Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2000. Том 41, № 3

УДК 512.66

О Ker–Coker–ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ В ПОЛУАБЕЛЕВОЙ КАТЕГОРИИ

Я. А. Копылов, В. И. Кузьминов

Аннотация: Изучается Ker-Coker-последовательность

$$\operatorname{Ker}\alpha \xrightarrow{\varepsilon} \operatorname{Ker}\beta \xrightarrow{\zeta} \operatorname{Ker}\gamma \xrightarrow{\delta} \operatorname{Coker}\alpha \xrightarrow{\tau} \operatorname{Coker}\beta \xrightarrow{\theta} \operatorname{Coker}\gamma, \qquad (*)$$

связанная с коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & A_0 & \xrightarrow{\varphi_0} & B_0 & \xrightarrow{\psi_0} & C_0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & {\scriptstyle\beta}\downarrow & & {\scriptstyle\gamma}\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & A_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & B_1 & \xrightarrow{\psi_1} & C_1, & &
\end{array}$$

удовлетворяющей условиям $\psi_0 = \operatorname{coker}\varphi_0$, $\varphi_1 = \ker\psi_1$, в произвольной полуабелевой категории. Исследовано, как влияет предположение о строгости одного из морфизмов α, β или γ на точность последовательности $(*)$ и строгость образующих ее морфизмов. Библиогр. 7.

Д. А. Райков в [1] ввел класс полуабелевых категорий, содержащий кроме всех абелевых категорий многие категории функционального анализа и топологической алгебры. Категории абелевых топологических групп, векторных топологических пространств, банаховых пространств, градуированных модулей над градуированным кольцом, абелевых групп без кручения — типичные примеры полуабелевых категорий. Существенное отличие полуабелевых категорий от абелевых заключается в том, что стандартные леммы о диаграммах, справедливые в абелевых категориях, в полуабелевых категориях выполняются при дополнительных предположениях о морфизмах, образующих диаграмму, которые обычно сводятся к требованию строгости этих морфизмов.

В полуабелевой категории коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A_0 & \xrightarrow{\varphi_0} & B_0 & \xrightarrow{\psi_0} & C_0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & {\scriptstyle\beta}\downarrow & & {\scriptstyle\gamma}\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & A_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & B_1 & \xrightarrow{\psi_1} & C_1 & \longrightarrow & 0,
\end{array} \qquad (1)$$

в которой все морфизмы строгие, а строки точны, соответствует точная Ker-Coker-последовательность

$$0 \to \operatorname{Ker}\alpha \xrightarrow{\varepsilon} \operatorname{Ker}\beta \xrightarrow{\zeta} \operatorname{Ker}\gamma \xrightarrow{\delta} \operatorname{Coker}\alpha \xrightarrow{\tau} \operatorname{Coker}\beta \xrightarrow{\theta} \operatorname{Coker}\gamma \to 0, \qquad (2)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 97–01–00846) и ассоциации INTAS (грант 96–0712).

в которой все морфизмы строгие.

В категории $\mathscr{B}an$, объекты которой — банаховы пространства, а морфизмы — линейные непрерывные операторы, морфизм $\alpha : A \to B$ является строгим тогда и только тогда, когда оператор α нормально разрешим, или, другими словами, тогда и только тогда, когда область значений $R(\alpha)$ оператора α замкнута в B. В этой категории $\operatorname{Ker}\alpha = \{a \in A \mid \alpha(a) = 0\}$, $\operatorname{Coker}\alpha = B/\overline{R(\alpha)}$, последовательность $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ точна, если замыкание $\overline{R(\alpha)}$ области значений оператора α совпадает с $\operatorname{Ker}\beta$.

В связи с вопросом о точности когомологических последовательностей для редуцированных L_p-когомологий де Рама в [2] возникла задача выяснить, что можно сказать о точности последовательности (2) и строгости образующих ее морфизмов, если вместо требования строгости всех трех морфизмов α, β и γ в диаграмме (1) оставить требование строгости одного из них. В [3] эта задача решена для категории $\mathscr{B}an$. В настоящей работе она рассматривается для общего случая полуабелевых категорий.

В работе [4] Бэникэ и Попеску утверждали, что последовательность (2) точна при любых α, β и γ. Как отметил Д. А. Райков, это утверждение ошибочно. Приведем соответствующий пример. Пусть B_0 и B_1 — банаховы пространства, $\beta : B_0 \to B_1$ — непрерывный линейный оператор, для которого $\operatorname{Ker}\beta = 0$, $R(\beta)$ плотно в B_1 и $R(\beta) \neq B_1$. Пусть A_1 — замкнутое подпространство в B_1, $A_1 \neq 0$, $A_1 \cap R(\beta) = 0$, $\varphi_1 : A_1 \to B_1$ — тождественное вложение, $C_1 = A_1/B_1$, $\psi_1 : B_1 \to C_1$ — каноническая проекция, $\gamma = \psi_1\beta$. Тогда диаграмме

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & B_0 & \xrightarrow{\mathrm{id}} & B_0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\beta} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \\
0 & \longrightarrow & A_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & B_1 & \xrightarrow{\psi_1} & C_1 & \longrightarrow & 0
\end{array} \tag{3}$$

соответствует Ker-Coker-последовательность

$$0 \to 0 \to 0 \to 0 \xrightarrow{\delta} A_1 \to 0 \to 0 \to 0,$$

не точная в члене A_1. Ниже мы покажем, что последовательность (2) точна в членах $\operatorname{Ker}\alpha$, $\operatorname{Ker}\beta$, $\operatorname{Coker}\beta$ и $\operatorname{Coker}\gamma$ при любых α, β и γ, во всех членах, если β — строгий морфизм, во всех членах, кроме, может быть, члена $\operatorname{Coker}\alpha$, если α — строгий морфизм, и во всех членах, кроме, может быть, члена $\operatorname{Ker}\gamma$, если γ — строгий морфизм. В диаграмме (3) морфизм α строгий. Если предположить, что пространства, образующие диаграмму (3), рефлексивны, и перейти от диаграммы (3) к диаграмме, образованной сопряженными операторами, то получим пример диаграммы (1), в которой морфизм γ строгий, но Ker-Coker-последовательность не точна в члене $\operatorname{Ker}\gamma$.

Мы будем рассматривать аддитивные категории, в которых выполнена следующая

Аксиома 1. Каждый морфизм α имеет ядро $\operatorname{Ker}\alpha$ и коядро $\operatorname{Coker}\alpha$.

В категории, в которой выполнена аксиома 1, для каждого морфизма α определено его каноническое разложение $\alpha = (\operatorname{im}\alpha)\bar\alpha(\operatorname{coim}\alpha)$, где $\operatorname{im}\alpha = \ker\operatorname{coker}\alpha$, $\operatorname{coim}\alpha = \operatorname{coker}\ker\alpha$. Морфизм α называется *строгим*, если $\bar\alpha$ — изоморфизм.

Будем использовать следующие обозначения: O_c — класс всех строгих морфизмов, M — класс всех мономорфизмов, M_c — класс всех строгих мономорфизмов, P — класс всех эпиморфизмов, P_c — класс всех строгих эпиморфизмов. Будем писать $\alpha \,|\, \beta$, если $\alpha = \ker\beta$ и $\beta = \operatorname{coker}\alpha$.

Лемма 1 [1, 4–6]. *В аддитивной категории, удовлетворяющей аксиоме* 1, *выполнены следующие утверждения*:

1) $\ker\alpha \in M_c$, $\operatorname{coker}\alpha \in P_c$ *для любого морфизма* α*;*

2) $\alpha \in M_c \Longleftrightarrow \alpha = \operatorname{im}\alpha$, $\alpha \in P_c \Longleftrightarrow \alpha = \operatorname{coim}\alpha$*;*

3) *морфизм* α *строгий тогда и только тогда, когда он может быть представлен в виде* $\alpha = \alpha_1\alpha_0$, *где* $\alpha_0 \in P_c$, $\alpha_1 \in M_c$, *для любого такого представления* $\alpha_0 = \operatorname{coim}\alpha$, $\alpha_1 = \operatorname{im}\alpha$*;*

4) *если коммутативный квадрат*

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\alpha} & D \\ {\scriptstyle g}\big\downarrow & & {\scriptstyle f}\big\downarrow \\ A & \xrightarrow{\beta} & B \end{array} \tag{4}$$

коуниверсален, то $f \in M \Longrightarrow g \in M$, $f \in M_c \Longrightarrow g \in M_c$, *если он универсален, то* $g \in P \Longrightarrow f \in P$, $g \in P_c \Longrightarrow f \in P_c$.

Аддитивная категория называется *предабелевой* [4], если в ней выполнена аксиома 1 и следующая

Аксиома 2. Для любого морфизма α морфизм $\bar\alpha$ является мономорфизмом и эпиморфизмом.

Лемма 2. *В произвольной предабелевой категории выполнены следующие утверждения*:

1) $gf \in M_c \Longrightarrow f \in M_c$, $gf \in P_c \Longrightarrow g \in P_c$*;*

2) *если* $f, g \in M_c$ *и* fg *определено, то* $fg \in M_c$, *если* $f, g \in P_c$ *и* fg *определено, то* $fg \in P_c$*;*

3) *если* $fg \in O_c$, $f \in M$, *то* $g \in O_c$, *если* $fg \in O_c$, $g \in P$, *то* $f \in O_c$.

Доказательство утверждений 1 и 2 можно найти в [5]. Докажем утверждение 3. Пусть $fg \in O_c$ и $f \in M$. Тогда $fg = f(\operatorname{im} g)\bar g(\operatorname{coim} g)$. Пусть $h = f(\operatorname{im} g)$. Так как $h \in M$, то $h = (\operatorname{im} h)\bar h$. Имеем $fg = (\operatorname{im} h)\bar h\bar g(\operatorname{coim} g)$ — каноническое разложение морфизма fg. Следовательно, $\bar h\bar g$ — изоморфизм. Пусть $(\bar h\bar g)^{-1} = k$. Тогда $k\bar h\bar g = \mathrm{id}$ и $\bar h\bar g k = \mathrm{id}$. Из второго равенства следует, что $\bar h\bar g k\bar h = \bar h$. Поскольку $\bar h \in M$, то $\bar g k\bar h = \mathrm{id}$. Тем самым $\bar g^{-1} = k\bar h$. Лемма доказана.

Предабелева категория называется *полуабелевой*, если в ней выполнена следующая

Аксиома 3. Если в коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccccc} & & D & & \\ & \nearrow & \gamma\big\downarrow & & \\ A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & C \end{array}$$

$\alpha \mid \beta$ и $\gamma \in M_c$, то $\beta\gamma \in O_c$.

Лемма 3 [5]. *Аддитивная категория, удовлетворяющая аксиоме* 1, *полуабелева тогда и только тогда, когда в ней выполнены следующие утверждения:*

1) *если квадрат* (4) *коуниверсален, то* $f \in P_c \Longrightarrow g \in P_c$;

2) *если квадрат* (4) *универсален, то* $g \in M_c \Longrightarrow f \in M_c$.

Недавно Шнайдерс в [7] определил квазиабелевы категории как аддитивные категории, удовлетворяющие аксиоме 1, в которых выполнены утверждения 1 и 2 леммы 3. Эта лемма показывает, что квазиабелевы категории Шнайдерса — то же самое, что и полуабелевы категории Райкова.

Для произвольного коммутативного квадрата (4) будем обозначать символом $\hat{g} : \operatorname{Ker}\alpha \to \operatorname{Ker}\beta$ морфизм, заданный условием $g(\ker\alpha) = (\ker\beta)\hat{g}$, а символом $\hat{f} : \operatorname{Coker}\alpha \to \operatorname{Coker}\beta$ — морфизм, заданный условием $\hat{f}(\operatorname{coker}\alpha) = (\operatorname{coker}\beta)f$.

Лемма 4 [6, с. 173]. *Для произвольного коуниверсального квадрата* (4) *в аддитивной категории, удовлетворяющей аксиоме* 1, $\hat{g}$ *— изоморфизм.*

Всюду в дальнейшем категория $\mathscr{A}$, в которой мы рассматриваем диаграммы, предполагается полуабелевой.

Пусть квадрат (4) коуниверсален, $\beta = \beta_1\beta_0$, $\beta_0 \in P$, $\beta_1 \in M_c$. Рассмотрим коуниверсальный квадрат

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "h"'] & D \arrow[d, "f"'] \\ F \arrow[r, "\beta_1"] & B. \end{tikzcd} \tag{5}$$

В силу коуниверсальности этого квадрата существует такой морфизм $\alpha_0 : C \to E$, что $\alpha_1\alpha_0 = \alpha$ и $h\alpha_0 = \beta_0 g$.

Лемма 5. *Если* $\beta \in O_c$, *то* $\alpha_0 \in P_c$ *и* $\alpha \in O_c$. *Если* $f \in M_c$ *и* g *— изоморфизм, то* h *— изоморфизм и* $\alpha_0 \in P$.

Доказательство. Квадрат

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\alpha_0"] \arrow[d, "g"'] & E \arrow[d, "h"'] \\ A \arrow[r, "\beta_0"] & F \end{tikzcd}$$

коуниверсален [6, с. 44]. В силу леммы 3 $\alpha_0 \in P_c$, если $\beta_0 \in P_c$. Поэтому $\alpha \in O_c$, если $\beta \in O_c$. Пусть $f \in M_c$ и g — изоморфизм. По лемме 1 $h \in M_c$. Так как $\beta_0 g \in P$ и $\beta_0 g = h\alpha_0$, то $h \in P$. Следовательно, h — изоморфизм и $\alpha_0 = h^{-1}\beta_0 g$ — эпиморфизм. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть квадрат* (4) *коуниверсален. Тогда если* $\beta \in O_c$, *то* $\hat{f} \in M$.

Доказательство. Пусть $\beta = \beta_1\beta_0$, $\beta_0 \in P_c$, $\beta_1 \in M_c$. По лемме 5 $\alpha = \alpha_1\alpha_0$, $\alpha_0 \in P_c$, $\alpha_1 \in M_c$. Поэтому $\alpha_1 = \ker\operatorname{coker}\alpha$, $\beta_1 = \ker\operatorname{coker}\beta$. Пусть $u : X \to \operatorname{Coker}\alpha$ — такой морфизм, что $\hat{f}u = 0$. Рассмотрим коуниверсальный квадрат

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "v"'] & X \arrow[d, "u"'] \\ D \arrow[r, "\operatorname{coker}\alpha"] & \operatorname{Coker}\alpha. \end{tikzcd}$$

Так как $(\operatorname{coker}\beta)fv = \hat{f}u\gamma = 0$ и $\beta_1 = \ker\operatorname{coker}\beta$, найдется такой морфизм $w : Y \to F$, что $\beta_1 w = fv$. В силу коуниверсальности квадрата (5) существует такой морфизм $s : Y \to E$, что $hs = w$, $\alpha_1 s = v$. Так как $u\gamma = (\operatorname{coker}\alpha)\alpha_1 s = 0$ и по лемме 3 $\gamma \in P_c$, то $u = 0$. Установлено, что $\hat{f} \in M$. Лемма доказана.

Лемма 7. *Предположим, что коммутативный квадрат* (4) *коуниверсален,* $\beta, f, (\operatorname{coker} f)\beta \in O_c$, *морфизм* $h : \operatorname{Coker}\beta \to \operatorname{Coker}\hat{\beta}$ *определен условием* $h(\operatorname{coker}\beta) = (\operatorname{coker}\hat{\beta})(\operatorname{coker} f)$. *Тогда* $\hat{f} = \ker h$.

Доказательство. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\alpha} & D \\ {\scriptstyle g_0}\big\downarrow & & {\scriptstyle f_0}\big\downarrow \\ E & \xrightarrow{\gamma} & F \\ {\scriptstyle g_1}\big\downarrow & & {\scriptstyle f_1}\big\downarrow \\ A & \xrightarrow{\beta} & B, \end{array}$$

в которой нижний квадрат коуниверсален, $f_1 f_0 = f$, $f_0 \in P_c$, $f_1 \in M_c$. Тогда $\hat{f} = \hat{f}_1 \hat{f}_0$ и по лемме 6 $\hat{f}_0 \in M$. Так как $\hat{f}_0(\operatorname{coker}\alpha) = (\operatorname{coker}\gamma) f_0 \in P_c$, то $\hat{f}_0 \in P_c$. Следовательно, $\hat{f}_0$ — изоморфизм, и нам достаточно установить, что $\hat{f}_1 = \ker h$.

Поскольку $\hat{\beta}(\operatorname{coker} g) = (\operatorname{coker} f)\beta$ и $(\operatorname{coker} f)\beta \in O_c$ по условию леммы, то по лемме 2 $\hat{\beta} \in O_c$. По лемме 6 $\hat{\beta} \in M$. Значит, $\hat{\beta} \in M_c$ и $\hat{\beta} = \ker\operatorname{coker}\hat{\beta}$.

Пусть $u : X \to \operatorname{Coker}\beta$ — такой морфизм, что $hu = 0$. Рассмотрим коуниверсальный квадрат

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{s} & X \\ {\scriptstyle v}\big\downarrow & & {\scriptstyle u}\big\downarrow \\ B & \xrightarrow{\operatorname{coker}\beta} & \operatorname{Coker}\beta. \end{array} \tag{6}$$

Так как $(\operatorname{coker}\hat{\beta})(\operatorname{coker} f)v = hus = 0$ и $\hat{\beta} = \ker\operatorname{coker}\hat{\beta}$, найдется такой морфизм $n : Y \to \operatorname{Coker} g$, что $\hat{\beta} n = (\operatorname{coker} f)v$.

Рассмотрим коуниверсальный квадрат

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{m} & A \\ {\scriptstyle t}\big\downarrow & & {\scriptstyle \operatorname{coker} g}\big\downarrow \\ Y & \xrightarrow{n} & \operatorname{Coker} g. \end{array}$$

Поскольку $(\operatorname{coker} f)(vt - \beta m) = \hat{\beta} nt - \hat{\beta}(\operatorname{coker} g)m = 0$ и $f_1 = \ker\operatorname{coker} f_1$, найдется такой морфизм $r : Z \to F$, что $f_1 r = vt - \beta m$. Имеем

$$\hat{f}_1(\operatorname{coker}\gamma)r = (\operatorname{coker}\beta) f_1 r = (\operatorname{coker}\beta)(vt - \beta m) = (\operatorname{coker}\beta)vt = ust.$$

По лемме 5 $g_0 \in P_c$, поэтому $g_1 = \ker\operatorname{coker} g$. Ввиду леммы 4 существует такой морфизм $w : E \to Z$, что $mw = g_1$ и $w = \ker t$. Поскольку $f_1 rw = (vt - \beta m)w = -\beta mw = -\beta g_1 = -f_1\gamma$ и $f_1 \in M_c$, то $rw = -\gamma$. По лемме 3 $t \in P_c$, поэтому $t = \operatorname{coker} w$. Так как $(\operatorname{coker}\gamma)rw = -(\operatorname{coker}\gamma)\gamma = 0$ и $t = \operatorname{coker} w$, то найдется такой морфизм $a : Y \to \operatorname{Coker}\gamma$, что $(\operatorname{coker}\gamma)r = at$. Так как $\hat{f}_1 at = \hat{f}_1(\operatorname{coker}\gamma)r = ust$ и $t \in P_c$, имеем $\hat{f}_1 a = us$.

Поскольку квадрат (6) коуниверсален и $\operatorname{im}\beta = \ker\operatorname{coker}\beta$, по лемме 4 найдется такой морфизм $b : \operatorname{Im}\beta \to Y$, что $v\beta = \operatorname{im}\beta$ и $b = \ker s$. Так как $\hat{f}_1 ab = usb = 0$ и $\hat{f}_1 \in M$ по лемме 6, то $ab = 0$. Ввиду леммы 3 $s \in P_c$, следовательно, $s = \operatorname{coker} b$. Поэтому найдется такой морфизм $c : X \to \operatorname{Coker}\gamma$, что $cs = a$. Так как $\hat{f}_1 cs = \hat{f}_1 a = us$ и $s \in P_c$, то $\hat{f}_1 c = u$. Условие $\hat{f}_1 c = u$ определяет морфизм c однозначно, поскольку по лемме 6 $\hat{f}_1 \in M$. Установлено, что $\hat{f}_1 = \ker h$. Лемма доказана.

Лемма 8. *Пусть квадрат*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & D \\ {\scriptstyle \mathrm{id}}\big\downarrow & & {\scriptstyle f}\big\downarrow \\ A & \xrightarrow{\beta} & B \end{array} \tag{7}$$

коммутативен, $f \in M$ *и морфизм* $h : \operatorname{Coker}\beta \to \operatorname{Coker} f$ *определен условием* $\operatorname{coker} f = h(\operatorname{coker}\beta)$. *Тогда* 1) *если* $\beta \in O_c$, *то* $\hat{f} \in M$, 2) *если* $f \in M_c$, *то* $\hat{f} = \ker h$.

Доказательство. Так как $f \in M$, квадрат (7) коуниверсален. Поэтому утверждение 1 следует из леммы 6. Пусть $f \in M_c$. В силу леммы 5 мы не ограничим общности, считая, что $\beta \in M_c$. Но в этом случае утверждение 2 вытекает из леммы 7. Лемма доказана.

Лемма 9. *Пусть в диаграмме*

$$\begin{array}{ccccc} & & D & & \\ & & {\scriptstyle f}\big\downarrow & & \\ A & \xrightarrow{\beta} & B & \xrightarrow{p} & E \\ & & {\scriptstyle q}\big\downarrow & & \\ & & F & & \end{array}$$

$p = \operatorname{coker}\beta$, $q = \operatorname{coker} f$ *и* $f, q\beta \in O_c$. *Тогда* $pf \in O_c$.

Доказательство. Пусть $\beta = \beta_1\beta_0$, где $\beta_1 \in M_c$ и $\beta_0 \in P$. По лемме 2 $q\beta_1 \in O_c$. Рассмотрим коуниверсальный квадрат

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\alpha} & D \\ \big\downarrow & & {\scriptstyle f}\big\downarrow \\ G & \xrightarrow{\beta_1} & B. \end{array}$$

По лемме 7 $\hat{f} \in M_c$. Так как $pf = \hat{f}(\operatorname{coker}\alpha)$ и $\operatorname{coker}\alpha \in P_c$, то $pf \in O_c$. Лемма доказана.

Пусть в коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccccccc} & & A_0 & \xrightarrow{\varphi_0} & B_0 & \xrightarrow{\psi_0} & C_0 & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle \alpha}\big\downarrow & & {\scriptstyle \beta}\big\downarrow & & {\scriptstyle \gamma}\big\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & B_1 & \xrightarrow{\psi_1} & C_1 & & \end{array} \tag{8}$$

$\psi_0 = \operatorname{coker}\varphi_0$, $\varphi_1 = \ker\psi_1$. Как и в случае абелевой категории, диаграмме (8) соответствует Ker-Coker-последовательность

$$\operatorname{Ker}\alpha \xrightarrow{\varepsilon} \operatorname{Ker}\beta \xrightarrow{\zeta} \operatorname{Ker}\gamma \xrightarrow{\delta} \operatorname{Coker}\alpha \xrightarrow{\tau} \operatorname{Coker}\beta \xrightarrow{\theta} \operatorname{Coker}\gamma. \tag{9}$$

В этой последовательности $\varepsilon = \widehat{\varphi}_0$, $\zeta = \hat{\psi}_0$, $\tau = \widehat{\varphi}_1$, $\theta = \hat{\psi}_1$. Связывающий морфизм δ строится следующим образом. Пусть

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{s} & \operatorname{Ker}\gamma \\ {\scriptstyle u}\big\downarrow & & {\scriptstyle \ker\gamma}\big\downarrow \\ B_0 & \xrightarrow{\psi_0} & C_0 \end{array} \tag{10}$$

— коуниверсальный квадрат, а

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\operatorname{coker}\alpha"'] & B_1 \arrow[d, "v"] \\ \operatorname{Coker}\alpha \arrow[r, "t"] & Y \end{tikzcd} \tag{11}$$

— универсальный квадрат. Используя лемму 4, легко доказать существование такого морфизма $\delta : \operatorname{Ker}\gamma \to \operatorname{Coker}\alpha$, что $t\delta s = v\beta u$. Это условие определяет морфизм δ однозначно при выбранных квадратах (10) и (11) и позволяет доказать естественность морфизма δ. Из этой естественности следует, что δ определен однозначно уже после выбора морфизмов $\ker\gamma$ и $\operatorname{coker}\alpha$.

Пусть морфизм β из диаграммы (8) представлен в виде $\beta = \beta_1\beta_0$, $\beta_0 : B_0 \to B$, $\beta_1 : B \to B_1$. Рассмотрим коуниверсальный квадрат

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\alpha_1"'] & B \arrow[d, "\beta_1"] \\ A_1 \arrow[r, "\varphi_1"] & B_1. \end{tikzcd}$$

Пусть $\psi = \operatorname{coker}\varphi$, $\psi : B \to C$. По лемме 1 $\varphi \in M_c$ и поэтому $\varphi = \ker\psi$. Найдутся морфизмы $\alpha_0 : A_0 \to A$, $\gamma_0 : C_0 \to C$, $\gamma_1 : C \to C_1$, для которых $\alpha_1\alpha_0 = \alpha$ и диаграмма

$$\begin{tikzcd} & A_0 \arrow[r, "\varphi_0"] \arrow[d, "\alpha_0"'] & B_0 \arrow[r, "\psi_0"] \arrow[d, "\beta_0"'] & C_0 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_0"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\alpha_1"'] & B \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\beta_1"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_1"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "\varphi_1"] & B_1 \arrow[r, "\psi_1"] & C_1 & \end{tikzcd} \tag{12}$$

коммутативна. Так как $\gamma_1\gamma_0\psi_0 = \psi_1\beta_1\beta_0 = \psi_1\beta = \gamma\psi_0$ и $\psi_0 \in P_c$, то $\gamma_1\gamma_0 = \gamma$.

Лемма 10. *Если* $\beta_0 \in P$, $\beta_1 \in M_c$, *морфизм* $\widehat{\alpha}_1 : \operatorname{Coker}\alpha_0 \to \operatorname{Coker}\alpha$ *определен условием* $(\operatorname{coker}\alpha)\alpha_1 = \widehat{\alpha}_1(\operatorname{coker}\alpha_0)$, *а морфизм* $\tau : \operatorname{Coker}\alpha \to \operatorname{Coker}\beta$ *— условием* $\tau(\operatorname{coker}\alpha) = (\operatorname{coker}\beta)\varphi_1$, *то* $\widehat{\alpha}_1 = \ker\tau$.

Доказательство. По лемме 1 $\alpha_1 \in M_c$. Поэтому $\operatorname{im}\alpha = \alpha_1(\operatorname{im}\alpha_0)$ и $\operatorname{coker}\alpha = \operatorname{coker}(\alpha_1(\operatorname{im}\alpha_0))$. Коммутативный квадрат

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Im}\alpha_0 \arrow[r, "\operatorname{im}\alpha_0"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & A \arrow[d, "\alpha_1"] \\ \operatorname{Im}\alpha_0 \arrow[r, "\alpha_1(\operatorname{im}\alpha_0)"] & B_1 \end{tikzcd}$$

удовлетворяет условиям леммы 8. По этой лемме $\widehat{\alpha}_1 = \ker h$, где $h : \operatorname{Coker}\alpha \to \operatorname{Coker}\alpha_1$ — морфизм, определенный условием $h(\operatorname{coker}\alpha) = \operatorname{coker}\alpha_1$. Пусть морфизм $\widehat{\varphi}_1 : \operatorname{Coker}\alpha_1 \to \operatorname{Coker}\beta_1$ определен условием $\widehat{\varphi}_1(\operatorname{coker}\alpha_1) = (\operatorname{coker}\beta_1)\varphi_1$. Так как $\tau(\operatorname{coker}\alpha) = (\operatorname{coker}\beta)\varphi_1 = (\operatorname{coker}\beta_1)\varphi_1 = \widehat{\varphi}_1(\operatorname{coker}\alpha_1) = \widehat{\varphi}_1 h(\operatorname{coker}\alpha)$, то $\tau = \widehat{\varphi}_1 h$. По лемме 5 $\widehat{\varphi}_1 \in M$. Поэтому $\ker\tau = \ker h = \widehat{\alpha}_1$. Лемма доказана.

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} & A_0 \arrow[r, "\varphi_0"] \arrow[d, "\alpha_0"'] & B_0 \arrow[r, "\psi_0"] \arrow[d, "\beta_0"'] & C_0 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_0"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\varphi"] & B \arrow[r, "\psi"] & C, & \end{tikzcd} \tag{13}$$

в которой $\psi_0 = \operatorname{coker}\varphi_0$, $\varphi = \ker\psi$. Пусть $\bar{\bar{\delta}} : \operatorname{Ker}\gamma_0 \to \operatorname{Coker}\alpha_0$ — связывающий морфизм для диаграммы (13).

Лемма 11. *Если в диаграмме* (13) $\beta_0 \in P_c$, *то* $\bar{\bar{\delta}} \in P_c$.

Доказательство. Рассмотрим коуниверсальный квадрат

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "s"] \arrow[d, "u"'] & \operatorname{Ker}\gamma_0 \arrow[d, "\ker\gamma_0"'] \\ B_0 \arrow[r, "\psi_0"] & C_0 \end{tikzcd} \tag{14}$$

и универсальный квадрат

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\operatorname{coker}\alpha_0"'] & B \arrow[d, "v"'] \\ \operatorname{Coker}\alpha_0 \arrow[r, "t"] & Y. \end{tikzcd}$$

Так как $\psi\beta_0 u = \gamma_0(\ker\gamma_0)s = 0$, существует такой морфизм $h : X \to A$, что $\varphi h = \beta_0 u$. Покажем, что квадрат

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "h"'] & B_0 \arrow[d, "\beta_0"'] \\ A \arrow[r, "\varphi"] & B \end{tikzcd} \tag{15}$$

коуниверсален. Пусть $m : M \to A$ и $n : M \to B_0$ — такие морфизмы, что $\varphi m = \beta_0 n$. Так как $\gamma_0\psi_0 n = \psi\beta_0 n = \psi\varphi m = 0$, существует такой морфизм $r : M \to \operatorname{Ker}\gamma_0$, что $(\ker\gamma_0)r = \psi_0 n$. Квадрат (14) коуниверсален, а значит, найдется такой морфизм $p : M \to X$, что $sp = r$ и $up = n$. Далее, $\varphi hp = \beta_0 up = \beta_0 n = \varphi m$ и $\varphi \in M_c$. Поэтому $hp = m$. Условие $up = n$ определяет морфизм p однозначно, поскольку $u \in M_c$ по лемме 1. Установлено, что квадрат (15) коуниверсален.

По лемме 3 $h \in P_c$, поэтому $(\operatorname{coker}\alpha_0)h \in P_c$. Так как $t\bar{\bar{\delta}}s = v\beta_0 u = v\varphi h = t(\operatorname{coker}\alpha_0)h$ и $t \in M_c$ по лемме 3, имеем $\bar{\bar{\delta}}s = (\operatorname{coker}\alpha_0)h \in P_c$. Следовательно, $\bar{\bar{\delta}} \in P_c$. Лемма доказана.

Теорема 1. *Если в диаграмме* (8) $\beta \in O_c$, *то в последовательности* (9) $\delta \in O_c$ *и эта последовательность точна в членах* $\operatorname{Ker}\gamma$ *и* $\operatorname{Coker}\alpha$.

Доказательство. Пусть $\beta = \beta_1\beta_0$, $\beta_0 \in P_c$, $\beta_1 \in M_c$. Рассмотрим диаграмму (12), соответствующую этому разложению морфизма β. По лемме 6 $\gamma_1 \in M$ и поэтому $\ker\gamma = \ker\gamma_0$. В силу естественности связывающего морфизма $\delta = \widehat{\alpha}_1\bar{\bar{\delta}}$. По лемме 11 $\bar{\bar{\delta}} \in P_c$, и по лемме 10 $\widehat{\alpha}_1 = \ker\tau$. Следовательно, $\delta \in O_c$, и последовательность (9) точна в члене $\operatorname{Coker}\alpha$.

Диаграмму (8) можно рассматривать как диаграмму такого же вида в категории $\mathscr{A}^{\mathrm{op}}$. В силу единственности морфизма δ, удовлетворяющего условию

$t\delta s = v\beta u$, морфизм δ совпадает со связывающим морфизмом для диаграммы (8) в категории $\mathscr{A}^{\mathrm{op}}$. Поэтому совпадают последовательности (9), соответствующие диаграмме (8) в категориях $\mathscr{A}$ и $\mathscr{A}^{\mathrm{op}}$. Применяя уже доказанную часть теоремы к последовательности (9) в категории $\mathscr{A}^{\mathrm{op}}$, получаем точность последовательности (9) в члене $\operatorname{Ker}\gamma$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Если в диаграмме* (8) $\varphi_0 \in O_c$, *то последовательность* (9) *точна в члене* $\operatorname{Ker}\beta$ *и* $\varepsilon \in O_c$, *если* $\psi_1 \in O_c$, *то она точна в члене* $\operatorname{Coker}\beta$ *и* $\theta \in O_c$.

Доказательство. Предположим сначала, что $\varphi_0 = \ker\psi_0$, и докажем в этом случае, что $\varepsilon = \ker\zeta$. Так как $(\ker\beta)\varepsilon = \varphi_0(\ker\alpha)$ и $\varphi_0(\ker\alpha) \in M_c$, то $\varepsilon \in M_c$. Пусть $u : X \to \operatorname{Ker}\beta$ — такой морфизм, что $\zeta u = 0$. Поскольку $\psi_0(\ker\beta)u = (\ker\gamma)\zeta u = 0$, существует такой морфизм $v : X \to A_0$, что $\varphi_0 v = (\ker\beta)u$. Имеем $\varphi_1\alpha v = \beta\varphi_0 v = \beta(\ker\beta)u = 0$ и $\varphi_1 \in M_c$. Следовательно, $\alpha v = 0$, и поэтому существует морфизм $w : X \to \operatorname{Ker}\alpha$, для которого $(\ker\alpha)w = v$. Так как $(\ker\beta)\varepsilon w = \varphi_0(\ker\alpha)w = \varphi_0 v = (\ker\beta)u$, то $\varepsilon w = u$. Условие $\varepsilon w = u$ задает морфизм w однозначно, поскольку $\varepsilon \in M_c$. Установлено, что $\varepsilon = \ker\zeta$.

Пусть теперь морфизм φ_0 произволен. Представим его в виде композиции $\varphi_0 = \varphi_0''\varphi_0'$, $\varphi_0' \in P$, $\varphi_0'' \in M_c$, $\varphi_0' : A_0 \to A_0'$, $\varphi_0'' : A_0' \to B_0$. Поскольку $\varphi_0'' = \ker\psi_0$, существует такой морфизм $\alpha' : A_0' \to A_1$, что $\varphi_1\alpha' = \beta\varphi_0''$. Так как $\varphi_1\alpha'\varphi_0' = \beta\varphi_0 = \varphi_1\alpha$, то $\alpha'\varphi_0' = \alpha$. Квадрат

$$\begin{array}{ccc} A_0 & \xrightarrow{\alpha} & A_1 \\ {\scriptstyle \varphi_0'}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \\ A_0' & \xrightarrow{\alpha'} & A_1 \end{array} \qquad (16)$$

универсален, ибо $\varphi_0' \in P$. Морфизм φ_0' индуцирует морфизм $\widehat{\varphi}_0{}' : \operatorname{Ker}\alpha \to \operatorname{Ker}\alpha'$, а морфизм φ_0'' — морфизм $\widehat{\varphi}_0{}'' : \operatorname{Ker}\alpha' \to \operatorname{Ker}\beta$, причем $\varepsilon = \widehat{\varphi}_0{}''\widehat{\varphi}_0{}'$. По доказанному частному случаю теоремы имеем $\widehat{\varphi}_0{}'' = \ker\zeta$.

Предположим теперь, что $\varphi_0 \in O_c$. Тогда $\varphi_0' \in P_c$. По утверждению, двойственному п. 2 леммы 8, заключаем, что $\widehat{\varphi}_0{}' \in P_c$. Следовательно, $\varepsilon \in O_c$ и $\operatorname{im}\varepsilon = \ker\zeta$. Первое утверждение теоремы доказано, второе утверждение следует из первого по двойственности. Теорема доказана.

Теорема 3. *Если в диаграмме* (8) $\alpha \in O_c$, *то в последовательности* (9) $\zeta \in O_c$ *и она точна в членах* $\operatorname{Ker}\beta$ *и* $\operatorname{Ker}\gamma$. *Если* $\gamma \in O_c$, *то в последовательности* (9) $\tau \in O_c$ *и она точна в членах* $\operatorname{Coker}\beta$ *и* $\operatorname{Coker}\alpha$.

Доказательство. Представим морфизм β в виде $\beta = \beta_1\beta_0$, $\beta_0 \in P_c$, $\beta_1 \in M$, и рассмотрим диаграмму (12), соответствующую этому представлению морфизма β. По лемме 1 $\alpha_1 \in M$, и по лемме 6 $\gamma_1 \in M$. Следовательно, $\ker\alpha = \ker\alpha_0$, $\ker\beta = \ker\beta_0$, $\ker\gamma = \ker\gamma_0$. Ker-Coker-последовательности, соответствующие диаграммам (8) и (13), связаны между собой следующей коммутативной диаграммой:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \operatorname{Ker}\alpha_0 & \xrightarrow{\bar\varepsilon} & \operatorname{Ker}\beta_0 & \xrightarrow{\bar\zeta} & \operatorname{Ker}\gamma_0 & \xrightarrow{\bar\delta} & \operatorname{Coker}\alpha_0 & \to & 0 & \to & 0 \\ \| & & \| & & \| & & {\scriptstyle \widehat{\alpha}_1}\big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \operatorname{Ker}\alpha & \xrightarrow{\varepsilon} & \operatorname{Ker}\beta & \xrightarrow{\zeta} & \operatorname{Ker}\gamma & \xrightarrow{\delta} & \operatorname{Coker}\alpha & \xrightarrow{\tau} & \operatorname{Coker}\beta & \xrightarrow{\theta} & \operatorname{Coker}\gamma. \end{array} \qquad (17)$$

По лемме 8 $\widehat{\alpha}_1 \in M$. Поэтому $\ker\bar{\delta} = \ker\delta$. По теореме 1 верхняя строка диаграммы (17) точна в члене $\operatorname{Ker}\gamma_0$. Поэтому нижняя строка точна в члене $\operatorname{Ker}\gamma$.

Пусть $\varphi_0 = \varphi_0''\varphi_0'$, $\varphi_0' \in P$, $\varphi_0' \in M_c$. В доказательстве теоремы 2 установлено, что $\varepsilon = \widehat{\varphi}_0{}''\widehat{\varphi}_0{}'$, $\widehat{\varphi}_0{}'' = \ker\zeta$. По утверждению, двойственному п. 1 леммы 8, примененному к диаграмме (16), заключаем, что $\widehat{\varphi}_0{}' \in P$. Значит, последовательность (9) точна в члене $\operatorname{Ker}\beta$.

Имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & \operatorname{Ker}\beta \arrow[r, "\zeta"] \arrow[d, "\ker\beta"'] & \operatorname{Ker}\gamma \arrow[d, "\ker\gamma"'] & \\
A_0 \arrow[r, "\varphi_0"] \arrow[d, "\alpha_0"'] & B_0 \arrow[r, "\psi_0"] \arrow[d, "\beta_0"'] & C_0 \arrow[r] & 0 \\
A \arrow[r, "\varphi"] & B, & &
\end{tikzcd}$$

в которой $\psi_0 = \operatorname{coker}\varphi_0$, $\beta_0 = \operatorname{coker}\ker\beta$. Так как $\alpha \in O_c$ и $\alpha = \alpha_1\alpha_0$, $\alpha_1 \in M$, по лемме 2 $\alpha_0 \in O_c$. Но тогда $\varphi\alpha_0 \in O_c$, и поэтому $\beta_0\varphi_0 \in O_c$. По лемме 9 $\psi_0(\ker\beta) \in O_c$. По лемме 2 $\zeta \in O_c$. Первое утверждение теоремы доказано. Второе утверждение двойственно первому. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Райков Д. А.* Полуабелевы категории // Докл. АН СССР. 1969. Т. 188, № 5. С. 1006–1009.
2. *Гольдштейн В. М., Кузьминов В. И., Шведов И. А.* Редуцированные L_p-когомологии искривленных цилиндров // Сиб. мат. журн. 1990. Т. 31, № 5. С. 10–23.
3. *Кузьминов В. И., Шведов И. А.* Гомологические аспекты теории банаховых комплексов // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 4. С. 893–904.
4. *Bănică C., Popescu N.* Sur le catégories preábéliennes // Rev. Roumaine Math. Pure Appl. 1965. V. 10, N 5. P. 621–635.
5. *Кузьминов В. И., Черевикин А. Ю.* О полуабелевых категориях // Сиб. мат. журн. 1972. Т. 13, № 6. С. 1284–1294.
6. *Букур И., Деляну А.* Введение в теорию категорий и функторов. М.: Мир, 1972.
7. *Schneiders J. P.* Quasi-abelian categories and sheaves // Memoirs de la SMF. 1999. V. 76.

Статья поступила 8 февраля 2000 г.

г. Новосибирск
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
yakop@math.nsc.ru, kuzminov@math.nsc.ru