Сибирский математический журнал
Июль—август, 2000. Том 41, № 4

УДК 519.6:517.968

ОЦЕНКА ОБУСЛОВЛЕННОСТИ МАТРИЦЫ ПРИ НЕПОСРЕДСТВЕННОЙ ДИСКРЕТИЗАЦИИ УРАВНЕНИЯ СИММА НА КВАЗИРАВНОМЕРНОЙ СЕТКЕ

В. В. Воронин

Аннотация: Доказывается теорема об оценке числа обусловленности матрицы, полученной при дискретизации одномерного интегрального уравнения первого рода с логарифмической особенностью методами интерполяции и коллокации. Показано, что если исходное интегральное уравнение однозначно разрешимо и если отношение шагов квазиравномерной сетки не превышает некоторой константы, то при достаточно малом шаге число обусловленности не превышает константы, деленной на шаг. Доказательство проведено методом, опирающимся только на свойства выпуклости образов базисных функций интерполяции. Библиогр. 8.

Работа посвящена обоснованию прямого численного метода для интегрального уравнения первого рода с логарифмической особенностью в ядре, получившего в мировой литературе название «уравнения Симма» (Symm); здесь рассматривается случай замкнутого контура. Уравнения этого вида часто возникают в применениях метода граничных интегральных уравнений к решению эллиптических краевых и контактных задач.

С точки зрения численного решения таких уравнений могут возникнуть принципиально разные ситуации. Если ядро интегрального оператора может быть представлено как сумма некоего стандартного ядра с логарифмической особенностью и бесконечно дифференцируемого слагаемого (этот случай можно назвать «почти модельным»), то функциональные свойства такого уравнения можно легко улучшить с помощью простых аналитических операций. А именно: дифференцирование обеих частей приводит нас к «почти модельному» сингулярному уравнению, ядро которого есть сумма стандартного ядра типа Коши или Гильберта и бесконечно гладкого младшего члена. Либо, обращая главную часть интегрального оператора, мы приходим к уравнению Фредгольма второго рода с гладким ядром. Численное решение таких уравнений хорошо разработано, и свойства младшего члена практически не играют роли.

Иная ситуация возникает для уравнений общего вида, когда младший член не является гладким, а может содержать набор более слабых особенностей типа $r\ln r$, $r^2\ln r$ и т. д. Тогда точность численного метода будет решающим образом зависеть от точности аппроксимации этих слабых особенностей и применение вышеуказанных аналитических операций не даст никакого выигрыша. Более того, при сложном виде ядра и выполнение этих аналитических операций может

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96–05–65941).

представлять непростую задачу. Поэтому для уравнений общего вида получили широкое распространение методы, основанные на непосредственной дискретизации исходного уравнения. Именно такие уравнения возникают при моделировании упругих, электромагнитных и акустических волновых полей (см. [1, 2]), когда ядра интегральных или интегродифференциальных операторов представляют собой комбинации функций Ханкеля. Хотя формально уравнения типа Симма являются уравнениями первого рода, задача их решения некорректна в такой же степени, как задача численного дифференцирования, т. е. обратный оператор ухудшает гладкость на единицу. Поэтому, как показано, например, в работах [3, 4], к их решению могут быть применены методы непосредственной дискретизации, не включающие в явном виде процедуру регуляризации по Тихонову.

В этой работе изучается метод, основанный на кусочно линейной интерполяции неизвестной функции и отыскании неизвестных коэффициентов из условий коллокации в тех же узлах. Теоретическое рассмотрение таких методов сначала проводилось только для равномерных сеток [3–6], что было связано с использованием в явном виде тригонометрических собственных функций, а также свойств специальных матриц. В работе [7] удалось применить свойства специальных матриц и для рассмотрения квазиравномерной сетки при кусочно постоянной интерполяции. В данной работе излагается новый подход, который представляется наиболее универсальным и основан в конечном счете исключительно на свойствах выпуклости ядра дифференциального оператора; можно надеяться, что его удастся распространить и на двумерный случай. К сожалению, пока не удалось рассмотреть совершенно произвольную сетку, и результат содержит некоторое ограничение на величину параметра квазиравномерности.

В этой работе буквой c (с индексами или без них) будем обозначать различные положительные константы, не зависящие от шага сетки, хотя они могут зависеть от величины параметра квазиравномерности и иных условий задачи. Формулируя утверждение, где в качестве множителя участвует буква c, будем автоматически подразумевать существование такой положительной не зависящей от шага константы, для которой это утверждение истинно.

1. Уравнение Симма и его дискретизация

Будем предполагать, что интегральное уравнение первого рода, первоначально заданное на некоторой гладкой замкнутой кривой, после параметризации этой кривой записано в виде

$$\int_{-1/2}^{1/2} [K(t,\tau) + K_1(t,\tau)]\, f(\tau)\, d\tau = g(t), \quad t \in [-1/2, 1/2]. \tag{1.1}$$

Все функции здесь имеют период 1, а ядро представляется в виде суммы некоторого «стандартного» логарифмического слагаемого $K(t,\tau)$ и «младшего» члена $K_1(t,\tau)$, свойства которого будут уточняться позднее. Логарифмическое слагаемое ядра может быть выделено с большой степенью произвола; будем для удобства считать, что оно имеет вид

$$K(t,\tau) \equiv \ln \frac{1}{|\tau - t|'},$$

где

$$|\tau - t|' = \begin{cases} |\tau - t|, & \text{если } -1/2 \le \tau - t \le 1/2, \\ |\tau - t + 1|, & \text{если } \tau - t \le -1/2, \\ |\tau - t - 1|, & \text{если } 1/2 \le \tau - t. \end{cases} \tag{1.2}$$

Иначе говоря, $|\tau - t|'$ — величина, которая равна модулю разности $|\tau - t|$, если этот модуль меньше $1/2$, и которая периодически продолжена для случая $|\tau - t| < 1$.

Уравнение (1.1) будем называть *общим уравнением*. Исключив младший член, получим *модельное уравнение*

$$(\mathscr{K} f)(t) \equiv \int\limits_{1/2}^{-1/2} \ln \frac{1}{|\tau - t|'} f(\tau)\, d\tau = g(t), \quad t \in [-1/2, 1/2]. \tag{1.3}$$

Рассматривается следующий численный метод. Пусть имеется сетка, т. е. упорядоченный набор узлов $\{\tau_j\}$, $j = -N_1, \dots, N_2$, на отрезке $[-1/2, 1/2]$. Пусть $\{\varphi_j(\tau)\}$, $j = -N_1, \dots, N_2$, — набор базисных функций кусочно линейной интерполяции по этой сетке:

$$\varphi_j(\tau) = \begin{cases} (\tau - \tau_{j-1})/(\tau_j - \tau_{j-1}), & \text{если } \tau \in [\tau_{j-1}, \tau_j], \\ (\tau_{j+1} - \tau)/(\tau_{j+1} - \tau_j), & \text{если } \tau \in [\tau_j, \tau_{j+1}], \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{1.4}$$

Можно считать систему узлов и систему базисных функций периодически продолженными с периодом 1.

Приближенное решение произвольного линейного уравнения $(\mathscr{K} f)(t) = g(t)$ будем отыскивать в виде

$$f(\tau) = \sum_{j=-N_1}^{N_2} a_j \varphi_j(\tau), \tag{1.5}$$

а неизвестные коэффициенты a_j будем определять из условий коллокации в тех же узлах, которые дают систему линейных алгебраических уравнений относительно $\{a_j\}$:

$$\mathscr{K} f(\tau_k) \equiv \sum_{j=-N_1}^{N_2} a_j (\mathscr{K} \varphi_j)(\tau_k) = g(\tau_k), \quad k = -N_1, \dots, N_2. \tag{1.6}$$

Если оператор невырожденный, образы базисных функций $\mathscr{K} \varphi_j$ линейно независимы. Но это еще не влечет разрешимости системы (1.6), ибо здесь нужна независимость сужений функций $\mathscr{K} \varphi_j$ на сетку. Для оценки устойчивости метода желательно также дать оценку обусловленности матрицы системы (1.6), хотя бы при достаточно малом шаге сетки.

Обозначим шаги сетки через $h_{j+1/2} \equiv \tau_{j+1} - \tau_j$, и пусть h минимальный из них. Наложим условие квазиравномерности:

$$\max_j h_{j+1/2} \le Qh.$$

Наша задача — доказать, что если интегральный оператор в основном уравнении (1.1) является невырожденным и если значение величины Q, которую будем называть *параметром квазиравномерности*, фиксировано, то при достаточно малом шаге сетки h норма конечномерного оператора, обратного к оператору системы (1.6), имеет оценку ch^{-1}. Сначала это будет сделано для модельного уравнения (1.3), а затем результат будет перенесен на общий случай.

2. Формулировка результата для модельного уравнения и схема доказательства

Возьмем вектор, компонентами которого являются неизвестные a_j, с единичной равномерной нормой и оценим снизу равномерную норму образа этого вектора после применения оператора, соответствующего системе (1.6). Сформулируем желаемый результат для модельного уравнения в следующем виде.

Теорема 1. *Пусть $\mathscr{K}$ — оператор, заданный в* (1.3), *$f(\tau)$ имеет вид* (1.5), *где $\max\limits_j |a_j| = 1$, параметр квазиравномерности удовлетворяет условию $Q \leq 23.3$ и $g = \mathscr{K} f$. Тогда если h достаточно мало, то существует такой узел сетки τ_j, что $|g(\tau_j)| \geq ch$.*

При доказательстве будет использоваться формулировка желаемого результата также в терминах конечных разностей.

Если $g(\tau)$ — некоторая функция, будем обозначать символом $D_2(g; i, j, k)$ (где $i < j < k$) ее вторую разность, вычисленную по значениям в узлах сетки τ_i, τ_j, τ_k, а именно

$$D_2(g; i, j, k) \equiv \frac{\tau_k - \tau_j}{\tau_k - \tau_i}[g(\tau_i) - g(\tau_j)] + \frac{\tau_j - \tau_i}{\tau_k - \tau_i}[g(\tau_k) - g(\tau_j)]. \tag{2.1}$$

В последнем выражении коэффициенты при квадратных скобках положительны и в сумме равны 1. Поэтому если для функции $g = \mathscr{K} f$ выполняется неравенство $|D_2(g; i, j, k)| > ch$, то по крайней мере одна из квадратных скобок превышает по модулю ch, а значит, хотя бы одно из значений функции g в этой скобке по модулю не меньше $ch/2$.

То же самое верно, если вместо D_2 рассмотреть «упрощенную» вторую разность:

$$\widetilde{D}_2(g; i, j, k) \equiv \frac{1}{2}[g(\tau_i) - g(\tau_j)] + \frac{1}{2}[g(\tau_k) - g(\tau_j)]. \tag{2.2}$$

Как известно, вторая разность D_2 может быть выражена через вторую производную функции:

$$D_2(g; i, j, k) = \int\limits_{\tau_i}^{\tau_k} g''(\xi) J(\xi)\, d\xi, \tag{2.3}$$

где

$$J(\xi) = \begin{cases} \frac{\tau_k - \tau_j}{\tau_k - \tau_i}(\xi - \tau_i), & \text{если } \xi < \tau_j, \\ \frac{\tau_j - \tau_i}{\tau_k - \tau_i}(\tau_k - \xi), & \text{если } \xi > \tau_j. \end{cases}$$

В частности, отсюда следует неравенство

$$D_2(g; i, j, k) \geq \min_{[\tau_i, \tau_k]} g''(\xi) \int\limits_{\tau_i}^{\tau_k} J(\xi)\, d\xi = \min_{[\tau_i, \tau_k]} g''(\xi) \frac{(\tau_k - \tau_j)(\tau_j - \tau_i)}{2}. \tag{2.4}$$

Далее, если $f_0(\tau) \equiv 1$, то $\mathscr{K} f_0$ также константа:

$$\mathscr{K} f_0 = A_0 \equiv \int\limits_0^1 \ln \frac{1}{|\tau - t|'}\, d\tau = \int\limits_{-1/2}^{1/2} \ln \frac{1}{|\tau|}\, d\tau > 0. \tag{2.5}$$

Поскольку по условию теоремы $\max|a_j| = 1$, выберем один из номеров j таких, что $|a_j| = 1$. Пусть для определенности этот номер является нулем, а коэффициент a_j равен (-1).

Если теперь взять функцию $\tilde{f}(\tau) = f(\tau)+f_0(\tau)$, то вторые разности у функций $\mathscr{K}f$ и $\mathscr{K}\tilde{f}$ будут одинаковыми. Новая функция $\tilde{f}$ будет иметь структуру, подобную (1.5), а именно

$$\tilde{f}(\tau) = \sum_{j=-N_1}^{N_2} b_j\varphi_j(\tau), \tag{2.6}$$

где $b_j = a_j + 1$; поэтому теперь $0 \le b_j \le 2$, $b_0 = 0$.

Идея доказательства теоремы 1 состоит в следующем.

Прежде всего легко рассмотреть случай, который назовем условно случаем «*ненулевого среднего*»: если среднее значение функции f отличается от нуля на величину, большую C_*h, где C_* — некоторая не зависящая от h константа, то при малых h среднее значение функции $g = \mathscr{K}f$ в узлах также будет превышать по модулю ch. Значит, потом достаточно будет рассмотреть случай, когда интеграл от f близок к нулю (т. е. интеграл от $\tilde{f}$ близок к единице).

Далее, вторая разность для функции $\tilde{g} = \mathscr{K}\tilde{f}$ — сумма вторых разностей для образов базисных функций с неотрицательными коэффициентами b_j, причем $b_0 = 0$. Если эти образы базисных функций с ненулевым номером будут иметь в нулевом узле положительную вторую разность, удовлетворяющую к тому же нижней оценке ch, то такую же оценку будет иметь и их сумма. Это свойство можно назвать дискретной выпуклостью образов базисных функций.

Однако, во-первых, нижняя оценка вида ch будет иметься только для функций с близкими к нулю номерами, а им могут соответствовать сколь угодно малые или даже нулевые коэффициенты b_j. Тогда придется рассмотреть вторые разности не по соседним, а по далеким узлам («*дальний случай*»).

А во-вторых, если даже вблизи и найдутся достаточно большие коэффициенты b_j («*ближний случай*»), это еще не гарантирует положительной второй разности, так как дискретная выпуклость образа кусочно линейной базисной функции может нарушаться в одном из двух ближайших узлов. В этом случае нужно будет модифицировать критерий выпуклости и понимать под ней положительность некоторой комбинации вторых разностей. Однако при этом остается ограничение на величину параметра квазиравномерности, которое, как показывают численные эксперименты, по существу, не является необходимым, но которое снять полностью пока не удалось.

Итак, доказательство теоремы 1 сведем к рассмотрению трех перечисленных ситуаций, где будут получены следующие результаты.

1. Случай ненулевого среднего.

Теорема 1′. *Существует такая не зависящая от h положительная константа C_*, что если $f(\tau)$ имеет вид (1.5), где $\max_j|a_j| = 1$, и при этом интеграл от нее превышает по модулю C_*h, то при достаточно малых h существует такой узел τ_k, что $|g(\tau_k)| \equiv |\mathscr{K}f(\tau_k)| > ch$.*

2. Дальний случай.

Теорема 1″. *Существуют такие не зависящие от h положительные константы k_* и γ, что если функция $\tilde{f}(\tau)$ имеет вид (2.6), где $0 \le b_j \le 2$, $b_0 = 0$, причем узлам τ_j, попадающим в отрезок $[-k_*h, k_*h]$, отвечают коэффициенты*

b_j, меньшие γ, и при этом интеграл от $\tilde{f}$ отличается от единицы меньше, чем на $C_* h$, то при достаточно малых h существуют два узла τ_{-i} и τ_j $(i, j > 0)$ такие, что $|D_2(\mathscr{K}\tilde{f}; -i, 0, j)| > ch$.

3. Ближний случай.

Теорема 1$'''$. *Пусть функция $\tilde{f}(\tau)$ имеет вид (2.6), где $0 \le b_j \le 2$, $b_0 = 0$, и параметр квазиравномерности Q не превышает 23.3. Если при некоторых не зависящих от h положительных константах k_* и γ хотя бы одному из узлов τ_j, попадающих в отрезок $[-k_* h, k_* h]$, соответствует коэффициент b_j, превышающий γ, и если шаг h достаточно мал, то хотя бы одна из трех вторых разностей*

$$D_2(\mathscr{K}\tilde{f}; -2, -1, 0); \quad D_2(\mathscr{K}\tilde{f}; -1, 0, 1); \quad D_2(\mathscr{K}\tilde{f}; 0, 1, 2)$$

по модулю превышает ch.

3. Случай ненулевого среднего. Доказательство теоремы 1$'$

Здесь и в дальнейшем будем обозначать через ψ_j образ базисной функции φ_j вида (1.4), т. е.

$$\psi_j(t) \equiv \mathscr{K}\varphi_j(t) = \int\limits_{\tau_{j-1}}^{\tau_{j+1}} \varphi_j(\tau) \ln \frac{1}{|\tau - t|'}\, d\tau. \tag{3.1}$$

Если $|t - \tau| < 1/2$ для всех $\tau \in \operatorname{supp}\varphi_j$, т. е. точка излома ядра не принадлежит промежутку интегрирования, то можно записать эту функцию в явном виде:

$$\psi_j(\tau_j + \eta) = \alpha_j + h_{j-1/2} \times \mu\left(1 + \frac{\eta}{h_{j-1/2}}\right) + h_{j+1/2} \times \mu\left(1 - \frac{\eta}{h_{j+1/2}}\right), \tag{3.2}$$

где

$$\alpha_j = -\frac{1}{2}(h_{j-1/2} \ln h_{j-1/2} + h_{j+1/2} \ln h_{j+1/2}),$$
$$\mu(\xi) = -\frac{1}{2}\xi^2 \ln|\xi| + \frac{1}{2}(\xi^2 - 1)\ln|\xi - 1| + \frac{1 + 2\xi}{4}. \tag{3.3}$$

Пусть функция $f(\tau)$ удовлетворяет условиям теоремы 1$'$ и $g = \mathscr{K} f$. Тогда, учитывая структуру оператора $\mathscr{K}$, легко вычислить среднее значение функции g:

$$\left|\int\limits_{-1/2}^{1/2} g(\tau)\, d\tau\right| = \left|A_0 \int\limits_{-1/2}^{1/2} f(\tau)\, d\tau\right| > A_0 C_* h, \tag{3.4}$$

где A_0 — константа, определенная формулой (2.5). Теперь рассмотрим разность E между точным значением интеграла от функции g и его приближенным значением, полученным по квадратурной формуле трапеций для сетки $\{\tau_j\}$.

Обозначим $\delta_k = (h_{k-1/2} + h_{k+1/2})/2$. Поскольку $g(\tau) = \sum a_j \psi_j(\tau)$, величину E можно записать в виде

$$E = \int\limits_{-1/2}^{1/2} g(\tau)\, d\tau - \sum_{k=-N_1}^{N_2} g(\tau_k)\delta_k$$
$$= \sum_{j=-N_1}^{N_2} a_j \left[\int\limits_{-1/2}^{1/2} \psi_j(\tau)\, d\tau - \sum_{k=-N_1}^{N_2} \psi_j(\tau_k)\delta_k\right] \equiv \sum_{j=-N_1}^{N_2} a_j E_j. \tag{3.5}$$

Квадратная скобка, обозначенная через E_j, является в точности погрешностью квадратурной формулы трапеций для функции $\psi_j(\tau)$. Эта погрешность может быть записана как сумма погрешностей E_{jk} для каждого из элементарных отрезков $[\tau_{k-1}, \tau_k]$.

Погрешность формулы трапеций на отрезке имеет оценку $|E_{jk}| \le ch^3|\psi''|$. Если $|k-j| \ge 2$, то из формулы (3.1) легко оценить $|\psi''| \le c/(|j-k|^2 h)$. Что же касается четырех отрезков, ближайших к узлу τ_j, то, как легко видеть из явных формул (3.2), (3.3), в силу ограниченности функции μ вариация функции ψ_j на каждом из отрезков не превышает ch и длина отрезка не превышает такой же величины. Такое же утверждение верно и для тех отрезков, где производная ядра имеет разрыв. Отсюда вытекает оценка $|E_j| \le ch^2$, а тогда из (3.5) $|E| \le c_0 h$.

Следовательно, ввиду (3.4), если выбрать $C_* > c_0/A_0$, имеем

$$\Bigl|\sum_k g(\tau_k)\delta_k\Bigr| \ge \left|\int\limits_{-1/2}^{1/2} g(\tau)\,d\tau\right| - c_0 h > (A_0 C_* - c_0)h > ch.$$

Величины δ_k положительны, и сумма их равна 1, так что в левой части последнего неравенства находится некоторое усреднение значений $g(\tau)$ в узлах. Поэтому модуль хотя бы одного из этих узловых значений превосходит ch. Теорема $1'$ доказана.

4. Дальний случай. Доказательство континуального аналога теоремы $1''$

Докажем сначала континуальный аналог теоремы $1''$, а именно рассмотрим упрощенные вторые разности

$$d_2(\tilde f, \theta) \equiv \frac{1}{2}\mathscr{K}\tilde f(\theta) + \frac{1}{2}\mathscr{K}\tilde f(-\theta) - \mathscr{K}\tilde f(0),$$

где точки θ и $(-\theta)$ не имеют отношения к сетке, и докажем утверждение: *в условиях теоремы $1''$ при достаточно малом h найдется точка θ, для которой*

$$d_2(\tilde f, \theta) > ch. \tag{4.1}$$

Для доказательства возьмем величину $H = 2\max h_{j+1/2}$ и рассмотрим среднее значение функции $d_2(\tilde f, \theta)$ по отрезку $[H, 1/2]$ с весом $1/\theta^2$:

$$M(\tilde f) \equiv \frac{1}{W}\int\limits_H^{1/2}\left[\frac{1}{2}\mathscr{K}\tilde f(\theta) + \frac{1}{2}\mathscr{K}\tilde f(-\theta) - \mathscr{K}\tilde f(0)\right]\frac{1}{\theta^2}\,d\theta, \tag{4.2}$$

где

$$W = \int\limits_H^{1/2}\frac{1}{\theta^2}\,d\theta = \frac{1-2H}{H}.$$

Подставляя сюда выражение для $\mathscr{K}\tilde f(\theta)$ и изменяя порядок интегрирования, можем записать

$$M(\tilde f) = \int\limits_{-1/2}^{1/2}\tilde f(\tau)\Phi(\tau)\,d\tau = \int\limits_0^{1/2} F(\tau)\Phi(\tau)\,d\tau, \tag{4.3}$$

где

$$\Phi(\tau) = \frac{1}{W}\int\limits_{H}^{1/2}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{1}{|\theta-\tau|'} + \frac{1}{2}\ln\frac{1}{|-\theta-\tau|'} - \ln\frac{1}{|\tau|'}\right]\frac{1}{\theta^2}\,d\theta;\ F(\tau) = \tilde{f}(\tau)+\tilde{f}(-\tau).$$

Как следует из условий теоремы $1''$, $0 \le F(\tau) \le 4$ и интеграл от функции $F(\tau)$ по отрезку $[0, 1/2]$ не меньше, чем $1 - C_* h$.

Изучим функцию $\Phi(\tau)$, которую запишем в явной форме. Для $0 < \tau < 1/2 - H$

$$\Phi(\tau) = \frac{1}{1-2H}\left\{\Phi_0(\tau) + \Phi_1(\tau) + \Phi_2(\tau)\right\},$$

где

$$\Phi_0(\tau) = 2H\ln\frac{1}{\tau\left(\frac{1}{2}-\tau\right)};\quad \Phi_1(\tau) = \frac{H}{\tau(1-\tau)}\left[-\ln 2 - 4\left(\frac{1}{2}-\tau\right)^2\ln\left|\frac{1}{2}-\tau\right|\right];$$

$$\Phi_2(\tau) = \frac{H}{2\tau}\ln\left|\frac{1-H/\tau}{1+H/\tau}\right| - \frac{1}{2}\ln\left|1-\frac{H^2}{\tau^2}\right|. \tag{4.4}$$

Для $1/2 - H \le \tau \le 1/2$ (когда имеется излом в логарифмическом ядре)

$$\Phi(\tau) = \left\{-H\ln H\cdot\frac{1}{2\tau(1-\tau)} + \frac{2H}{\tau(\tau-1)}\left(\frac{1}{2}-\tau\right)^2\ln\left|\frac{1}{2}-\tau\right| + \frac{H}{2\tau}\ln|\tau-H| + \frac{1}{2}\ln\left|1+\frac{2\tau(\tau-1/2)+H(1-H)}{(\tau-H)(1-\tau-H)}\right| - \frac{H}{2\tau(1-\tau)}\ln 2 - \frac{H}{2(\tau-1)}\ln|\tau+H-1|\right\}\frac{1}{1-2H}. \tag{4.5}$$

Исходя из этих формул, относительно несложно проверить, что функция Φ и ее слагаемые удовлетворяют следующим соотношениям.

Лемма 1. 1. *Функция $\Phi(\tau)$ при $\tau \in [1/2 - H, 1/2]$ удовлетворяет соотношению*

$$\Phi(\tau) = O(H|\ln H|). \tag{4.6}$$

2. *Функция $\Phi_0(\tau)$ четная относительно точки $\tau = 1/4$, имеет в ней минимум и при $\tau \in [H, 1/2 - H]$ удовлетворяет неравенствам*

$$H\cdot 8\ln 2 = \Phi_0(1/4) \le \Phi_0(\tau) \le 2H|\ln H| + O(H). \tag{4.7}$$

3. *Функция Φ_1 удовлетворяет неравенствам*

$$-4\ln 2\cdot H \le \Phi_1(\tau) \le 0. \tag{4.8}$$

4. *Функция $\Phi_2(\tau)$ отрицательна всюду на $[0, 1/2]$ и при $\tau > \sqrt{H}$ удовлетворяет неравенствам*

$$-\frac{2}{3}H \le \Phi_2(\tau) \le 0. \tag{4.9}$$

5. *Функция $\Phi(\tau)$ удовлетворяет соотношению*

$$\int\limits_{0}^{1/2}\Phi(\tau)\,d\tau = 0. \tag{4.10}$$

Последнее свойство очевидно потому, что если $\tilde{f}(\tau) \equiv \mathrm{const}$, то $\mathscr{K}\tilde{f} \equiv \mathrm{const}$, поэтому равны нулю все вторые разности, а следовательно, и интеграл (4.2) вместе с интегралами (4.3).

Итак, складывая нижние оценки из (4.7)–(4.9), можно убедиться, что на отрезке $[\sqrt{H}, 1/2]$ функция $\Phi(\tau)$ заведомо положительна. В то же время интеграл (4.10) равен нулю, значит, интеграл от функции Φ по начальному отрезку $[0, \sqrt{H}]$ должен быть отрицательным и компенсировать положительную часть. Более того, на самом деле отрицательная часть интеграла «почти целиком» сосредоточена на отрезке длиной $l_* H \equiv k_* h$, где l_* и k_* — некоторые не зависящие от H и h константы. Если на этом отрезке функция $F(\tau)$ мала, то, сравнивая изучаемый интеграл (4.3) с равным нулю интегралом (4.10), видим, что отрицательная часть первого из них отличается от отрицательной части второго множителем, не превышающим 2γ, в то время как положительная часть — множителем, не меньшим некоторой константы. Значит, если второй интеграл равен нулю, то первый обязан быть положительным.

Уточним эти соображения. Представим $\Phi(\tau)$ в виде $\Phi(\tau) = \Phi_+(\tau) + \Phi_-(\tau)$, где

$$\Phi_+(\tau) = \frac{1}{1-2H}\left(\Phi_0(\tau) + \Phi_1(\tau)\right); \quad \Phi_-(\tau) = \frac{1}{1-2H}\Phi_2(\tau).$$

Тогда несложными оценками из (4.4) может быть получена

Лемма 2. *Если $m \in (0,1)$, то при $l_* > 8/(3\pi^2 m)$ справедливо неравенство*

$$\left|\int\limits_0^{l_* H} \Phi_-(\tau)\, d\tau\right| > (1-m)\left|\int\limits_0^{1/2} \Phi_-(\tau)\, d\tau\right|. \tag{4.11}$$

Чтобы оценить снизу интеграл (4.3), разобьем его на несколько слагаемых:

$$\int\limits_0^{1/2} F(\tau)\Phi(\tau)\, d\tau = \int\limits_0^{\sqrt{H}} F(\tau)\Phi_+(\tau)\, d\tau + \int\limits_{\sqrt{H}}^{1/2} F(\tau)\Phi_+(\tau)\, d\tau + \int\limits_0^{l_* H} F(\tau)\Phi_-(\tau)\, d\tau$$
$$+ \int\limits_{l_* H}^{1/2} F(\tau)\Phi_-(\tau)\, d\tau \equiv I_{1+}(F) + I_{2+}(F) + I_{3-}(F) + I_{4-}(F). \tag{4.12}$$

Аналогичные слагаемые интеграла (4.10) отличаются от этих величин тем, что в них вместо $F(\tau)$ стоит единица; обозначим их через $I_{1+}(1)$, $I_{2+}(1)$, $I_{3-}(1)$, $I_{4-}(1)$. Мы знаем, что

$$I_{1+}(1) + I_{2+}(1) + I_{3-}(1) + I_{4-}(1) = 0. \tag{4.13}$$

Возьмем некоторое $m \in (0,1)$, для него подберем l_* по лемме 2 и потребуем, чтобы неравенство $F(\tau) < 2\gamma$ выполнялось для $\tau < l_* H$. Тогда, исходя из свойств функции $F(\tau)$ и из леммы 1, без труда можно получить оценки

$$\frac{1}{1-2H}\left(\frac{1}{2} - \sqrt{H}\right) \cdot 4H \ln 2 < I_{2+}(1) < \frac{2H}{1-2H}(\ln 2 + 1);$$

$$I_{1+}(F) > 0; \quad I_{2+}(F) \geq \frac{16}{21}(1 - C_* h - 4\sqrt{H}) I_{2+}(1); \quad I_{4-}(F) > 4m I_{3-}(1);$$

$$I_{3-}(F) \geq 2\gamma I_{3-}(1); \quad I_{1+}(1) < c_1\sqrt{H}|\ln H| \cdot I_{2+}(1);$$

$$I_{3-}(1) = -I_{1+}(1) - I_{2+}(1) - I_{4-}(1) > -(1 + c_1\sqrt{H}|\ln H|)I_{2+}(1).$$

С учетом всех неравенств заключительная оценка имеет вид

$$M(\tilde{f}) \equiv \int_0^{1/2} F(\tau)\Phi(\tau)\,d\tau$$

$$\geq I_{2+}(1)\left[\frac{16}{21}(1 - C_* h - 4\sqrt{H}) - (2\gamma + m)(1 + c_1\sqrt{H}|\ln H|)\right]. \qquad (4.14)$$

Если m и γ не слишком велики, то квадратная скобка в последнем выражении не меньше некоторой константы и $I_{2+}(1) > ch$, следовательно, $M(\tilde{f}) > ch$. Но величина $M(\tilde{f})$, определенная формулой (4.2), есть некоторое усреднение функции $d_2(\tilde{f};\theta)$, поэтому полученный нами результат влечет существование такого значения $\theta \in [k_* h, 1/2]$, что

$$d_2(\tilde{f};\theta) > ch.$$

Итак, справедлив сформулированный в начале раздела континуальный аналог теоремы $1''$. Теперь нужно доказать, что найдется и тройка узлов сетки $\tau_{-i}, 0, \tau_j$, для которой упрощенная вторая разность удовлетворяет такой же оценке. Мы не будем сравнивать значения функции $g(\theta)$ со значениями в ближайших узлах сетки. Мы в некотором смысле будем сравнивать усредненное (с весом $1/\theta^2$) значение $\mathscr{K}\tilde{f}(\theta)$ с аналогичным усредненным значением по узлам.

Введем следующее обозначение. Если $\psi(\tau)$ — некоторая функция, то $L(\psi;\theta)$ будет обозначать значение в точке θ линейного интерполянта функции $\psi(\theta)$ по ее значениям на сетке.

Вместе с ранее определенной в (4.2) величиной $M(\tilde{f})$, которая представляет собой усреднение вторых разностей для функции $g = \mathscr{K}\tilde{f}$, рассмотрим аналогичное усреднение для ее линейного интерполянта:

$$\widetilde{M}(\tilde{f}) \equiv \frac{1}{W}\int_H^{1/2}\left[\frac{1}{2}L(\mathscr{K}\tilde{f};\theta) + \frac{1}{2}L(\mathscr{K}\tilde{f};-\theta) - \mathscr{K}\tilde{f}(0)\right]\frac{d\theta}{\theta^2}, \qquad (4.15)$$

и разность δ между ними.

Кроме прежнего обозначения $\psi_j(\theta) = \mathscr{K}\varphi_j(\theta)$, будем использовать обозначение $\tilde{\psi}_j(\theta) = L(\mathscr{K}\varphi_j;\theta)$. Поскольку $\tilde{f}(\tau) = \sum b_j\varphi_j(\tau)$, где $b_0 = 0$, разность $\delta = \widetilde{M}(\tilde{f}) - M(\tilde{f})$ можно записать в виде

$$\delta = \sum_{j\neq 0} b_j\left\{\frac{1}{2W}\int_H^{1/2}\frac{\tilde{\psi}_j(\theta) - \psi_j(\theta)}{\theta^2}\,d\theta + \frac{1}{2W}\int_H^{1/2}\frac{\tilde{\psi}_j(-\theta) - \psi_j(-\theta)}{\theta^2}\,d\theta\right\}.$$

Оценивая разность между функцией ψ_j и ее интерполянтом из формул (3.2), (3.3) для θ, находящихся на четырех соседних к τ_j отрезках, и непосредственно из формулы (3.1) для остальных θ, можно доказать, что

$$|\delta| \leq \frac{c_2}{W}\sum_{j\neq 0} b_j \cdot \frac{h^2}{\tau_j^2}.$$

Сумму эту можно разбить на сумму δ' по тем номерам j, для которых узел τ_j попадает в отрезок $[-k_* h, k_* h]$ (и где $b_j < \gamma$), и сумму δ'' по остальным номерам. Тогда из вышеизложенного легко получить соотношения

$$\delta' \leq \gamma c_3 h \leq \gamma c_4 I_{2+}(1); \quad \delta'' \leq \frac{c_5 h}{k_*} \leq \frac{c_6}{k_*} I_{2+}(1).$$

Итак, в результате имеем

$$|\widetilde{M}(\tilde{f}) - M(\tilde{f})| \leq \left(\gamma c_4 + \frac{c_6}{k_*}\right) I_{2+}(1).$$

Отсюда и из заключительной оценки предыдущих рассуждений (4.14) следует, что

$$\widetilde{M}(\tilde{f}) \geq I_{2+}(1) \left[\frac{16}{21}(1 - C_* h - 4\sqrt{H}) - (2\gamma + 4m)(1 + c_1\sqrt{H}|\ln H|) - \gamma c_4 - \frac{c_6}{k_*}\right].$$

Легко увидеть, что если k_* не слишком мало, а m и γ не слишком велики, то при достаточно малых h (а значит, и достаточно малых H) величина в квадратных скобках будет больше некоторой положительной константы и в результате имеем оценку $\widetilde{M}(\tilde{f}) > ch$.

Поскольку согласно (4.15) $\widetilde{M}(\tilde{f})$ — усреднение вторых разностей для кусочно линейного интерполянта $l(\theta)$ функции $\tilde{g} \equiv \mathscr{K}\tilde{f}$, из полученной оценки следует существование таких значений $\theta \in [H, 1/2]$, что

$$\tilde{d}_2(l;\theta) = \frac{1}{2}l(\theta) + \frac{1}{2}l(-\theta) - l(0) > ch. \tag{4.16}$$

Пусть одна из таких точек (θ) расположена между узлами τ_q, τ_{q+1}, а противоположная к ней точка $(-\theta)$ — между узлами τ_p, τ_{p+1}. Так как $|\theta| > H = 2\max h_{j+1/2}$, ни один из этих узлов не совпадает с узлом $\tau_0 = 0$. Но каждое из значений линейного интерполянта $l(\theta)$, $l(-\theta)$ является усреднением значений функции $\tilde{g}$ в соседних узлах. Как нетрудно показать, тогда и величина $\tilde{d}_2(l,\theta)$ есть некоторое усреднение четырех упрощенных конечных разностей, взятых по тройкам узлов $\{\tau_p, 0, \tau_q\}$; $\{\tau_p, 0, \tau_{q+1}\}$; $\{\tau_{p+1}, 0, \tau_q\}$; $\{\tau_{p+1}, 0, \tau_{q+1}\}$. Поэтому из оценки (4.16) следует, что хотя бы одна из этих вторых разностей по модулю превышает ch. Этим завершено доказательство теоремы $1''$.

5. Ближний случай. Доказательство теоремы $1'''$

В силу линейности функционала D_2 имеем

$$D_2(\mathscr{K}\tilde{f}; -1, 0, 1) = \sum_{j=-N_1}^{N_2} b_j D_2(\psi_j; -1, 0, 1). \tag{5.1}$$

Поскольку $b_0 = 0$, слагаемое с номером 0 фактически отсутствует. Относительно слагаемых с номерами j такими, что $|j| \geq 2$, можно гарантировать, что они не меньше $cb_j h/|j|^2$. Действительно, из выражения (3.1) для функции ψ_j видно, что если носитель функции φ_j не перекрывается с отрезком $[\tau_{-1}, \tau_1]$, то вторая разность от логарифмического ядра не меньше $ch^2/\tau_j^2 > c/j^2$, а интеграл от базисной функции имеет порядок h. Так как по условиям теоремы $1'''$ среди коэффициентов b_j, отвечающих узлам $\tau_j \in [-k_* h, k_* h]$, найдутся такие, которые не меньше константы γ, отсюда следует, что сумма (5.1) содержит слагаемые, не меньшие ch.

К сожалению, при произвольном Q положительность второй разности в нулевом узле может нарушаться для одной из двух соседних базисных функций с номерами $j = \pm 1$. Ослабить возникающее отсюда ограничение на Q можно путем модифицирования функционала и рассмотрения «обобщенной» выпуклости.

Будем использовать более короткое обозначение для второй разности по тройке соседних узлов: $D_{2,k}(\psi) \equiv D_2(\psi; k-1, k, k+1)$. Будем также считать, что из двух шагов, ближайших к нулевому узлу, шаг $h_{1/2}$ наибольший, т. е. $h_{-1/2} \le h_{1/2}$. Введем также обозначения для отношений ближайших шагов:

$$a = \frac{h_{-1/2}}{h_{1/2}} \le 1; \quad b = \frac{h_{3/2}}{h_{1/2}}; \quad e = \frac{h_{5/2}}{h_{1/2}}.$$

Указанное в условиях теоремы ограничение на Q означает, что $a, b, e \ge 1/23.3 > 0.0429$.

Вместо второй разности будем рассматривать функционал вида

$$\mathscr{D}(\psi) \equiv D_{2,0}(\psi) - p_1 D_{2,1}(\psi), \tag{5.2}$$

где $|p_1| < \mathrm{const}$. Для функционала $\mathscr{D}$ также верны все приведенные рассуждения, а требуемое неравенство $\mathscr{D}(\mathscr{K}\tilde{f}) > ch$ будет выполняться, если функционал $\mathscr{D}$ удовлетворяет условиям:

$$\mathscr{D}(\psi_j) \ge 0 \quad \text{для всех } j \ne 0; \tag{5.3}$$

$$\mathscr{D}(\psi_j) > \mathrm{const} \times h \quad \text{для таких } j \ne 0, \text{ что } \tau_j \in [-k_* h, k_* h]. \tag{5.4}$$

Выражение для $\mathscr{D}(\psi_j)$ можно записать в более развернутом виде. Для тройки соседних узлов $\tau_{k-1}, \tau_k, \tau_{k+1}$ функция $J(\xi)$ в формуле (2.3) становится пропорциональной базисной функции φ_k, поэтому выражение для второй разности после интегрирования по частям можно записать в виде

$$D_{2,k}(\psi) = -\frac{h_{k-1/2} h_{k+1/2}}{h_{k-1/2} + h_{k+1/2}} \int \psi'(\tau) \varphi_k'(\tau)\, d\tau.$$

Далее, если $\psi = \psi_j = \mathscr{K}\varphi_j$, то после очевидных преобразований и замены переменной $\tau = h_{1/2}\xi$ окончательное выражение для $\mathscr{D}(\psi_j)$ запишется в виде

$$\mathscr{D}(\psi_j) = h_{1/2} \frac{a}{1+a} \int \varphi_j(h_{1/2}\xi) G(\xi)\, d\xi, \tag{5.5}$$

где обозначено

$$\begin{aligned} G(\xi) \equiv h_{1/2} \int \left[\varphi_0'(h_{1/2}\zeta) - q_1 \varphi_1'(h_{1/2}\zeta)\right] \frac{d\zeta}{\zeta - \xi} \\ = \frac{1}{a} \ln\left|\frac{\xi}{\xi + a}\right| + (1 + q_1) \ln\left|\frac{\xi}{\xi - 1}\right| + \frac{q_1}{b} \ln\left|\frac{\xi - 1 - b}{\xi - 1}\right|; \end{aligned} \tag{5.6}$$

$$q_1 = \frac{h_{3/2}}{h_{-1/2}} \cdot \frac{h_{1/2} + h_{-1/2}}{h_{1/2} + h_{3/2}} \cdot p_1.$$

(Здесь мы считаем, что разрыва производной ядра в пределах интегрирования не происходит. Если же разрыв происходит, он способен только увеличить вторую разность.) Исходя из этих явных формул, можно проверить свойства (5.3), (5.4) для функционала $\mathscr{D}$ при различных ограничениях на величины a, b, e.

Лемма 3. *Если* $a, b > 0.235$, *что выполнено при* $Q < 4.25$, *то функционал* $\mathscr{D}$ *обладает свойствами* (5.3), (5.4) *при* $q_1 = 0$.

Фактически при этих ограничениях на соотношения шагов сетки функционал $\mathscr{D}$ можно взять просто совпадающим со второй разностью в нулевом узле.

При доказательстве сразу проверяется, что за пределами двух соседних к нулю отрезков функция $G(\xi)$ заведомо положительна, поэтому остается проверить положительность $\mathscr{D}(\psi j)$ только для $j = \pm 1$. Это может быть сделано путем явного вычисления интегралов вида (5.5) и рутинного исследования получившихся элементарных функций от параметров a, b.

Лемма 4. *Если* $a \le 1$; $b \le 1$; $a, b, e \ge 0.0429$, *то при выборе* $q_1 = 0.088 \times (1-a)(1-b)$ *функционал* $\mathscr{D}$ *обладает свойствами* (5.3), (5.4).

Доказательство леммы, по существу, проводится так же, как и в предыдущем случае. Проверять положительность $\mathscr{D}(\psi_j)$ непосредственно приходится только для $j = -1, 1, 2, 3$. Этим завершается доказательство теоремы $1'''$ и вместе с ней теоремы 1.

6. Доказательство для общего уравнения

Рассмотрим общее уравнение Симма, включающее помимо главного также и младшие члены. Будем считать, что уравнение имеет вид

$$(\mathscr{K} + \mathscr{K}_1) f(t) \equiv \int_0^1 \ln \frac{1}{|\tau - t|'} f(\tau)\, d\tau + \int_0^1 K_1(t, \tau) f(\tau)\, d\tau = g(t), \tag{6.1}$$

где ядро $K_1(t, \tau)$ может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} K_1(t, \tau) = \ln \frac{a|\tau - t|'}{|x(t) - x(\tau)|} &+ P_1(t, \tau) \\ &+ |x(t) - x(\tau)| \cdot \ln |x(t) - x(\tau)| \cdot P_2(t, \tau) \\ &+ \operatorname{sign}(t - \tau) \cdot |x(t) - x(\tau)| \cdot \ln |x(t) - x(\tau)| \cdot P_3(t, \tau). \end{aligned} \tag{6.2}$$

В этой формуле $x(\tau)$ — периодическая вектор-функция, задающая параметризацию некоторой замкнутой кривой.

Будем обозначать через $C^{0,\lambda}$ банахово пространство функций (или вектор-функций) одной переменной, удовлетворяющих условию Гёльдера с показателем $\lambda \in (0, 1)$; $C^{1,\lambda}$ — пространство функций, первая производная которых принадлежит $C^{0,\lambda}$.

Теорема 2. *Пусть уравнение* (6.1) *однозначно разрешимо для любой правой части из* $C^{1,\lambda}$ *при каком-нибудь* $\lambda \in (0, 1)$, *вектор-функция* $x(t)$ *принадлежит* $C^{1,\lambda}$ *и первые производные функций* P_1, P_2, P_3 *по переменной* t *принадлежат* $C^{0,\lambda}$ *по каждой переменной. Если* $f(\tau)$ *имеет вид* (1.5), *где* $\max |a_j| = 1$, *и* h *достаточно мало, то существует такой узел* τ_j, *что* $|g(\tau_j| > ch$.

Доказательство. Обозначим через X_h линейное пространство, натянутое на базисные функции φ_j, т. е. пространство функций вида (1.5). Нам нужно показать, что если $f \in X_h$ и $\max |f| = 1$, то $\max\limits_j |(\mathscr{K} + \mathscr{K}_1) f(\tau_j)| > ch$.

Введем оператор Π_h, который осуществляет проектирование пространства $C^{0,\lambda}$ на X_h следующим образом.

Пусть $\Delta_j \equiv \operatorname{supp}\varphi_j = [\tau_{j-1}, \tau_{j+1}]$, и пусть δ_j — интеграл от φ_j по ее носителю, т. е. $\delta_j = (h_{j-1/2} + h_{j+1/2})/2$. Если $\psi(\tau)$ — произвольная функция, то обозначим через $\bar{\psi}_j$ ее взвешенное среднее значение по промежутку Δ_j:

$$\bar{\psi}_j = \frac{1}{\delta_j} \int\limits_{\Delta_j} \psi(\tau)\varphi_j(\tau)\, d\tau.$$

Тогда определим оператор Π_h равенством

$$\Pi_h \psi(\tau) \equiv \sum_j \bar{\psi}_j \varphi_j(\tau). \tag{6.3}$$

Отметим, что согласно этому определению

$$\int [\psi(\tau) - \bar{\psi}_j]\varphi_j(\tau)\, d\tau = 0. \tag{6.4}$$

Пусть $g = (\mathscr{K} + \mathscr{K}_1)f$, где f удовлетворяет условиям теоремы. Нам нужно доказать, что $\max|g(\tau_k)| > ch$. Это будет доказано, если мы найдем функцию $\tilde{g}$ такую, что

$$\max|\tilde{g}(\tau_k)| \geq ch; \quad \max|g(\tau_k) - \tilde{g}(\tau_k)| = o(h). \tag{6.5}$$

Для $f \in X_h$ определим нужную функцию $\tilde{g}$ формулой

$$\tilde{g} = \mathscr{K}\Pi_h \mathscr{K}^{-1}(\mathscr{K} + \mathscr{K}_1)f \equiv g + \mathscr{K}(\Pi_h \psi - \psi). \tag{6.6}$$

Можно доказать два утверждения.

Лемма 5. *Если $\psi \in C^{0,\lambda}$, то для каждого узла τ_k*

$$|\mathscr{K}\Pi_h \psi(\tau_k) - \mathscr{K}\psi(\tau_k)| < ch^{\lambda+1}|\ln h|. \tag{6.7}$$

Для доказательства, воспользовавшись (6.4), нужно записать

$$\begin{aligned} |\mathscr{K}\Pi_h \psi(\tau_k) - \mathscr{K}\psi(\tau_k)| &\leq \sum_j \left| \int\limits_{\Delta_j} [\psi(\tau) - \bar{\psi}_j]\varphi_j(\tau) \ln\frac{1}{|\tau|}\, d\tau \right| \\ &\leq \sum_j \left| \int [\psi(\tau) - \bar{\psi}_j]\varphi_j(\tau) \left[\ln\frac{1}{|\tau|} - \ln\frac{1}{|\tau_j - \tau_k|} \right] d\tau \right| \end{aligned}$$

(если $j = k$, то вычитание из логарифма постоянной на отрезке Δ_j величины не производится). Теперь для $\psi \in C^{0,\lambda}$ нетрудно провести нужную оценку.

Лемма 6. *Оператор $\mathscr{K}$ имеет обратный оператор $\mathscr{K}^{-1}$, непрерывно действующий из $C^{1,\lambda}$ в $C^{0,\lambda}$ при любом $\lambda \in (0,1)$.*

Доказательство проводится сравнением оператора $\mathscr{K}$ со стандартным оператором Гильберта на единичной окружности (см. [8]). Эта лемма подтверждает корректность определения функции $\tilde{g}$.

Как нетрудно проверить, оператор $\mathscr{K}_1$ с ядром вида (7.2) отображает функцию $f \in X_h$ в такую функцию, у которой модуль непрерывности производной порядка $h|\ln h|$, следовательно, $\mathscr{K}_1 f$ принадлежит $C^{1,\lambda}$ при любом $\lambda \in (0,1)$, и тогда $\psi \equiv \mathscr{K}^{-1}\mathscr{K}_1 f \in C^{0,\lambda}$. Итак, вследствие (6.6) и леммы 5 второе неравенство (6.5) выполнено.

Что касается первого неравенства (6.5), примем во внимание, что оператор $(\mathscr{K} + \mathscr{K}_1)$ по условию теоремы является обратимым, значит, это верно и для оператора $\mathscr{K}^{-1}(\mathscr{K} + \mathscr{K}_1) = (I + \mathscr{K}^{-1}\mathscr{K}_1)$. Последний оператор является фредгольмовым оператором второго рода, поэтому его обратимость в гёльдеровских пространствах влечет обратимость в равномерных нормах. Значит, $\max|\mathscr{K}^{-1}(\mathscr{K} + \mathscr{K}_1)f(\tau)| \geq \mathrm{const}$, и эта функция принадлежит $C^{0,\lambda}$. Тогда по лемме 5 ее проекция после применения оператора Π_h отличается от самой функции на малую величину и, следовательно, равномерная норма функции $\Pi_h\mathscr{K}^{-1}(\mathscr{K} + \mathscr{K}_1)f$ также не меньше некоторой константы. Но эта функция принадлежит X_h, т. е. является функцией вида (1.5). Применяя к ней теорему 1 и учитывая (6.7), приходим к справедливости первого неравенства (6.5). Теорема 2 доказана.

Отметим в заключение еще раз, что наличие ограничения на параметр квазиравномерности Q не связано с существом проблемы. Если в качестве функционала $\mathscr{D}$ рассматривается комбинация не двух, а нескольких вторых разностей, то, как показывают численные эксперименты, всегда существуют такие коэффициенты при этих разностях, что нужные свойства функционала имеются при любом Q. Ключевым пунктом наших рассуждений является дискретная выпуклость (или обобщенная выпуклость в смысле положительности функционала $\mathscr{D}$) образов базисных функций, которая, в свою очередь, есть следствие выпуклых свойств ядра интегрального оператора, и основная схема рассуждений может быть такой же для операторов с особенностью другого вида, а также в двумерном случае.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Цецохо В. А., Воронин В. В., Смагин С. И.* О решении задач дифракции потенциалами простого слоя // Докл. АН СССР. 1988. Т. 302, № 2. С. 323–327.
2. *Дмитриев В. И., Захаров Е. В.* О численном решении некоторых интегральных уравнений Фредгольма 1 рода // Вычислительные методы и программирование. М.: МГУ, 1968. Т. 10. С. 49–54.
3. *Воронин В. В., Цецохо В. А.* Численное решение интегрального уравнения 1 рода с логарифмической особенностью // Математические проблемы геофизики. Новосибирск: ВЦ СОАН СССР, 1973. Т. 4. С. 212–228.
4. *Воронин В. В., Цецохо В. А.* Численное решение интегрального уравнения 1 рода с логарифмической особенностью методом интерполяции и коллокации // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1981. Т. 21, № 1. С. 40–53.
5. *Arnold D. N., Wendland W. L.* The convergence of spline collocation for strongly elliptic equations // Numer. Math. 1985. V. 47. P. 317–341.
6. *Цецохо В. А.* К обоснованию метода коллокации решения интегральных уравнений первого рода со слабыми особенностями в случае разомкнутых контуров // Некорректные задачи математической физики и анализа. Новосибирск: Наука, 1984. С. 189–197.
7. *Chandler G. A.* Discrete norms of the convergence of boundary element methods // Proc. Centre Math. Appl. Austral. Nat. Univ. 1991. V. 26. P. 62–78.
8. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977.

Статья поступила 11 января 1999 г.

г. Новосибирск
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН
просп. акад. Лаврентьева, 6, 630090 Новосибирск
vta@omzg.sscc.ru