξ_i $(r-n+1 \leq i \leq 2m-n-1)$ накладываются фактически лишь вблизи границы $\partial\Omega$. Наконец, требуемое ограничение роста f по переменным ξ_i $(2m-n \leq i \leq 2m-1)$ — обобщение L-условия Бернштейна. Таким образом, допустимый рост функции f различен для каждой из отмеченных трех групп переменных ξ_i. Для эллиптических уравнений высоких порядков каждая из трех групп переменных непуста. По-видимому, эффект ослабления ограничений роста нелинейностей в каждой внутренней подобласти Ω ранее не отмечался.

Приведем примеры иллюстративного характера. Вначале рассмотрим задачу типа Дирихле

$$\Delta^2 u = \lambda f(x, u, Du, D^2u, D^3u) + z \quad (x \in \Omega), \tag{36}$$

$$u(x) = \frac{\partial u}{\partial N}(x) = 0 \quad (x \in \partial\Omega). \tag{37}$$

Здесь Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^2$ с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ — оператор Лапласа, $\lambda \geq 0$, $f(x, \xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ — непрерывная по совокупности переменных функция, $z \in L_p(\Omega)$ $(p > 2)$. Линейный вариант задачи (36), (37), возникающий при $\lambda = 0$ удовлетворяет условиям Y_1, Y_2; в рассматриваемом случае $r = 1$, $s = 3$, в качестве ψ можно взять достаточно большую постоянную. Условие Y_3 выполнено, если $f(x, \xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3) \geq M_2(|\xi_0|)$, где $M_2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция и $M_2(t)t^{-1} \to \infty$ при $t \to \infty$. Наконец, для выполнения условия Y_4 достаточно, чтобы из неравенства

$$|\xi_0|\rho^{\varepsilon}(x) + |\xi_1|\rho^{1+\varepsilon}(x) \leq N_0$$

вытекала оценка

$$|f(x, \xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)| \leq C(N_0)\left(\exp|\xi_0|^{\bar{p}_0} + \sum_{i=1}^{3} |\xi_i|^{p_i}\right),$$

где $0 < \bar{p}_0 < 1$, $ip_i < 4$ $(i = 1, 2, 3)$. Например, условиям Y_3, Y_4 удовлетворяет функция $f(x, \xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3) = |\xi_0|^{\tau} (\tau > 1)$.

При замене (37) краевым условием вида

$$u(x) = \Delta u(x) = 0 \quad (x \in \partial\Omega) \tag{38}$$

возможно некоторое ослабление ограничения роста функции f. В этом случае $r = s = 2$; для выполнения условия Y_4 достаточно, чтобы из неравенства $|\xi_0| + |\xi_1|\rho^{\varepsilon}(x) \leq N_0$ вытекала оценка

$$|f(x, \xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)| \leq C(N)\left(\exp|\xi_0|^{q_1} + \sum_{i=2}^{3} |\xi_j|^{q_j}\right),$$

где $0 < q_1 < 1$, $q_j\ (j-1) < 3$ $(j = 2; 3)$. Таким образом, в данном случае рост функции f по переменной ξ_0 может быть произвольным. Анализ условий Y_1–Y_3 для краевого условия (38) ничем не отличается от проведенного выше и относящегося к задаче Дирихле.

Ограничение $n = 2$ несущественно; аналогичные примеры возможны для любого числа измерений. Увеличение размерности области Ω влечет количественное изменение допустимого роста функции f. Основные выводы о числе решений соответствующих краевых задач сохраняются.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.

2. *Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966.

3. *Kufner A., John O., Fučik S.* Function Spaces. Praha; Gronengen: Academia, 1977.

4. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.

5. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.

6. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М: Наука, 1973.

7. *Agmon S.* On eigenfunctions and the eigenvalues of general elliptic boundary value problems // Comm. Pure Appl. Math. 1962. V. 15, N 2. P. 119–147.

8. *Солонников В. А.* О матрицах Грина для эллиптических краевых задач // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1971. Т. 126. С. 181–216.

9. *Климов В. С.* К теоремам вложения для симметричных пространств // Мат. сб. 1970. Т. 82, № 3. С. 371–386.

10. *Лионс Ж., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.

11. *Климов В. С.* Нетривиальные решения краевых задач для полулинейных эллиптических уравнений // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1971. Т. 35, № 2. С. 482–489.

12. *Климов В. С.* О неотрицательных решениях краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка // Сиб. мат. журн. 1971. Т. 12, № 4. С. 718–726.

13. *Nirenberg L.* On elliptic partial differential equations // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (3). 1959. N 13. P. 115–162.

14. *Похожаев С. И.* О нелинейных операторах, имеющих слабо замкнутую область значений, и квазилинейных эллиптических уравнениях // Мат. сб. 1969. Т. 78, № 2. С. 236–258.

15. *Похожаев С. И.* Об априорных оценках решений квазилинейных эллиптических уравнений произвольного порядка // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 1. С. 101–110.

16. *Скрыпник И. В.* Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. М.: Наука, 1990.

17. *Красносельский М. А., Забрейко П. П.* Геометрические методы нелинейного анализа. М: Наука, 1975.

Статья поступила 28 февраля 2000 г.

Климов Владимир Степанович
Ярославский гос. университет, кафедра математического анализа,
ул. Советская, 14, Ярославль 150000

Павленко Алексей Николаевич
Борисоглебский гос. педагогический институт, кафедра математического анализа
и методики преподавания математики,
ул. Народная, 43, Воронежская обл., Борисоглебск 397160