Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2000. Том 41, № 5

УДК 517.2+517.957+517.972

УСТОЙЧИВОСТЬ КЛАССОВ ЛИПШИЦЕВЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ, ТЕОРЕМА ДАРБУ И КВАЗИВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА

А. А. Егоров, М. В. Коробков

Аннотация: В работе доказан следующий результат. Пусть для компакта G пространства $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ линейных отображений из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$ имеет место представление

$$G = \bigcap_{\alpha\in A} \bigcup_{i=1}^{k_\alpha} G_i^\alpha,$$

где G_i^α — квазивыпуклые компактные множества, причем $G_i^\alpha \cap G \cap G_j^\alpha = \varnothing$ для всех $\alpha \in A$ и любой пары индексов $i \neq j$. Тогда класс всевозможных локально липшицевых отображений $g : \Delta \to \mathbb{R}^m$ областей $\Delta \subset \mathbb{R}^n$, для каждого из которых при любом $\alpha \in A$ найдется номер $i \in \{1, \dots, k_\alpha\}$ такой, что

$$g'(x) \in G_i^\alpha \text{ для почти всех } x \in \operatorname{dom} g,$$

является ω-устойчивым по А. П. Копылову.

Отсюда, в частности, вытекает, что ω-устойчивыми являются класс I_n изометрических отображений (как сохраняющих, так и меняющих ориентацию), а также класс аффинных отображений, производные которых лежат в объединении $G = SO(n)a_1 \cup \dots \cup SO(n)a_k$, $\det a_i \neq 0$, $SO(n)a_i \cap SO(n)a_j = \varnothing$ при $i \neq j$.

С целью геометрического описания найденных ω-устойчивых классов отображений в статье введено понятие qc-связности множеств в пространстве линейных отображений. Это понятие находит также важное применение в классическом дифференциальном исчислении. А именно установлено, что если дифференцируемое отображение $f : \Delta \to \mathbb{R}^m$ области $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ локально удовлетворяет условию Липшица, то образ $\operatorname{Im} f'$ производной f является qc-связным множеством. Библиогр. 20.

В работе изучаются вопросы устойчивости классов отображений следующего вида.

Определение 1. Пусть G — непустое компактное множество в пространстве $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ линейных отображений из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$, и пусть имеется разбиение $G = \bigcup\limits_{t\in T} G_t$ множества G на попарно не пересекающиеся компактные множества G_t. Будем говорить, что класс отображений $\mathfrak{G}$ *порожден разбиением* $(G_t)_{t\in T}$, если он состоит из локально липшицевых отображений $g : \Delta \to \mathbb{R}^m$ областей $\Delta \subset \mathbb{R}^n$, для каждого из которых существует элемент разбиения G_t такой, что отображение g является решением дифференциального соотношения

$$g'(x) \in G_t \text{ для почти всех } x \in \operatorname{dom} g.$$

Работа поддержана РФФИ (код проекта 99–01–00517), INTAS (код проекта 97–0170) и программой «Ведущие научные школы».

Здесь $g'(x)$ — дифференциал отображения g в точке x.

Отметим, что многие классы отображений, имеющие важное значение для геометрии и анализа, являются классами рассматриваемого вида. Один из характерных примеров — класс I_n изометрических отображений (как сохраняющих, так и меняющих ориентацию) в $\mathbb{R}^n$ областей пространства $\mathbb{R}^n$. Класс I_n порожден следующим разбиением множества $\mathbb{O}(n)$ ортогональных преобразований пространства $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbb{O}(n) = SO(n) \cup SO(n)a, \tag{1}$$

где $a \in \mathbb{O}(n)$, $\det a = -1$. При этом нужно учесть, что всякое локально липшицево отображение $g : \Delta \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, производная $g'(x)$ которого лежит в $SO(n)$ для почти всех (п. в.) $x \in \Delta$, является аффинным, а следовательно, и изометрическим (см., например, [1–3]).

Исследования устойчивости мы ведем в рамках концепции ω-устойчивости, предложенной А. П. Копыловым в статье [4]. По существу, ω-устойчивость класса $\mathfrak{G}$ означает, что из локальной близости отображения $f : \Delta \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ к отображениям класса $\mathfrak{G}$ следует его близость к ним в C-норме (точное определение см. в п. 1). В частном случае, когда отображение f дифференцируемо, локальная близость f к отображениям класса $\mathfrak{G}$, описанного в определении 1, эквивалентна малости расстояния $\operatorname{dist}(f'(x), G) = \inf\limits_{b \in G} \|f'(x) - b\|$ во всех точках x области определения f, где $\|\cdot\|$ — операторная норма в пространстве $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Концепция ω-устойчивости восходит к работам [5–7] Ф. Джона по устойчивости класса изометрий I_n. Отметим, что вопросы устойчивости класса I_n рассматривались также в работах А. П. Копылова, Ю. Г. Решетняка и др. (см., например, [1, 3, 4]).

В качестве отправной точки нашего исследования доказана теорема о том, что если G — квазивыпуклое компактное множество (см. п. 1), то класс $\mathfrak{G}$, порожденный тривиальным (одноэлементным) разбиением множества G, является ω-устойчивым (теорема 1). Этот результат соответствует следующей теореме теории квазивыпуклых множеств (см., например, [2]), являющейся следствием теоремы Ч. Морри о полунепрерывности функционалов вариационного исчисления [8, 9].

Теорема А. *Пусть $G \subset L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ — квазивыпуклое компактное множество. Тогда если последовательность отображений $f_\nu : B \to \mathbb{R}^m$ шара $B \subset \mathbb{R}^n$ $*$-слабо сходится в $W^1_\infty(B, \mathbb{R}^m)$ к отображению $f : B \to \mathbb{R}^m$, причем $\operatorname{dist}(f'_\nu(\cdot), G) \to 0$ по мере при $\nu \to \infty$, то для п. в. $x \in B$ выполняется дифференциальное соотношение $f'(x) \in G$.*

В связи с теоремой А напомним, что в силу известных теорем функционального анализа $*$-слабая сходимость в $W^1_\infty(B, \mathbb{R}^m)$ последовательности f_ν к f равносильна тому, что отображения f_ν удовлетворяют условию Липшица с единой константой и равномерно сходятся к f.

Одним из основных инструментов в работе является установленная в статье [10] (см. также [11]) теорема о сохранении свойства устойчивости при теоретико-множественных операциях над ω-устойчивыми классами отображений (теорема 2). С ее помощью авторами получено следующее (существенное) усиление теоремы 1. Пусть для компакта $G \subset L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ имеет место представление

$$G = \bigcap_{\alpha \in A} \bigcup_{i=1}^{k_\alpha} G_i^\alpha,$$

где G_i^α — квазивыпуклые компактные множества, причем $G_i^\alpha \cap G \cap G_j^\alpha = \varnothing$ для всех $\alpha \in A$ и любой пары индексов $i \neq j$. Тогда класс $\mathfrak{G}$, порожденный разбиением множества G на классы эквивалентности по отношению

$$a \sim b \Leftrightarrow \ \forall \alpha \in A \ \exists i \in \{1, \dots, k_\alpha\} \ a \in G_i^\alpha \text{ и } b \in G_i^\alpha, \tag{2}$$

является ω-устойчивым (теорема 3, см. также замечание 2). Так как $SO(n)$ — квазивыпуклое множество (см., например, [1, 2]), то из теоремы 3, в частности, вытекает, что ω-устойчивыми являются класс изометрий I_n, а также класс аффинных отображений, производные которых лежат в объединении

$$G = SO(n)a_1 \cup \ldots \cup SO(n)a_k, \ \det a_i \neq 0, \ SO(n)a_i \cap SO(n)a_j = \varnothing \text{ при } i \neq j. \tag{3}$$

Эти результаты позволяют по новому взглянуть (см. следствия 1, 2 теоремы 3) на актуальную задачу теории квазивыпуклых множеств, так называемую проблему k-колец (k-well) [2, 12, 13], которая важна для физических приложений.

Так как компактные множества сохраняющих ориентацию линейных конформных отображений квазивыпуклы (см. замечание 1), то полученные результаты полезно сравнить с теорией М. А. Лаврентьева — П. П. Белинского — Ю. Г. Решетняка устойчивости конформных отображений (см., например, монографию [3] и библиографию в ней, а также [10, теорема 3]).

С целью геометрического описания рассмотренных в теореме 3 ω-устойчивых классов отображений в статье введено понятие qc-связности множеств в пространстве линейных отображений (определение 3) и установлены следующие факты:

1) непустой компакт $G \subset L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ допускает представление, описанное в теореме 3, в том и только том случае, когда все компоненты qc-связности множества G квазивыпуклы (теорема 4);

2) если все компоненты qc-связности непустого компакта G квазивыпуклы, то класс $\mathfrak{G}$, порожденный разбиением множества G на эти компоненты qc-связности, является ω-устойчивым (теорема 5).

Понятие qc-связности находит также важное применение в классическом дифференциальном исчислении. А именно, показано, что если дифференцируемое отображение $f : \Delta \to \mathbb{R}^m$ области $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ локально удовлетворяет условию Липшица, то образ $\operatorname{Im} f'$ производной f является qc-связным множеством (теорема 6). Это утверждение можно рассматривать как обобщение на многомерный случай (для локально липшицевых отображений) теоремы Дарбу о промежуточных значениях производной вещественной функции, заданной на интервале.

Результаты настоящей статьи обобщают многие из результатов предыдущих работ авторов [10, 11, 15–17]. Отметим, что теорема 1 установлена А. А. Егоровым, теорема 3 принадлежит обоим авторам, а остальные теоремы настоящей статьи были получены М. В. Коробковым.

1. Напомним некоторые основные понятия теории ω-устойчивости классов липшицевых отображений. Пусть n и m — произвольные натуральные числа, и пусть Δ — область (открытое связное множество) пространства $\mathbb{R}^n$. Говорят, что отображение $f : \Delta \to \mathbb{R}^m$ *локально липшицево*, если для каждой точки

$x \in \Delta$ существуют окрестность $U_x \subset \Delta$ точки x и число $L_x \geq 0$ такие, что выполняется неравенство $|f(x') - f(x'')| \leq L_x |x' - x''|$ для каждой пары точек x' и x'' из U_x. Кроме того, если существует число $C \geq 0$ такое, что $L_x = C$ для всех $x \in \Delta$, то f называется *локально C-липшицевым*.

Класс $\mathfrak{G} = \{g : \Delta \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m\}$ отображений в $\mathbb{R}^m$ областей Δ пространства $\mathbb{R}^n$ называется *нормальным*, если он удовлетворяет следующим *условиям нормальности*, введенным А. П. Копыловым [4].

K_1^*. Класс $\mathfrak{G}$ состоит из локально C-липшицевых отображений с фиксированной константой липшицевости $C = C_{\mathfrak{G}} \geq 0$.

K_2^*. Если отображение $g : \Delta \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ принадлежит классу $\mathfrak{G}$, $\rho \in \mathbb{R}$, $\rho > 0$, $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, то отображение $g_0 : \Delta_0 \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, определяемое формулой

$$\Delta_0 \ni x \xrightarrow{g_0} \rho^{-1} g(\rho x + a) + b,$$

где $\Delta_0 = \{\rho^{-1}(y - a) \mid y \in \Delta\}$, также принадлежит $\mathfrak{G}$.

K_3^*. Класс $\mathfrak{G}$ замкнут относительно локально равномерной сходимости.

K_4^*. Класс $\mathfrak{G}$ порожден пучком $\mathscr{N} = \mathscr{N}_{\mathfrak{G}}$ отображений на $\mathbb{R}^n$ со значениями в $\mathbb{R}^m$ в следующем смысле: $\mathfrak{G} = \bigcup\limits_{\Delta \subset \mathbb{R}^n} \mathscr{N}(\Delta)$, где объединение строится с использованием всех областей Δ пространства $\mathbb{R}^n$ (см. [18, определение 5.4.1]).

Нормальный класс $\mathfrak{G}$ называется *ω-устойчивым* [4] (см. также [14]), если существует функция $\sigma : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ такая, что

1) $\sigma(\varepsilon) \to \sigma(0) = 0$ при $\varepsilon \to 0$;

2) для каждого отображения $f : \Delta \to \mathbb{R}^m$ области $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ с $\Omega(f, \mathfrak{G}) < \infty$ справедливо неравенство $\omega(f, \mathfrak{G}) \leq \sigma(\Omega(f, \mathfrak{G}))$.

Здесь $\omega(f, \mathfrak{G}) = \sup\limits_{B \subset \Delta} \omega_B(f, \mathfrak{G})$, $\Omega(f, \mathfrak{G}) = \sup\limits_{x \in \Delta} \Omega(x, f, \mathfrak{G})$, причем $B = B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y - x| < r\}$ — это n-мерный шар, содержащийся в области Δ, и

$$\omega_B(f, \mathfrak{G}) = \inf_{g : B \to \mathbb{R}^m,\ g \in \mathfrak{G}} \{r^{-1} \sup_{y \in B} |f(y) - g(y)|\}, \quad \Omega(x, f, \mathfrak{G}) = \overline{\lim_{r \to 0}}\, \omega_{B(x,r)}(f, \mathfrak{G}).$$

Функционалы $\omega(\cdot, \mathfrak{G})$ и $\Omega(\cdot, \mathfrak{G})$ называются функционалами *глобальной* и соответственно *локальной близости* к классу $\mathfrak{G}$. Заметим, что условие равенства нулю функционала глобальной близости, $\omega(f, \mathfrak{G}) = 0$, равносильно принадлежности f классу $\mathfrak{G}$ (см. [4]).

Понятие ω-устойчивости означает, по существу, что отображение $f : \Delta \to \mathbb{R}^m$ можно аппроксимировать с большой точностью отображениями из $\mathfrak{G}$ на любом шаре из Δ, если f аппроксимируется с достаточной точностью отображениями из $\mathfrak{G}$ в бесконечно малых шарах из Δ.

Положим

$$\mathrm{Lip} = \bigcup_{\Delta \subset \mathbb{R}^n} \mathrm{Lip}(\Delta),$$

где $\mathrm{Lip}(\Delta)$ — класс всех локально липшицевых отображений $f : \Delta \to \mathbb{R}^m$ области Δ в $\mathbb{R}^m$, а объединение строится с использованием всех областей Δ пространства $\mathbb{R}^n$.

Напомним, что непрерывный функционал $q : L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$ называется *квазивыпуклым* [8, 9], если для всех $a \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ и произвольного гладкого отображения $\varphi : B(0,1) \to \mathbb{R}^m \in C_0^\infty(B(0,1), \mathbb{R}^m)$ с носителем в шаре $B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$q(a) \leq \frac{1}{|B(0,1)|} \int\limits_{B(0,1)} q(a + \varphi'(x))\, dx,$$

где $|B(0,1)|$ — объем единичного n-мерного шара. Известно, что выпуклые функционалы, а также функционалы, которые можно представить как выпуклые функции от миноров матриц, соответствующих линейным отображениям из $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, являются квазивыпуклыми (см., например, [2]). Так, в частности, квазивыпуклым является якобиан, т. е. функционал $q : L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \ni a \mapsto \det a$ (под $\det a$ мы понимаем детерминант матрицы, соответствующей линейному отображению $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, т. е. $\det a = \det(\partial a_i/\partial x_j)$).

Компактное множество $K \subset L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ называется *квазивыпуклым* (см., например, [2, 12, 19]), если существуют квазивыпуклый функционал q и число $\gamma \in \mathbb{R}$ такие, что $K = \{a \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \mid q(a) \le \gamma\}$.

Замечание 1. Множество $SO(n)$, выпуклые компактные множества в $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, а также компактные множества решений из $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ эллиптической системы линейных уравнений с частными производными первого порядка с постоянными коэффициентами являются квазивыпуклыми (см., например, [1–3]). Можно доказать (используя [3, гл. 4, теорема 5.2], см. также [2]), что квазивыпуклы и компактные множества линейных конформных отображений, сохраняющих ориентацию.

2. Отправной точкой настоящего исследования является следующая

Теорема 1. *Пусть G — непустое квазивыпуклое компактное множество в $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Тогда класс $\mathfrak{G}$ всех отображений $g \in \mathrm{Lip}$ таких, что*

$$g'(x) \in G \text{ для п. в. } x \in \operatorname{dom} g, \tag{4}$$

является ω-устойчивым.

Для случая выпуклого множества G теорема 1 доказана в статье [10] (см. также [11]).

Доказательство теоремы 1. Легко проверяется, что класс отображений $\mathfrak{G}$ удовлетворяет условиям нормальности K_1^*, K_2^* и K_4^*. Из теоремы A следует, что $\mathfrak{G}$ удовлетворяет также и условию K_3^*. Поэтому класс $\mathfrak{G}$ является нормальным.

Предположим, что теорема 1 неверна, т. е. что класс $\mathfrak{G}$ не ω-устойчив. Тогда, как показано в [14] (см. начало доказательства теоремы 4 [14]), найдется последовательность отображений $f_\nu : B(0,1) \to \mathbb{R}^m$, удовлетворяющих неравенству

$$\Omega(f_\nu, \mathfrak{G}) < \frac{1}{\nu}, \tag{5}$$

но при этом f_ν $*$-слабо сходятся в $W^1_\infty(B(0,1), \mathbb{R}^m)$ к отображению $f : B(0,1) \to \mathbb{R}^m$, причем

$$f \notin \mathfrak{G}. \tag{6}$$

По лемме 1 работы [10] в силу нормальности класса $\mathfrak{G}$ и равенства $\mathfrak{G} \cap L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = G$ существует такая вещественная функция $\delta : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, что

1) $\delta(\varepsilon) \to \delta(0) = 0$ при $\varepsilon \to 0$;

2) для любого отображения $h : \Delta \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ с $\Omega(h, \mathfrak{G}) < \infty$ справедливо неравенство

$$\sup_{x \in \operatorname{dom} h'} \operatorname{dist}(h'(x), G) \le \delta(\Omega(h, \mathfrak{G})).$$

Но тогда из (5) следует, что $\| \operatorname{dist}(f'_\nu(\cdot), G)\|_{L_\infty} \to 0$ при $\nu \to \infty$. Применяя еще раз теорему A, заключаем, что $f'(x) \in G$ почти всюду в $B(0,1)$. В соответствии с (4) имеем включение $f \in \mathfrak{G}$. Но это противоречит условию (6). Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 1.

Классы отображений, устойчивость которых утверждается в теореме 1, включают в себя многие из известных ранее ω-устойчивых классов отображений таких, как класс I_n^+ изометрий, сохраняющих ориентацию [4] (в этом случае $G = SO(n)$) и др. (см. замечание 1 и [10, 11, 15, 16]).

Теорема 1 может быть значительно усилена (см. ниже теорему 3) с помощью следующей теоремы о сохранении свойства устойчивости при теоретико-множественных операциях над ω-устойчивыми классами отображений [10, 11].

Теорема 2. *Пусть непустой класс отображений $\mathfrak{G}$ допускает представление в виде пересечения объединений конечных наборов ω-устойчивых классов отображений $\mathfrak{G}_i^\alpha$*

$$\mathfrak{G} = \bigcap_{\alpha \in A} \bigcup_{i=1}^{k_\alpha} \mathfrak{G}_i^\alpha,$$

причем $\mathfrak{G}_i^\alpha \cap \mathfrak{G} \cap \mathfrak{G}_j^\alpha = \varnothing$ для всех $\alpha \in A$ и любой пары индексов $i \neq j$. Тогда $\mathfrak{G}$ также является ω-устойчивым классом отображений.

Из теорем 1, 2 непосредственно вытекает основной результат этого пункта.

Теорема 3. *Пусть непустой компакт $G \subset L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ является пересечением объединений конечных наборов квазивыпуклых компактных множеств G_i^α*

$$G = \bigcap_{\alpha \in A} \bigcup_{i=1}^{k_\alpha} G_i^\alpha, \tag{7}$$

причем

$$G_i^\alpha \cap G \cap G_j^\alpha = \varnothing, \quad \alpha \in A,\ i \neq j,\ i, j \in \{1, \dots, k_\alpha\}. \tag{8}$$

Тогда класс

$$\mathfrak{G} = \{g \in \operatorname{Lip} \mid \forall \alpha \in A\ \exists i \in \{1, \dots, k_\alpha\}\ g'(x) \in G_i^\alpha \text{ для п. в. } x \in \operatorname{dom} g\},$$

состоящий из всех отображений $g \in \operatorname{Lip}$ таких, что для каждого $\alpha \in A$ найдется номер i, для которого почти всюду в области определения g справедливо включение $g'(x) \in G_i^\alpha$, является ω-устойчивым классом отображений.

Замечание 2. Легко проверяется, что класс $\mathfrak{G}$, определенный в теореме 3, совпадает с классом отображений, порожденным в смысле определения 1 разбиением множества G на классы эквивалентности по отношению (2).

Теорема 3, конечно же, включает в себя теорему 1 как частный случай. Кроме того, теорема 3 является обобщением одного результата работы [10] (см. также [11]), состоящего в том, что если для компакта G имеет место представление (7), (8) с выпуклыми компактными множествами G_i^α, то класс отображений

$$\mathfrak{Z}(G) = \left\{ g \in \operatorname{Lip} \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists \text{ компонента связности}^1\ K \text{ множества } G, \\ g'(x) \in K \text{ для п. в. } x \in \operatorname{dom} g \end{array} \right\}$$

является ω-устойчивым. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что в случае выпуклых G_i^α класс $\mathfrak{G}$, о котором шла речь в теореме 3, совпадает с классом $\mathfrak{Z}(G)$.

Рассмотрим некоторые следствия теоремы 3.

[1]Здесь и далее под связностью или обычной связностью мы понимаем связность в смысле понятий общей топологии.

Следствие 1. *Класс I_n изометрических отображений является ω-устойчивым.*

Следствие 1 усиливает результат об ω-устойчивости класса I_n^+. Оно вытекает из теоремы 3 и того факта, что множество $\mathbb{O}(n)$ разлагается в объединение (1) непересекающихся квазивыпуклых компактов. Его также можно вывести из [10, теорема 3].

Добавим к сказанному, что в работах [3, 5–7] изучалась устойчивость класса I_n относительно отображений f, удовлетворяющих некоторым априорным условиям на ориентацию. Так, Ф. Джон рассматривал задачу устойчивости изометрических преобразований в классе локально топологических отображений f, а Ю. Г. Решетняк — в классе отображений $f \in W^1_{n,\mathrm{loc}}$, якобиан $\det f'(x)$ которых не меняет знака в области определения $\operatorname{dom} f$. Утверждение, сформулированное в следствии 1, свободно от априорных предположений такого рода.

Существенную роль при доказательстве теорем 2 и 3 играет то обстоятельство, что в концепции ω-устойчивости локальная близость отображения f к исследуемому классу вычисляется в каждой точке области определения f, а не с точностью до множеств нулевой меры. Например, для отображения $f : \mathbb{R}^2 \ni (x_1, x_2) \mapsto (x_1, |x_2|)$ имеем $\Omega(f, I_2) > 0$, несмотря на то, что $f'(x) \in \mathbb{O}(2)$ и $\Omega(x, f, I_2) = 0$ для п. в. $x \in \mathbb{R}^2$.

Следствие 2. *Если множество G есть объединение вида* (3), *то класс отображений* $\mathfrak{G} = \{g \in \mathrm{Lip} \mid \exists i\ g'(x) \in SO(n)a_i$ *для п. в.* $x \in \operatorname{dom} g\} = \{g \in \mathrm{Lip} \mid \exists b \in G\ g'(x) \equiv b,\ x \in \operatorname{dom} g\}$ *ω-устойчив.*

Это утверждение включает в себя следствие 1 как частный случай.

Следствие 2 позволяет по-новому взглянуть на так называемую проблему k-колец (см., например, [2, 12, 13]), состоящую в нахождении множеств G вида (3) таких, что если последовательность отображений $f_\nu : B(0,1) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $*$-слабо сходится в $W^1_\infty(B(0,1), \mathbb{R}^n)$ к отображению $g : B(0,1) \to \mathbb{R}^n$, $g(0) = 0$, причем $\operatorname{dist}(f'_\nu(\cdot), G) \to 0$ по мере при $\nu \to \infty$, то g есть сужение на шар $B(0,1)$ линейного отображения из G. Можно доказать, что в проблеме k-колец условие $\operatorname{dist}(f'_\nu(\cdot), G) \to 0$ по мере равносильно условию $\Omega(\cdot, f_\nu, \mathfrak{G}) \to 0$ по мере, где $\mathfrak{G}$ — класс отображений из следствия 2. Следствие же 2 означает, что для всякого компакта G вида (3), если последовательность $f_\nu : B(0,1) \to \mathbb{R}^n$ равномерно сходится к отображению $g : B(0,1) \to \mathbb{R}^n$, $g(0) = 0$, причем $\Omega(f_\nu, \mathfrak{G}) = \sup\limits_{x \in B(0,1)} \Omega(x, f_\nu, \mathfrak{G}) \to 0$, то g есть сужение на шар $B(0,1)$ линейного отображения из G.

3. В связи с теоремой 3 возникает задача описания компактов G, обладающих следующим свойством.

Определение 2. Пусть G — непустой компакт в $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Будем говорить, что G *удовлетворяет условию* $(q\Upsilon)$, если существует представление G в виде (7), (8) с квазивыпуклыми компактными множествами G_i^α.

Заметим, что в работах [10, 11] введено более сильное условие (Υ), которое эквивалентно существованию представления множества G в виде (7), (8) с выпуклыми компактными множествами G_i^α. Если $n = 1$ или $m = 1$, то условия $(q\Upsilon)$ и (Υ) равносильны, так как при указанных размерностях квазивыпуклость совпадает с выпуклостью.

Условию $(q\Upsilon)$ можно придать естественное геометрическое истолкование. Для этого потребуется ввести новое понятие.

Определение 3. Множество $U \subset L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ называется *qc-связным*, если его нельзя представить в виде объединения $U = \bigcup\limits_{t \in T} U_t$ семейства множеств U_t таких, что для любого $t \in T$

(i) $U_t \neq U$;

(ii) $U_t \cap \mathrm{cl}(U \setminus U_t) = \varnothing$;

(iii) для произвольного $s \in T$, $s \neq t$, и для каждого $a \in U_t$ существует квазивыпуклый функционал $q : L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$ такой, что $q(a) > \sup\limits_{b \in U_s} q(b)$.

Здесь и в дальнейшем символом $\mathrm{cl}\, E$ мы обозначаем, как это и принято, замыкание множества E.

Условие (iii) фактически означает, что $U_t \cap U_s^{qc} = \varnothing$ при $t \neq s$, где E^{qc} — квазивыпуклая оболочка множества E (см., например, [2, 12, 19]):

$$E^{qc} = \left\{ a \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall \text{ квазивыпуклого функционала } q : L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R} \\ q(a) \leq \sup\limits_{b \in E} q(b) \end{array} \right\}. \tag{9}$$

Известно (см., например, [2, 19]), что в случае, когда E компактно, множество E^{qc} есть наименьшее (относительно включения) квазивыпуклое множество, содержащее E.

Понятие qc-связности является аналогом понятия слабой связности из статей [10, 11, 17], которое может быть получено из определения 3 путем замены квазивыпуклых функционалов q выпуклыми. Укажем несколько свойств qc-связности, легко следующих из определения 3:

1) всякое связное множество qc-связно;

2) для подмножеств вещественной прямой $\mathbb{R}$ понятия qc-связности и связности эквивалентны;

3) замыкание qc-связного множества qc-связно;

4) пусть $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ — семейство qc-связных множеств, причем существует такое $\beta \in A$, что $U_\beta \cap \mathrm{cl}\, U_\alpha \neq \varnothing$ для любого $\alpha \in A$; тогда объединение $\bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$ qc-связно;

5) всякое qc-связное множество слабо связно;

6) если $n = 1$ или $m = 1$, то понятия qc-связности и слабой связности эквивалентны.

Определение 4. *Компонентой qc-связности* множества $U \subset L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, содержащей точку $a \in U$, называется объединение всех qc-связных подмножеств множества U, содержащих a.

Применением свойства 4 qc-связных множеств легко проверяется, что введенная таким образом компонента qc-связности сама является qc-связным множеством.

Теорема 4. *Непустой компакт $G \subset L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ удовлетворяет условию $(q\Upsilon)$ в том и только том случае, когда все компоненты qc-связности множества G квазивыпуклы.*

Теорема 4 является аналогом результата работ [10, 11], согласно которому непустой компакт удовлетворяет условию (Υ) в том и только том случае, когда все его компоненты слабой связности выпуклы.

Доказательство теоремы 4. Сначала проверим необходимость. Пусть компакт G удовлетворяет условию $(q\Upsilon)$, т. е. для G имеет место представление (7), (8) с квазивыпуклыми компактными множествами G_i^α, и пусть K — компонента qc-связности G. Используя свойство 3 qc-связных множеств, нетрудно убедиться в том, что множество K компактно. Для любого $\alpha \in A$ множество K разлагается в конечное объединение непересекающихся компактных множеств

$$K = \bigcup_{i=1}^{k_\alpha} (K \cap G_i^\alpha). \tag{10}$$

Очевидно, что

$$(K \cap G_i^\alpha) \cap (K \cap G_j^\alpha)^{qc} \subset G_i^\alpha \cap G \cap G_j^{\alpha^{qc}} = G_i^\alpha \cap G \cap G_j^\alpha = \varnothing \quad \text{при } i \neq j. \tag{11}$$

Таким образом,

$$(K \cap G_i^\alpha) \cap \mathrm{cl}(K \setminus (K \cap G_i^\alpha)) = (K \cap G_i^\alpha) \cap \Big(\bigcup_{j \neq i} (K \cap G_j^\alpha) \Big) = \varnothing,$$

и, с учетом (11) и (9), при $i \neq j$ для каждого $a \in K \cap G_i^\alpha$ существует квазивыпуклый функционал $q : L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$ такой, что $q(a) > \sup\limits_{b \in K \cap G_j^\alpha} q(b)$. Так как K есть qc-связное множество, то по определению 3 и в силу указанных свойств разложения (10) найдется такое целое l, что $K = K \cap G_l^\alpha$, т. е. $K \subset G_l^\alpha$. Но тогда

$$K^{qc} \subset G_l^{\alpha^{qc}} = G_l^\alpha \subset \bigcup_{i=1}^{k_\alpha} G_i^\alpha.$$

Отсюда ввиду (7) и произвольности индекса α получаем, что

$$K^{qc} \subset G. \tag{12}$$

Используя определение 3 и формулу (9), нетрудно показать, что qc-связность компакта K влечет qc-связность его квазивыпуклой оболочки K^{qc}. Согласно определению 4 и (12) это позволяет нам заключить, что справедливо равенство $K^{qc} = K$, которое равносильно квазивыпуклости компакта K.

Установим теперь достаточность. Для $\varepsilon > 0$ введем на G отношение эквивалентности $\sim_\varepsilon$, полагая

$$a \sim_\varepsilon b \Leftrightarrow \exists F \subset G \ a, b \in F \text{ и } N_\varepsilon(F) \ qc\text{-связно}, \tag{13}$$

где $N_\varepsilon(F) = \{c \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \mid \mathrm{dist}(c, F) < \varepsilon\}$ есть ε-оболочка множества F. Отношение $\sim_\varepsilon$ разбивает G на конечное множество классов эквивалентности $\widetilde{G}_i^\varepsilon$, $i = 1, \dots, k_\varepsilon$, которые являются компактными множествами (это следует из того, что в соответствии с (13) и свойством 1 qc-связных множеств если $a, b \in G$ и $\|a - b\| < 2\varepsilon$, то $a \sim_\varepsilon b$). Из (13), определения 3 и свойства 4 qc-связных множеств вытекает, что $N_\varepsilon(\widetilde{G}_i^\varepsilon)$ является qc-связным множеством для любого $i = 1, \dots, k_\varepsilon$, причем

$$\widetilde{G}_i^\varepsilon = G \cap \widetilde{G}_i^{\varepsilon^{qc}}. \tag{14}$$

Для $a \in G$ через $\widetilde{G}^\varepsilon(a)$ обозначим класс эквивалентности $\widetilde{G}_i^\varepsilon$, содержащий точку a. Используя тот очевидный факт, что

$$\widetilde{G}^{\varepsilon_1}(a) \subset \widetilde{G}^{\varepsilon_2}(a) \quad \text{при } 0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2, \tag{15}$$

а также принимая во внимание общие свойства компактных множеств, нетрудно доказать, что

$$\widetilde{G}^{\varepsilon}(a) \to G(a) \tag{16}$$

в метрике Хаусдорфа при $\varepsilon \to 0$, где $G(a) = \bigcap\limits_{\varepsilon>0} \widetilde{G}^{\varepsilon}(a)$. Так как $N_{\varepsilon}(\widetilde{G}^{\varepsilon}(a))$ является qc-связным множеством, имеем, что компактное множество $G(a)$ является пределом в метрике Хаусдорфа некоторой последовательности qc-связных множеств. Отсюда нетрудно заключить, что и само множество $G(a)$ является qc-связным. С другой стороны, вследствие определения (13) и свойства 4 qc-связных множеств любое qc-связное подмножество компакта G, содержащее точку a, содержится в классе эквивалентности $\widetilde{G}^{\varepsilon}(a)$ при всех $\varepsilon > 0$, поэтому всякое такое подмножество содержится и в $G(a)$. Из последнего утверждения, qc-связности множества $G(a)$ и определения 4 следует, что $G(a)$ совпадает с компонентой qc-связности множества G, содержащей точку a. Положим

$$G_i^{\varepsilon} = \widetilde{G}_i^{\varepsilon^{qc}}, \quad G^{\varepsilon}(a) = \widetilde{G}^{\varepsilon}(a)^{qc}. \tag{17}$$

Ясно, что множества G_i^{ε} квазивыпуклы (см. комментарий к (9)). Имеем очевидное включение

$$G \subset \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{i=1}^{k_{\varepsilon}} G_i^{\varepsilon}, \tag{18}$$

причем в соответствии с (14)

$$G_i^{\varepsilon} \cap G \cap G_j^{\varepsilon} = \varnothing \quad \text{при } i \neq j. \tag{19}$$

Кроме того, в силу предположения о квазивыпуклости компонент qc-связности G, множество $G(a)$ квазивыпукло при любом $a \in G$, т. е. $G(a) = G(a)^{qc}$. Поэтому вследствие (16) и теоремы 3.1 из работы [19] для любого $a \in G$ имеет место сходимость относительно метрики Хаусдорфа

$$G^{\varepsilon}(a) = \widetilde{G}^{\varepsilon}(a)^{qc} \to G(a) \subset G \tag{20}$$

при $\varepsilon \to 0$.

Из (15) и (17) непосредственно вытекают включения

$$G^{\varepsilon_1}(a) \subset G^{\varepsilon_2}(a) \quad \text{при } 0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2. \tag{21}$$

С помощью (18), (20) и (21) получаем, прибегая опять к использованию элементарных фактов из общей топологии, что

$$G = \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{i=1}^{k_{\varepsilon}} G_i^{\varepsilon}. \tag{22}$$

Из определения 2 и равенств (19) и (22) следует, что множество G удовлетворяет условию $(q\Upsilon)$. Теорема 4 полностью доказана.

Теорема 5. *Если компакт $G \subset L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ удовлетворяет условию $(q\Upsilon)$, то класс отображений*

$$\mathfrak{Z}^{qc}(G) = \left\{ g \in \mathrm{Lip} \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists \text{ компонента } qc\text{-связности } K \text{ множества } G, \\ g'(x) \in K \text{ для п. в. } x \in \operatorname{dom} g \end{array} \right\}$$

является ω-устойчивым.

Очевидно, что класс $\mathfrak{Z}^{qc}(G)$ совпадает с классом отображений, порожденных в смысле определения 1 разбиением множества G на компоненты qc-связности.

Доказательство теоремы 5. По теореме 4 из того, что компакт G удовлетворяет условию $(q\Upsilon)$, следует, что все компоненты qc-связности множества G квазивыпуклы. Рассмотрим квазивыпуклые компактные множества G_i^ε, введенные формулами (17) при доказательстве теоремы 4. Из (20) и (21) вытекает, что для каждой точки $a \in G$ пересечение всех множеств G_i^ε, содержащих a, совпадает с компонентой qc-связности $G(a)$ множества G, содержащей a. Поэтому справедливо равенство

$$\mathfrak{Z}^{qc}(G) = \{g \in \mathrm{Lip} \mid \forall \varepsilon > 0 \ \exists i \in \{1, \dots, k_\varepsilon\} \ g'(x) \in G_i^\varepsilon \text{ для п. в. } x \in \operatorname{dom} g\}.$$

Из последнего соотношения, представления (22), равенства (19) и теоремы 3 заключаем, что класс отображений $\mathfrak{Z}^{qc}(G)$ ω-устойчив. Доказательство теоремы 5 завершено.

Через $SCC_{qc}(G)$ будем обозначать множество компонент qc-связности множества G. В следствиях 1, 2 теоремы 3 приведено несколько примеров ω-устойчивых классов отображений. Теорема 5 позволяет придать им следующую форму.

1. Если G совпадает с множеством $\mathbb{O}(n)$ ортогональных преобразований пространства $\mathbb{R}^n$, то $SCC_{qc}(G) = \{SO(n), SO(n)a\}$, где $a \in \mathbb{O}(n)$, $\det a = -1$, и ω-устойчивый класс отображений $\mathfrak{Z}^{qc}(G)$ совпадает с классом изометрий I_n.

2. Если G является объединением вида (3), то

$$SCC_{qc}(G) = \{SO(n)a_1, \dots, SO(n)a_k\},$$

$\mathfrak{Z}^{qc}(G) = \{g \in \mathrm{Lip} \mid \exists i \ g'(x) \in SO(n)a_i \text{ для п. в. } x \in \operatorname{dom} g\}$ и класс $\mathfrak{Z}^{qc}(G)$ ω-устойчив.

Из теоремы 5 и рассуждений, использованных в первой части доказательства теоремы 4, нетрудно вывести

Следствие 3. *Если компакт $G \subset L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ удовлетворяет условиям теоремы 3, то класс отображений $\mathfrak{G}$, определенный в теореме 3, содержит в себе класс $\mathfrak{Z}^{qc}(G)$, причем последний является ω-устойчивым.*

Замечание 3. В связи с последними результатами возникает следующий вопрос (ответ на который в общей ситуации авторам не известен): если компакт G удовлетворяет условиям теоремы 3, то совпадает ли класс $\mathfrak{G}$, устойчивость которого утверждается в теореме 3, с классом $\mathfrak{Z}^{qc}(G)$? Положительный ответ на данный вопрос эквивалентен следующему утверждению: если квазивыпуклый компакт $G \subset L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ является объединением $G = \bigcup\limits_{i=1}^{k} G_i$ непересекающихся квазивыпуклых компактов G_i, то для всякого отображения $g \in \mathrm{Lip}$, удовлетворяющего дифференциальному соотношению $g'(x) \in G$ для п. в. $x \in \operatorname{dom} g$, найдется номер i такой, что $g'(x) \in G_i$ для п. в. $x \in \operatorname{dom} g$.

Замечание 4. Ввиду теоремы 5 не лишен интереса и такой вопрос: если компакт G удовлетворяет условию $(q\Upsilon)$, то справедливо ли равенство $\mathfrak{Z}^{qc}(G) = \mathfrak{Z}(G)$? Предполагается, что ответ окажется отрицательным, так как известны примеры квазивыпуклых компактных множеств (тем самым для них выполняется условие $(q\Upsilon)$), которые являются qc-связными, но не являются связными (см., например, [2]). Отметим, что если G удовлетворяет условию (Υ), то указанное равенство справедливо, так как в таком случае компоненты qc-связности множества G совпадают с компонентами слабой связности G, которые, в свою очередь, совпадают с компонентами связности G (см. свойства 1, 5 qc-связности, а также комментарии к определению 2 и теореме 4).

4. Понятие qc-связности позволяет охарактеризовать геометрическое строение образа производной векторнозначного отображения.

Теорема 6. *Пусть $f : \Delta \to \mathbb{R}^m$ — дифференцируемое отображение области $\Delta \subset \mathbb{R}^n$. Тогда если f является локально липшицевым (т. е. $f \in \mathrm{Lip}$), то образ $\operatorname{Im} f'$ производной отображения f есть qc-связное множество в пространстве $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.*

При $n = m = 1$ по свойству 2 qc-связных множеств qc-связность совпадает с обычной связностью. Следовательно в этом случае для локально липшицевых отображений утверждение теоремы 6 эквивалентно хорошо известной теореме Дарбу о промежуточных значениях производной вещественной функции.

Необходимо добавить, что, как недавно доказал Я. Малы [20], образ $\operatorname{Im} f'$ производной дифференцируемой вещественной функции $f : \Delta \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ есть связное множество. Здесь не требуется, чтобы отображение f было локально липшицевым (на самом деле теорема Малы сформулирована даже для более широкой ситуации, подробности см. в [20]). Этот результат дает более сильную характеристику образов производной дифференцируемых числовых функций, нежели теорема 6 при $m = 1$, так как всякое связное множество qc-связно, а обратное при $n > 1$ неверно.

Доказательство теоремы 6. Пусть утверждение теоремы 6 неверно. Тогда имеет место разложение $\operatorname{Im} f' = \bigcup\limits_{t \in T} U_t$, где U_t удовлетворяют условиям (i)–(iii) из определения 3 с $U = \operatorname{Im} f'$. Из (ii) следует, что U_t открыты относительно $\operatorname{Im} f'$. Это, как показано в первой части доказательства теоремы 1 из статьи [17], влечет существование пары индексов $t \neq s$, шара $B(w, r) \subset \Delta$ и точки $z \in \Delta$, лежащей на граничной сфере шара $B(w, r)$, таких, что

$$f'(z) \in U_t,$$

$$f'(y) \in U_s, \quad y \in B(w, r).$$

В силу условия (iii) найдутся квазивыпуклый функционал $q : L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$ и число γ такие, что

$$q(f'(z)) > \gamma, \tag{23}$$

$$q(f'(y)) \leq \gamma, \quad y \in B(w, r). \tag{24}$$

Рассмотрим последовательность отображений $f_\nu : B(0, r) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, задаваемых формулой

$$f_\nu(x) = \nu f\left(\frac{1}{\nu} x + \left[\left(1 - \frac{1}{\nu}\right) z + \frac{1}{\nu} w\right]\right) - \nu f(z) - f'(z)(w - z).$$

Элементарно проверяется, что отображения f_ν дифференцируемы, причем в силу (24)

$$q(f_\nu'(x)) \leq \gamma, \quad x \in B(0, r). \tag{25}$$

По условию доказываемой теоремы существует окрестность точки z, в которой отображение f удовлетворяет условию Липшица с некоторой константой C. Отсюда нетрудно заключить, что при достаточно больших ν отображения f_ν являются липшицевыми с той же самой константой C. Из дифференцируемости f в точке z непосредственно вытекает, что $f(y) = f(z) + f'(z)(y - z) + o(y - z)$ при $y \to z$, поэтому

$$f_\nu(x) = \nu\left(f(z) + \frac{1}{\nu}f'(z)(x - z + w) + o\left(\frac{1}{\nu}(x - z + w)\right)\right) \\ - \nu f(z) - f'(z)(w - z) = f'(z)x + o(1)$$

при $\nu \to \infty$. Таким образом, последовательность f_ν равномерно сходится к сужению $f'(z)|_{B(0,r)}$ линейного отображения $f'(z)$ на шар $B(0, r)$. Отображения f_ν удовлетворяют условию Липшица с единой константой C, тем самым последовательность f_ν $*$-слабо сходится в $W^1_\infty(B(0, r), \mathbb{R}^m)$ к $f'(z)|_{B(0,r)}$. Определим квазивыпуклое компактное множество $G = \{a \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \mid \|a\| \leq C$ и $q(a) \leq \gamma\}$. С учетом (25) и (23) имеем, что $f'_\nu(x) \in G$ при $x \in B(0, r)$, но $f'(z) \notin G$. Получили противоречие с теоремой А. Теорема 6 доказана.

Замечание 5. Требование локальной липшицевости отображения f в теореме 6 существенно. Это видно из следующего простого примера. Рассмотрим дифференцируемое отображение $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_2^2\big(\cos\frac{x_1}{x_2^3}, \sin\frac{x_1}{x_2^3}\big), & x_2 > 0, \\ 0, & x_2 \leq 0. \end{cases}$$

Элементарные вычисления показывают, что

$$\det f'(x_1, x_2) \equiv -2, \quad x_2 > 0. \tag{26}$$

Образ $\operatorname{Im} f'$ производной отображения f разлагается в объединение $\operatorname{Im} f' = U_1 \cup U_2$, где $U_1 = \{0\}$ и $U_2 = \{f'(x_1, x_2) \mid x_2 > 0\}$. Так как функционал $q : L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \ni a \mapsto \det a$ является квазивыпуклым, то в силу (26) и определения 3 множество $\operatorname{Im} f'$ не qc-связно.

Замечание 6. В работе [17] доказано (см. также [11]), что образ $\operatorname{Im} f'$ производной дифференцируемого отображения $f : \Delta \to \mathbb{R}^m$ (не обязательно локально липшицевого) области $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ является слабо связным множеством в $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Для локально липшицевых отображений f это утверждение непосредственно вытекает из теоремы 6, так как всякое qc-связное множество является слабо связным (см. свойство 5 qc-связных множеств). Однако в общем случае, как показывает замечание 5, указанный результат из статей [11, 17] уже не может рассматриваться как следствие теоремы 6.

Авторы выражают глубокую признательность профессору А. П. Копылову и д.ф.-м.н. Н. С. Даирбекову за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kinderlehrer D.* Remarks about equilibrium configurations of crystals // Material instabilities in continuum mechanics and related mathematical problems. Oxford: Oxford Univ. Press, 1988. P. 217–242.
2. *Müller S.* Variational models for microstructure and phase transitions. Leipzig: Max-Plank-Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften, 1998. (Lecture notes no.: 2).
3. *Решетняк Ю. Г.* Теоремы устойчивости в геометрии и анализе (2-е изд.). Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 1996.

4. *Копылов А. П.* Об устойчивости изометрических преобразований // Сиб. мат. журн. 1984. Т. 25, № 2. С. 132–144.
5. *John F.* Rotation and strain // Comm. Pure Appl. Math. 1961. V. 14, N 3. P. 391–413.
6. *John F.* On quasi-isometric mappings. I // Comm. Pure Appl. Math. 1968. V. 21, N 1. P. 77–110.
7. *John F.* On quasi-isometric mappings. II // Comm. Pure Appl. Math. 1969. V. 22, N 2. P. 265–278.
8. *Morrey C. B.* Quasi-convexity and lower semicontinuity of multiple integrals // Pacific J. Math. 1952. V. 2, N 1. P. 25–53.
9. *Morrey C. B.* Multiple integrals in the calculus of variations. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1966.
10. *Коробков М. В.* Об устойчивости классов липшицевых отображений, порожденных компактными множествами пространства линейных отображений // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 4. С. 792–810.
11. *Коробков М. В.* Об одном обобщении понятия связности и его применении в дифференциальном исчислении и в теории устойчивости классов отображений // Докл. РАН. 1998. Т. 363, № 5. С. 590–593.
12. *Zhang K.-W.* Quasiconvex functions, $SO(n)$ and two elastic wells // Ann. Inst. H.-Poincaré, Anal. non lin. 1997. V. 14, N 6. P. 759–785.
13. *Dolzmann G., Kirchheim B., Müller S., Šverak V.* The two-well problem in three dimensions. Leipzig, 1999. 15 p. (Препринт/Max-Plank-Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften; N 21).
14. *Егоров А. А.* Об устойчивости классов аффинных отображений // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, № 5. С. 1081–1095.
15. *Егоров А. А.* Устойчивость классов липшицевых решений систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка // Докл. РАН. 1997. Т. 356, № 5. С. 583–587.
16. *Егоров А. А.* Об устойчивости классов липшицевых решений систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 3. С. 538–553.
17. *Коробков М. В.* Об одном обобщении теоремы Дарбу на многомерный случай // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 1. С. 118–133.
18. *Бурбаки Н.* Дифференцируемые и аналитические многообразия. Сводка результатов. М.: Мир, 1975.
19. *Zhang K.-W.* On the stability of quasiconvex hulls. Leipzig, 1998. 45 p. (Препринт/Max-Plank-Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften; N 33).
20. *Malý J.* The Darboux property for gradients // Real Anal. Exchange. 1996/97. V. 22, N 1. P. 167–173.

Статья поступила 30 декабря 1999 г.

г. Новосибирск
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
`yegorov@math.nsc.ru; korob@math.nsc.ru`