Сибирский математический журнал
Июль—август, 2000. Том 41, № 4

УДК 517.55

СВОЙСТВО МАЛОГО ИНДЕКСА ДЛЯ АЛГЕБР

И. В. Чирков

Аннотация: Устанавливается свойство малого индекса для свободных алгебр Ли бесконечного счетного ранга над не более чем счетным полем. Библиогр. 9.

Пусть M — бесконечная счетная модель, $G = \mathrm{Aut}(M)$ — ее группа автоморфизмов. Обозначим через G_Y поточечный стабилизатор множества $Y \subseteq M$. Говорят, что подгруппа H группы G имеет малый индекс в G, если $[G : H] < 2^{\aleph_0}$.

Определение. Модель M обладает *свойством малого индекса*, если для любой подгруппы H группы G, имеющей малый индекс, найдется такое конечное множество $Y \subseteq M$, что H содержит подгруппу G_Y.

Данное определение может быть сформулировано на топологическом языке. Наделим группу G топологией, взяв подгруппы G_Y (Y — конечное подмножество M) в качестве базы открытых окрестностей единицы. Существует биекция между множеством правых смежных классов $(G_Y)g$ и множеством $\{Yg : g \in G\}$. Таким образом, любая открытая подгруппа группы G имеет малый индекс. Модель M обладает свойством малого индекса, если верно обратное, т. е. каждая подгруппа группы G, имеющая малый индекс, открыта в G.

Свойство малого индекса активно изучается. Подробную информацию можно найти в обзорах [1, 2]. Перечислим здесь некоторые модели, обладающие свойством малого индекса.

1. Бесконечное множество без структуры [3, 4].
2. Векторные пространства бесконечной счетной размерности над конечными или счетными полями [5].
3. ω-Категоричные ω-стабильные структуры [6].

Свойство малого индекса установлено также для свободной группы бесконечного счетного ранга [7] и свободных групп некоторых многообразий [7, 8].

Пусть $F = \langle x_1, x_2, \dots \rangle$ — относительно свободная группа (или алгебра над полем) бесконечного счетного ранга, где $x_1, x_2, \dots$ — множество ее свободных порождающих.

Определение. F обладает *базисным кофинальным свойством*, если для любого $\alpha \in \mathrm{Aut}(F)$ и любого натурального n найдутся натуральное $r \geq n$ и $\beta \in \mathrm{Aut}(\langle x_1, \dots, x_r \rangle)$ такие, что $x_i\alpha = x_i\beta$, $i = 1, \dots, n$.

В работе [7] доказана

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 98–01–00932).

Теорема. *Если относительно свободная группа обладает базисным кофинальным свойством, то она обладает свойством малого индекса.*

В этой же работе замечено, что базисным кофинальным свойством обладают абсолютно свободные группы и свободные группы нильпотентных многообразий бесконечного счетного ранга. Как уже отмечено, оно влечет для них свойство малого индекса. В настоящей работе базисное кофинальное свойство установлено для свободной алгебры Ли бесконечного счетного ранга и получена

Теорема 1. *Свободная алгебра Ли бесконечного счетного ранга над не более чем счетным полем обладает свойством малого индекса, и ее группа автоморфизмов не является объединением счетной последовательности собственных подгрупп.*

Методы доказательств аналогичны использованным в [7].

Пусть L — относительно свободная алгебра Ли счетного бесконечного ранга над полем. Обозначим через $\mathfrak{B}(L)$ множество подалгебр алгебры L, порожденных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ — некоторая система свободных порождающих алгебры L.

Лемма 1. *Пусть L обладает базисным кофинальным свойством. Тогда L обладает следующими свойствами:*

1) (*кофинальность*) *если $A \in \mathfrak{B}(L)$, $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in G$, $X_1, \ldots, X_n$ — конечные подмножества L, то найдутся такие $B \in \mathfrak{B}(L)$ и $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \operatorname{Aut}(B)$, что B содержит $A, X_1, \ldots, X_n$ и $\alpha_i | X_i = \gamma_i | X_i$, $i = 1, \ldots, n$;*

2) (*амальгамируемость*) *если $A, B, C \in \mathfrak{B}(L)$ и $A \subseteq B$, $A \subseteq C$, то существует такой $\alpha \in G_A$, что для любых $\beta \in \operatorname{Aut}(B\alpha)$ и $\gamma \in \operatorname{Aut}(C)$, удовлетворяющих условиям $A\beta = A\gamma = A$ и $\beta | A = \gamma | A$, существует такой $\delta \in G$, что $\delta | B\alpha = \beta$ и $\delta | C = \gamma$.*

Доказательство. Так как подалгебра A конечно порождена и в запись всех элементов из множеств $X_1, \ldots, X_n$ входит лишь конечное число порождающих алгебры L, найдется такая подалгебра $B_0 = \langle x_1, \ldots, x_m \rangle \in \mathfrak{B}(L)$, которая содержит $A, X_1, \ldots, X_n$. Поскольку алгебра L обладает базисным кофинальным свойством, найдется подалгебра $B_1 = \langle x_1, \ldots, x_l \rangle \in \mathfrak{B}(L), l \geq m$ и $\alpha_1 \in \operatorname{Aut}(B_1)$ такие, что $x_i \gamma_1 = x_i \alpha_1$, $i = 1, \ldots, m$. Аналогично для B_1 и γ_2 строится алгебра B_2 и $\alpha_2 \in \operatorname{Aut}(B_2)$, при этом автоморфизм α_1 алгебры B_1 продолжается естественным образом до автоморфизма алгебры B_2, который обозначим также через α_1. Очевидная индукция завершает доказательство свойства 1, при этом $B_n = B$.

Пусть A, B, C, как в свойстве 2. Можно считать, что $A = \langle x_1, \ldots, x_m \rangle$. Пусть $B = \langle y_1, \ldots, y_n \rangle$, где $y_1, \ldots$ — свободные порождающие алгебры L. Пусть $\theta \in G$ такой, что $x_i \theta = y_i$, $i = 1, 2, \ldots$. Так как L обладает базисным кофинальным свойством, найдутся такие r и $\varphi \in \operatorname{Aut}(\langle x_1, \ldots, x_r \rangle)$, что $r \geq n$ и $x_i \varphi = x_i \theta = y_i$, $i = 1, \ldots, n$. Ясно, что $r \geq m$. Так как $\varphi \in \operatorname{Aut}(\langle x_1, \ldots, x_r \rangle)$, то $x_1 \varphi, \ldots, x_r \varphi$ — система свободных порождающих для $\langle x_1, \ldots, x_r \rangle$. Так как $y_1, \ldots, y_n$ содержится в системе свободных порождающих алгебры $\langle x_1, \ldots, x_r \rangle$, то любой автоморфизм алгебры B продолжается до автоморфизма алгебры $\langle x_1, \ldots, x_r \rangle$. Таким образом, если $\alpha \in G_A$, то каждый автоморфизм β алгебры $B\alpha$ продолжается до автоморфизма β' алгебры $\langle x_1, \ldots, x_r \rangle \alpha$, и поэтому можно считать, что $B = \langle x_1, \ldots, x_r \rangle$. Аналогично можно считать $C = \langle x_1, \ldots, x_s \rangle$, $s \geq m$. Ясно, что для таким образом определенных A, B, C существует $\alpha \in G_A$ такой, что $B\alpha = \langle x_1, \ldots, x_m, x_{s+1}, \ldots, x_{s+r-m} \rangle$. Лемма доказана.

Определение. Назовем элемент $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in G^n$ $\mathfrak{B}(L)$-*типичным*, если выполнены условия:

1) для всех $A \in \mathfrak{B}(L)$ подгруппы G_B, где $A \subseteq B \in \mathfrak{B}(L)$, $B\gamma_i = B$, $i = 1, \dots, n$, образуют базис открытых окрестностей единицы;

2) если $A \in \mathfrak{B}(L)$, $A\gamma_i = A$, $i = 1, \dots, n$, $A \subseteq B \in \mathfrak{B}(L)$, $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathrm{Aut}(B)$, $\beta_i|A = \gamma_i|A$, $i = 1, \dots, n$, то найдется такой $\alpha \in G_A$, что $\gamma_i^\alpha|B = \beta_i$, $i = 1, \dots, n$, $\gamma_i^\alpha = \alpha^{-1}\gamma_i\alpha$.

Наделим G^n топологией произведения. Говорят, что множество имеет вторую категорию по Бэру, если оно содержит счетное пересечение всюду плотных открытых множеств. Следуя [6], будем говорить, что L имеет *обильные* $\mathfrak{B}(L)$-*типичные автоморфизмы*, если для любого натурального n множество элементов G^n, являющихся $\mathfrak{B}(L)$-типичными, имеет вторую категорию по Бэру в G^n.

Формулировки и доказательства трех нижеследующих лемм принадлежат Р. М. Брайанту и публикуются с его любезного согласия. В формулировках этих трех лемм L — относительно свободная алгебра Ли бесконечного счетного ранга, обладающая базисным кофинальным свойством.

Лемма 2. *Пусть $A \in \mathfrak{B}(L)$ и $\mathbf{a}$ — конечный упорядоченный набор элементов из L. Тогда множество $X(A, \mathbf{a}) = \{(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in G^n$: существует $B \in \mathfrak{B}(L)$, $B = B\gamma_i$, $i = 1, \dots, n$, $G_B \subseteq G_{\mathbf{a}}$, $A \subseteq B\}$ — открытое всюду плотное подмножество в G^n.*

Доказательство. Так как все элементы множества $\mathfrak{B}(L)$ — конечно порожденные подалгебры алгебры L, то G_B открыта для любой $B \in \mathfrak{B}(L)$. Если $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in X(A, \mathbf{a})$ соответствует B и $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in G_B$, то $(\gamma_1\alpha_1, \dots, \gamma_n\alpha_n)$ соответствует той же B. Следовательно, $X(A, \mathbf{a})$ открыто в G^n. Пусть S — не пустое открытое подмножество в G^n. Покажем, что $S \cap X(A, \mathbf{a}) \neq \varnothing$. Заменяя, если нужно, множество S меньшим, можно считать, что

$$S = \{(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in G^n : \mathbf{b}_i\gamma_i = \mathbf{b}_i\beta_i\}$$

для некоторых наборов $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ и некоторого набора $(\beta_1, \dots, \beta_n) \in G^n$. (Считаем, что $S = (G_{\mathbf{b}_1}\beta_1, \dots, G_{\mathbf{b}_n}\beta_n)$.) Из кофинальности следует, что найдется такая $B \in \mathfrak{B}(L)$, что $A \subseteq B$, компоненты наборов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}_i$, $i = 1, \dots, n$, — элементы подалгебры B и существуют $\gamma_i \in G$ такие, что $B\gamma_i = B$ и $\mathbf{b}_i\gamma_i = \mathbf{b}_i\beta_i$, $i = 1, \dots, n$. Тогда $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in S \cap X(A, \mathbf{a})$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть $A, B \in \mathfrak{B}(L)$, $A \subseteq B$, $\varphi_i \in \mathrm{Aut}(B)$, $A\varphi_i = A$, $i = 1, \dots, n$, и пусть $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$. Положим $Y(A, B, \Phi) = \{(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in G^n$: если $\gamma_i|A = \varphi_i|A$ $(i = 1, \dots, n)$, то существует $\alpha \in G_A$ такой, что $\gamma_i^\alpha|B = \varphi_i|B$ $(i = 1, \dots, n)\}$. Тогда $Y(A, B, \Phi)$ открыто и всюду плотно.*

Доказательство. Если $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in Y(A, B, \Phi)$ таковы, что $\gamma_i|A = \varphi_i|A$ соответствует α, и если $\beta_1, \dots, \beta_n \in G_B \cap G_{B\alpha^{-1}}$, то $(\gamma_1\beta_1, \dots, \gamma_n\beta_n) \in Y(A, B, \Phi)$ соответствует α. Если $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ таковы, что $\gamma_i|A \neq \varphi_i|A$ для какого-либо i, то $(G_A\gamma_1, \dots, G_A\gamma_n) \subseteq Y(A, B, \Phi)$. Следовательно, $Y(A, B, \Phi)$ открыто. Пусть S — непустое открытое подмножество в G^n. Можно полагать, что S имеет вид

$$S = \{(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in G^n : \mathbf{b}_i\gamma_i = \mathbf{b}_i\varepsilon_i\}$$

для некоторых $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$, $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$. Из кофинальности следует, что можно предполагать $C\varepsilon_i = C$, где $C \in \mathfrak{B}(L)$, $A \subseteq C$ и компоненты наборов $\mathbf{b}_i$ принадлежат C для всех i. Если найдется такой индекс i, что $\varepsilon_i|A \neq \varphi_i|A$, то

$(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in S \cap Y(A, B, \Phi)$, как и требовалось. Таким образом, можно предполагать, что $\varepsilon_i | A = \varphi_i | A$ для всех i.

Из амальгамируемости вытекает, что найдется такой $\alpha \in G_A$, что $f_i \cup \varphi_i^{\alpha^{-1}}$ продолжается до автоморфизма алгебры L, т. е. найдется такой элемент $\gamma_i \in G$, что $\gamma_i | C = f_i | C$ и $\gamma_i^{\alpha} | B = \varphi_i | B$. Тогда $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in S \cap Y(A, B, \Phi)$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Имеет место равенство*

$$\{(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in G^n : (\gamma_1, \dots, \gamma_n) - \mathfrak{B}(L)\text{-}\textit{типичный}\} = \bigcap_{A, \mathbf{a}} X(A, \mathbf{a}) \cap \bigcap_{A, B, \Phi} Y(A, B, \Phi).$$

Доказательство. Включение слева направо очевидно.

Обратно, предположим, что $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ принадлежит множеству в правой части равенства. Ясно, что $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in X(A, \mathbf{a})$ для любых $A, \mathbf{a}$. Пусть A фиксировано и S — открытая окрестность единицы. Тогда $G_{\mathbf{a}} \subseteq S$ для некоторого $\mathbf{a}$. Пусть $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in X(A, \mathbf{a})$. Найдется подалгебра $B \in \mathfrak{B}(L)$ такая, что $B \geq A$, и $B = B\gamma_i$ для всех i и $G_B \leq G_{\mathbf{a}}$. А это и есть п. 1 из определения $\mathfrak{B}(L)$-типичности.

Пусть A удовлетворяет свойству $A\gamma_i = A$ для всех i, $A \subseteq B \in \mathfrak{B}(L)$, $B\varphi_i = B$, $A\varphi_i = A$, $\varphi_i | A = \gamma_i | A$ для всех i. Заменим φ_i его ограничением на $\mathrm{Aut}(B)$. Поскольку $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in Y(A, B, \Phi)$ для некоторого $\alpha \in G_A$ такого, что $\gamma_i^{\alpha} | B = \varphi_i | B$ для всех i, то п. 2 определения $\mathfrak{B}(L)$-типичности установлен. Лемма доказана.

Непосредственным следствием лемм 2–4 является

Теорема 2. *Пусть L — относительно свободная алгебра Ли счетного ранга, обладающая базисным кофинальным свойством. Тогда L имеет обильные $\mathfrak{B}(L)$-типичные автоморфизмы.*

Теорема 3. *Пусть L — относительно свободная алгебра Ли счетного ранга над не более чем счетным полем, обладающая базисным кофинальным свойством. Тогда L обладает свойством малого индекса. Более того,* $\mathrm{Aut}(L)$ *не является объединением счетной последовательности собственных подгрупп.*

Доказательство. По теореме 2 алгебра L имеет обильные $\mathfrak{B}(L)$-типичные автоморфизмы. Поэтому по теореме 5.3 работы [6] L обладает свойством малого индекса.

Предположим, что $G = \mathrm{Aut}(L) = \bigcup_m G_m$, где $G_1 \subseteq G_2 \subseteq \dots$ — последовательность собственных подалгебр алгебры L. Докажем сначала, что никакая подгруппа G_n не может быть открытым множеством.

Предположим противное. Пусть нашлась открытая подгруппа G_m, т. е. $G_Y \subseteq G_m$ для некоторого конечного подмножества $Y \subseteq L$. Без потери общности можно полагать, что $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$. Увеличивая, если необходимо, номер m, можно считать, что G_m содержит автоморфизм, переводящий y_i в y_{n+i}, $i = 1, \dots, n$. Для всех $r \geq n$ группа G_Y (а следовательно, и G_m) содержит автоморфизм, переводящий y_{n+i} в y_{r+i}, $i = 1, \dots, n$, значит, G_m содержит автоморфизм, переводящий y_i в y_{r+i}, $i = 1, \dots, n$. Таким образом, $G_{\{y_{r+1}, \dots, y_{r+n}\}} \subseteq G_m$ для любых $r \geq n$. Пусть $\alpha \in G$. Тогда из базисного кофинального свойства следует существование натурального r и $\beta \in \mathrm{Aut}\langle y_1, \dots, y_r \rangle$ таких, что $r \geq n$ и

$y_i\beta = y_i\alpha$, $i = 1, \dots, n$. Пусть β' такой элемент G, что $y_i\beta' = y_i\beta$, $i = 1, \dots, r$ и $y_i\beta' = y_i$, $i \geq r$. Тогда $\beta' \in G_m$ и $\beta'\alpha^{-1} \in G_Y \subseteq G_m$. Таким образом, $\alpha \in G_m$ и, следовательно, $G_m = G$; противоречие. Тем самым никакая подгруппа G_m не может быть открытой.

По теореме 2 L обладает обильными $\mathfrak{V}(L)$-типичными автоморфизмами. Доказательство может быть завершено таким же образом, как и доказательство теоремы 6.1 работы [6].

Лемма 5. *Пусть $L = F\langle X\rangle$ — свободная алгебра Ли, A и B — ее подалгебры такие, что $A \subseteq B$, A — свободный множитель в L. Тогда $B = A * B_1$ для некоторой подалгебры B_1.*

Доказательство. Зафиксируем множество Y свободных порождающих алгебры L и множество Z — свободных порождающих алгебры A такие, что $Z \subseteq Y$. Степени всех элементов определяются относительно множества Y обычным способом. Будем строить множество порождающих подалгебры B как объединение $M = \bigcup\limits_{i\geq 1} M_i$. Пусть M_1 — элементы, образующие базис в векторном пространстве элементов первой степени алгебры B. Если уже построены множества $M_1, \dots, M_k$, то множество M_{k+1} состоит из элементов образующих базис в пространстве элементов степени $k+1$ по модулю подалгебры, порожденной $\bigcup\limits_{1\leq i\leq k} M_i$. В работе [9] доказано, что $M = \bigcup\limits_{i\geq 1} M_i$ является множеством свободных порождающих алгебры B. Можно считать, что M_1 содержит порождающие алгебры A. Таким образом, множество свободных порождающих алгебры B разбито на две непересекающиеся части, одна из которых порождает A. Лемма доказана.

Лемма 6. *Свободная алгебра Ли обладает базисным кофинальным свойством.*

Доказательство. Пусть L — свободная алгебра Ли счетного ранга и x_1, $x_2, \dots$ — множество ее свободных порождающих. Если $\alpha \in G = \mathrm{Aut}(L)$ и $n \in N$, то существует такое натуральное $r \geq n$, что $\langle x_1, \dots, x_n\rangle\alpha \subseteq \langle x_1, \dots, x_r\rangle$. Таким образом, $\langle x_1, \dots, x_n\rangle \subseteq \langle x_1, \dots, x_r\rangle\alpha^{-1}$. По лемме 5 множество $\{x_1, \dots, x_n\}$ может быть дополнено до множества свободных порождающих алгебры $\langle x_1, \dots, x_r\rangle\alpha^{-1}$, а множество $\{x_1\alpha, \dots, x_n\alpha\}$ — до множества свободных порождающих алгебры $\langle x_1, \dots, x_r\rangle$. Отсюда следует, что найдется такой автоморфизм β алгебры $\langle x_1, \dots, x_r\rangle$, что $x_i\beta = x_i\alpha$, $i = 1, \dots, n$. Лемма доказана.

Теорема 1 является непосредственным следствием леммы 6 и теоремы 3.

Аналогичные результаты верны для свободных коммутативных, свободных антикоммутативных и абсолютно свободных алгебр.

Автор глубоко благодарен В. А. Романькову за постоянное внимание к работе и ряд ценных замечаний как по оформлению, так и по содержанию, а также Р. М. Брайанту за предоставленные материалы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kaye R., Macpherson D.* Models and groups // Automorphisms of first-order structures. Oxford: Clarendon Press, 1994. P. 3–31.
2.. *Lascar D.* Autour de la propriété du petit indice // Proc. London Math. Soc. 1991. V. 62, N 1. P. 25–53.
3. *Semmes S. W.* Endomorphisms of infinite symmetric groups // Abstracts Amer. Math. Soc. 1981. V. 2. P. 426.

4. *Dixon J. D., Neumann P. M., Thomas S.* Subgroups of small index in infinite symmetric groups // Bull. London Math. Soc. 1986. V. 18. P. 580–586.
5. *Evans D. M.* Subgroups of small index in infinite general linear groups // Bull. London Math. Soc. 1986. V. 18. P. 587–590.
6. *Hodges W., Hodkinson I., Lascar D., Shelah S.* The small index property for ω-stable ω-categorical structures and for the random graph // J. London Math. Soc. 1993. V. 48, N 2. P. 204–218.
7. *Bryant R., Evans D. M.* The small index property for free groups and relatively free groups // J. London Math. Soc. 1997. V. 55. P. 363-369.
8. *Bryant R. M., Roman′kov V. A.* Automorphisms groups of relatively free groups // Math. Proc. Camb. Philos. Soc. 1999. V. 127, N 3. P. 411–424.
9. *Ширшов А. И.* Подалгебры свободных лиевых алгебр // Мат. сб. 1953. Т. 33, № 2. С. 441–452.

Статья поступила 20 ноября 1998 г.

г. Омск
Омский гос. университет, кафедра информационных систем
chirkov@math.omsu.omskreg.ru