POLYNÔMES DE DUMONT-FOATA GÉNÉRALISÉS

par

Arthur RANDRIANARIVONY (*)

Abstract. — We study a sequence of polynomials with six variables which is an extension of Dumont-Foata polynomials. In particular we prove the three recent Dumont conjectures on the ternary symmetries related to Genocchi numbers [D].

1 Introduction

Les nombres de Genocchi $(G_{2n})_{n\geq 1}$ peuvent être définis par la fonction génératrice exponentielle :

$$G(t) = \frac{2t}{e^t+1} = t + \sum_{n\geq 1} (-1)^n G_{2n} \frac{t^{2n}}{(2n)!}.$$

Dumont et Foata ont donné un raffinement de ces nombres [DF]. Ils ont introduit les polynômes $F_n(x,y,z)$ dits de Dumont-Foata et définis par la récurrence :

$$(1) \qquad \begin{cases} F_1(x,y,z)=1, \\ F_n(x,y,z)=(x+y)(x+z)F_{n-1}(x+1,y,z) - x^2 F_{n-1}(x,y,z) \qquad (n\geq 2) \end{cases}$$

et en ont donné une interprétation combinatoire en termes d'escaliers.

Rappelons qu'un escalier F de taille n est le graphe d'une application surjective f de $\{1,2,\ldots,2n\}$ sur $\{2,4,\ldots,2n\}$ et excédante, *i.e*, $f(k)\geq k$ pour tout k. Un point $(k,f(k))$ de F est dit *maximal* si $f(k)=2n$, *fixe* (resp. *surfixe, saillant*) s'il n'est maximal et si $f(k)=k$ (resp. $f(k)=k+1$, pour tout $j<i$, $f(j)<f(i)$). On note $\max(F)$ le nombre de points maximaux de F à l'exception des points $(2n-1,2n)$ et $(2n,2n)$, $\mathrm{fix}(F)$ (resp. $\mathrm{sur}(F), \mathrm{sai}(F)$) le nombre de ses points fixes (resp. surfixes, saillants).

Théorème 1 (Dumont-Foata). — *On a, pour tout $n\geq 1$, l'identité :*

$$F_n(x,y,z) = \sum_F x^{\max(F)} y^{\mathrm{fix}(F)} z^{\mathrm{sai}(F)}$$

où la sommation est étendue à tous les escaliers F de taille n.

De plus, $F_n(x,y,z)$ est symétrique en les variables x,y,z et que $F_n(1,1,1)=G_{2n+2}$.

Récemment Han Guo Niu [H] a trouvé plusieurs interprétations de ces polynômes. On lui doit d'avoir établi le théorème suivant.

(*) Avec le concours du programme des Communautés Européennes en Combinatoire Algébrique, 1994-95.

THÉORÈME 2. — *On a :*

$$F_n(x,y,z)=\sum_F x^{\max(F)}y^{\mathrm{fix}(F)}z^{\mathrm{sur}(F)}$$

où la sommation est étendue à tous les escaliers F de taille n.

Dans ce travail, nous allons étudier une suite de polynômes $\Gamma_n(x,y,z,\overline{x},\overline{y},\overline{z})$ qui raffinent les $F_n(x,y,z)$.

Étant donné un escalier F de taille n, un point $(k,f(k))$ de F est dit doublé s'il existe $j\neq k$ tel que $f(j)=f(k)$. On note respectivement $\mathrm{mi}(F)$ et $\mathrm{mp}(F)$) le nombre de ses points maximaux d'abscisses impaires et maximaux d'abscisses paires à l'exception des points $(2n-1,2n)$ et $(2n,2n)$, $\mathrm{fd}(F)$ et $\mathrm{fnd}(F)$ le nombre de ses points fixes doublés et fixes non doublés, $\mathrm{sd}(F)$ et $\mathrm{snd}(F)$ le nombre de ses points surfixes doublés et surfixes non doublés. On doit à DUMONT [D] d'avoir défini combinatoirement les polynômes $\Gamma_n(x,y,z,\overline{x},\overline{y},\overline{z})$ par

$$\Gamma_n(x,y,z,\overline{x},\overline{y},\overline{z})=\sum x^{\mathrm{mi}(F)}y^{\mathrm{fd}(F)}z^{\mathrm{snd}(F)}\overline{x}^{\mathrm{mp}(F)}\overline{y}^{\mathrm{fnd}(F)}\overline{z}^{\mathrm{sd}(F)}$$

où la sommation est étendue à tous les escaliers F de taille n.

Considérons à présent la fraction continue formelle suivante :

$$\Gamma(x,y,z,\overline{x},\overline{y},\overline{z};t)=\cfrac{t}{1-(x\overline{y}+y\overline{z}+z\overline{x})t-\cfrac{(\overline{x}+y)(\overline{y}+z)(\overline{z}+x)t^2}{\ddots}}$$

dont le cœfficient situé sous le $(n+1)$-ième trait de fraction est

$$1-[(x+n)(\overline{y}+n)+(y+n)(\overline{z}+n)+(z+n)(\overline{x}+n)-n(n+1)]t \\ -\cfrac{(n+1)(\overline{x}+y+n)(\overline{y}+z+n)(\overline{z}+x+n)t^2}{\ddots}.$$

L'objet principal de cet article est de démontrer les trois théorèmes suivants.

THÉORÈME 3. — *Les polynômes $\Gamma_n(x,y,z,\overline{x},\overline{y},\overline{z})$ sont définis par la récurrence :*

$$\text{(2)}\quad\begin{cases}\Gamma_1(x,y,z,\overline{x},\overline{y},\overline{z})=1,\\ \Gamma_n(x,y,z,\overline{x},\overline{y},\overline{z})=(x+\overline{z})(y+\overline{x})\Gamma_{n-1}(x+1,y,z,\overline{x}+1,\overline{y},\overline{z})\\ \qquad\qquad+[x(\overline{y}-y)-\overline{x}(\overline{z}-z)-x\overline{x}]\Gamma_{n-1}(x,y,z,\overline{x},\overline{y},\overline{z}),\quad(n\geq 2).\end{cases}$$

Théorème 4. — *On a la représentation suivante* :

$$\Gamma(x,y,z,\overline{x},\overline{y},\overline{z};t) = \sum_{n\geq 1} \frac{(x+\overline{z})_{n-1}(y+\overline{x})_{n-1}t^n}{\prod_{o\leq k\leq n-1}[1-\big((x+k)(\overline{y}-y)-(\overline{x}+k)(\overline{z}-z)-(x+k)(\overline{x}+k)\big)t]}$$

où on note $(a)_o = 1$ *et, pour* $j\geq 1,\ (a)_j = a(a+1)(a+2)\cdots(a+j-1)$.

Théorème 5 (2-ième conjecture de Dumont). — *Le développement selon les puissances croissantes de la fraction continue* $\Gamma(x,y,z,\overline{x},\overline{y},\overline{z};t)$ *est la série génératrice ordinaire des polynômes* $\Gamma_n(x,y,z,\overline{x},\overline{y},\overline{z})$.

Remarque : Par un calcul analogue à celui de Carlitz [C2], on déduit du Théorème 4 la formule explicite suivante :

$$\Gamma_n(x,y,z,\overline{x},\overline{y},\overline{z}) = \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{(l-1)!}(x+1)_{l-1}(y+1)_{l-1}\sum_{k=0}^{l-1}(-1)^k\binom{l-1}{k}\frac{(x+y-z+\overline{x}-\overline{y}+\overline{z}+2k)}{(x+y-z+\overline{x}-\overline{y}+\overline{z}+k)_l}{}^{n}_{k}$$

où $\quad {}_k = \big((x+k)(\overline{y}-y)-(\overline{x}+k)(\overline{z}-z)-(x+k)(\overline{x}+k)\big).$

D'abord, le Théorème 5 nous fournit les propriétés des polynômes Γ_n suivantes :

Corollaire 6. — *Pour toute permutation circulaire* (u,v,w) *de* (x,y,z), *on a les identités* :

$$\Gamma_n(x,y,z,\overline{x},\overline{y},\overline{z}) = \Gamma_n(u,v,w,\overline{u},\overline{v},\overline{w}) = \Gamma_n(\overline{u},\overline{w},\overline{v},u,w,v).$$

On voit que $F_n(x,y,z) = \Gamma_n(x,y,z,x,y,z)$ est symétrique en x, y et z. En outre, on tire également du Théorème 5 la 1-ière conjecture de Dumont suivante.

Corollaire 7. — *La série génératrice ordinaire des polynômes* $F_n(x,y,z)$ *admet le développement en fraction continue formelle* :

$$\sum_{n\geq 1} F_n(x,y,z)t^n = \cfrac{t}{1-(xy+yz+zx)t-\cfrac{(x+y)(y+z)(z+x)t^2}{\ddots}}$$

dont le cœfficient situé sous le $(n+1)$*-ième trait de fraction est*

$$1-[(x+n)(y+n)+(y+n)(z+n)+(z+n)(x+n)-n(n+1)]t - \cfrac{(n+1)(x+y+n)(y+z+n)(z+x+n)t^2}{\ddots}.$$

Sa 3-ième conjecture résulte des Théorèmes 4 et 5.

COROLLAIRE 8 (3-ième conjecture). — *Soit $G_n(x,y,z)$ les polynômes définis combinatoirement par*

$$G_n(x,y,z) = \sum x^{\mathrm{mi}(F)} y^{\mathrm{fd}(F)} z^{\mathrm{snd}(F)}$$

où la sommation est étendue à tous les escaliers F de taille n.

Alors la série génératrice ordinaire de ces polynômes admet la représentation suivante :

$$G(x,y,z;t) = \sum_{n\geq 1} \frac{(x+1)_{n-1}(y+1)_{n-1}t^n}{\prod_{0\leq k\leq n-1}[1+((x+k)(y+k)-(k+1)(z-1))t]}.$$

Comme autre cas particulier, en remplaçant $y, z, \overline{y}, \overline{z}$ par 1 puis $\overline{x}$ par y dans le Théorème 3, nous retrouvons les polynômes de Dumont à deux variables $B_n(x,y)$ étudiés dans [DR2]. En outre, grce aux propriétés de la fraction continue formelle $\Gamma(x,y,z,\overline{x},\overline{y},\overline{z};t)$ et compte-tenu du Théorème 5, on a les identités suivantes :

$$\begin{aligned} B_n(x,y) &= \Gamma_n(x,1,1,y,1,1) = \Gamma_n(1,x,1,1,y,1) \\ &= \Gamma_n(1,1,x,1,1,y) = \Gamma_n(x,y,1,1,1,1) = \Gamma_n(1,1,1,x,y,1). \end{aligned}$$

Ce qui nous donne le résultat suivant.

COROLLAIRE 9. — *On a, pour tout $n \geq 1$, les identités* :

$$\begin{aligned} B_n(x,y) &= \sum x^{\mathrm{mi}(F)} y^{\mathrm{mp}(F)} = \sum x^{\mathrm{fd}(F)} y^{\mathrm{fnd}(F)} = \sum x^{\mathrm{sd}(F)} y^{\mathrm{snd}(F)} \\ &= \sum x^{\mathrm{mi}(F)} y^{\mathrm{fd}(F)} = \sum x^{\mathrm{mp}(F)} y^{\mathrm{fnd}(F)} \end{aligned}$$

où les sommations sont étendues à tous les escaliers F de taille n.

Remarque : La 1-ière égalité a été déjà établie dans [DR2].

D'autres interprétations combinatoires pour les nombres de Genocchi G_{2n} et les nombres de Genocchi médians H_{2n+1} s'en déduisent. Rappelons tout d'abord que les nombres de Genocchi médians H_{2n+1} sont définis comme suit :
Soit $(g_{k,n})$ la matrice de Seidel associée aux nombres de Genocchi G_{2n} , *i.e*, les $g_{k,n}$ sont définis par la récurrence :

$$\begin{cases} g_{0,0}=0, \quad g_{0,1}=1, \quad g_{0,2n}=(-1)^n G_{2n}, \quad g_{0,2n+1}=0, \qquad (n\geq 1) \\ g_{k,n}=g_{k-1,n}+g_{k-1,n+1}, \qquad (k\geq 1). \end{cases}$$

On définit les nombres de Genocchi médians par $H_{2n+1}=(-1)^n g_{n,n+1}$ [B].

Considérons alors les polynômes de Gandhi $Q_n(x)$ et de Dumont $H_n(x)$ définis par

$$\begin{cases} Q_0(x)=1, \\ Q_n(x)=x^2 Q_{n-1}(x+1)-(x-1)^2 Q_{n-1}(x), \qquad (n\geq 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_1(x)=x, \\ H_n(x)=x(x+1)[H_{n-1}(x+1)-H_{n-1}(x)], \qquad (n \geq 2). \end{cases}$$

En comparant avec la récurrence définissant les $B_n(x,y)$, on a :

$$Q_{n-1}(x) = B_n(x-1, x-1) \quad \text{et} \quad H_{n+1}(x) = x(x+1)B_n(x, x+1) \qquad (n \geq 1).$$

Gandhi a conjecturé que $Q_n(1) = G_{2n+2}$ et cette conjecture a été démontrée par Carlitz [C1], et par Riordan et Stein [RS]. D'autre part, nous avons démontré dans [DR1] que $H_n(1) = H_{2n+1}$. En appliquant ainsi le corollaire 9 et en remarquant que $2B_n(1,2) = B_{n+1}(0,1)$, on obtient les interprétations suivantes.

Corollaire 10

(*i*) *G_{2n} est égal au nombre d'escaliers de taille n sans point fixe* (*resp. surfixe*).

(*ii*) *H_{2n+1} est égal au nombre d'escaliers de taille n dont tous les points fixes* (*resp. surfixes*)*sont non doublés.*

(*iii*) *H_{2n+1} est égal au nombre d'escaliers de taille n dont tous les points maximaux, à l'exception du point* $(2n-1, 2n)$ (*resp.* $(2n, 2n)$) *sont d'abscisses paires* (*resp. impaires*).

Nous démontrons les théorèmes 3, 4 et 5 respectivement aux paragraphes 2, 3 et 4.

2. Caractérisation des polynômes $\Gamma_n(x, y, z, \overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$.

Notons E_n l'ensemble de tous les escaliers de taille n et considérons l'application restriction $r : \mathrm{E}_n \to \mathrm{E}_{n-1}$, $F \mapsto G = r(F)$ telle que, pour tout $i \in [2n-2], g(i) = inf(f(i), 2n-2)$.

Si i (resp. p) est le nombre de points maximaux d'abscisses impaires (resp. paires) de F, le nombre l (resp. m) de points maximaux d'abscisses impaires (resp. paires) de G est au moins égal à $i-1$ (resp. $p-1$) et de plus $l+m \geq i+p-1$. D'autre part, le nombre de points fixes (resp. surfixes) de G dépend de la position du point d'abscisse $2n-2$ (resp. $2n-3$) de F (voir Fig. 1, par exemple). 6 cas sont à distinguer.

(1) Si $(2n-3, 2n)$ et $(2n-2, 2n)$ sont des points maximaux de F, alors

$$\begin{gathered} \mathrm{mi}(G) \geq \mathrm{mi}(F) - 1,\ \mathrm{fd}(G) = \mathrm{fd}(F),\ \mathrm{snd}(G) = \mathrm{snd}(F), \\ \mathrm{mp}(G) \geq \mathrm{mp}(F) - 1,\ \mathrm{mi}(G) + \mathrm{mp}(G) \geq \mathrm{mi}(F) + \mathrm{mp}(F) - 1, \\ \mathrm{fnd}(G) = \mathrm{fnd}(F),\ \mathrm{sd}(G) = \mathrm{sd}(F). \end{gathered}$$

(2) Si $(2n-3, 2n-2)$ et $(2n-2, 2n-2)$ sont respectivement des points surfixe et fixe de F, alors

$$\begin{gathered} \mathrm{mi}(G) \geq \mathrm{mi}(F),\ \mathrm{fd}(G) = \mathrm{fd}(F) - 1,\ \mathrm{snd}(G) = \mathrm{snd}(F), \\ \mathrm{mp}(G) \geq \mathrm{mp}(F),\ \mathrm{fnd}(G) = \mathrm{fnd}(F),\ \mathrm{sd}(G) = \mathrm{sd}(F) - 1. \end{gathered}$$

(3) Si $(2n-3, 2n)$ est un point maximal de F et $(2n-2, 2n-2)$ un point fixe non doublé, alors

$$\mathrm{mi}(G) = \mathrm{mi}(F) - 1,\ \mathrm{fd}(G) = \mathrm{fd}(F),\ \mathrm{snd}(G) = \mathrm{snd}(F),$$
$$\mathrm{mp}(G) = \mathrm{mp}(F),\ \mathrm{fnd}(G) = \mathrm{fnd}(F) - 1,\ \mathrm{sd}(G) = \mathrm{sd}(F).$$

(4) Si $(2n-3, 2n)$ est un point maximal de F et $(2n-2, 2n-2)$ un point fixe doublé, alors

$$\mathrm{mi}(G) \geq \mathrm{mi}(F) - 1,\ \mathrm{fd}(G) = \mathrm{fd}(F) - 1,\ \mathrm{snd}(G) = \mathrm{snd}(F),$$
$$\mathrm{mp}(G) \geq \mathrm{mp}(F),\ \mathrm{mi}(G) + \mathrm{mp}(G) \geq \mathrm{mi}(F) + \mathrm{mp}(F),$$
$$\mathrm{fnd}(G) = \mathrm{fnd}(F),\ \mathrm{sd}(G) = \mathrm{sd}(F).$$

(5) Si $(2n-2, 2n)$ est un point maximal de F et $(2n-3, 2n-2)$ un point surfixe non doublé, alors

$$\mathrm{mi}(G) = \mathrm{mi}(F),\ \mathrm{fd}(G) = \mathrm{fd}(F),\ \mathrm{snd}(G) = \mathrm{snd}(F) - 1,$$
$$\mathrm{mp}(G) = \mathrm{mp}(F) - 1,\ \mathrm{fnd}(G) = \mathrm{fnd}(F) - 1,\ \mathrm{sd}(G) = \mathrm{sd}(F).$$

(6) Si $(2n-2, 2n)$ est un point maximal de F et $(2n-3, 2n-2)$ un point surfixe doublé, alors

$$\mathrm{mi}(G) \geq \mathrm{mi}(F),\ \mathrm{fd}(G) = \mathrm{fd}(F),\ \mathrm{snd}(G) = \mathrm{snd}(F),$$
$$\mathrm{mp}(G) \geq \mathrm{mp}(F) - 1,\ \mathrm{mi}(G) + \mathrm{mp}(G) \geq \mathrm{mi}(F) + \mathrm{mp}(F),$$
$$\mathrm{fnd}(G) = \mathrm{fnd}(F),\ \mathrm{sd}(G) = \mathrm{sd}(F) - 1.$$

Notons $E_{n,i,j,k,p,q,r}$ le sous-ensemble de E_n formé des escaliers F tels que

$$\mathrm{mi}(F) = i - 1,\ \mathrm{fd}(F) = j,\ \mathrm{snd}(F) = k,\ \mathrm{mp}(F) = p - 1,\ \mathrm{fnd}(F) = q,\ \mathrm{sd}(F) = r,$$

$E_n^{(l)}$ l'ensemble des $F \in E_{n,i,j,k,p,q,r}$ vérifiant la condition (l) ci-dessus ($l = 1, 2, \ldots, 6$).

Réciproquement, soit G un escalier de taille $n-1$. Un antécédent F de G dans $E_{n,i,j,k,p,q,r}$ par l' application r est entièrement déterminé par le choix des points maximaux de G qu'on remonte sur la ligne $2n$ pour qu'ils soient des points maximaux de F (voir par exemple Fig. 2 et 3). D'après ce qui précède,

(i) si $G \in E_{n-1,l,j,k,m,q,r} (l \geq i-1, m \geq p-1, l+m \geq i+p-1), F \in E_n^{(1)}$ et par suite le nombre d'antécédents de G est égal au nombre de façons de choisir $i-2$ points parmi ses $l-1$ points maximaux d'abscisses impaires $\neq 2n-3$ et $p-2$ points parmi ses $m-1$ points maximaux d'abscisses paires $\neq 2n-2$, soit $\binom{l-1}{i-2}\binom{m-1}{p-2}$ antécédents. Par suite

$$|E_n^{(1)}| = \sum_{l+m\geq i+p-1} \binom{l-1}{i-2}\binom{m-1}{p-2}|E_{n-1,l,j,k,m,q,r}|.$$

(ii) si $G \in E_{n-1,l,j-1,k,m,q,r-1}(l \geq i, m \geq p), F \in E_n^{(2)}$. Par conséquent, G admet $\binom{l-1}{i-1}\binom{m-1}{p-1}$ antécédents. D'où

$$|E_n^{(2)}| = \sum_{l,m} \binom{l-1}{i-1}\binom{m-1}{p-1}|E_{n-1,l,j-1,k,m,q,r-1}|.$$

(iii) si $G \in E_{n-1,i-1,j,k,p,q-1,r}$, $F \in E_n^{(3)}$. Dans ce cas, G n'a qu'un seul antécédent. Par suite

$$|E_n^{(3)}| = |E_{n-1,i-1,j,k,p,q-1,r}|.$$

(iv) si $G \in E_{n-1,l,j-1,k,m,q,r}(l \geq i-1, m \geq p, l+m \geq i+p)$, alors $F \in E_n^{(4)}$. Ainsi G a $\binom{l-1}{i-2}\binom{m-1}{p-1}$ antécédents (Fig 2). Par suite

$$|E_n^{(4)}| = \sum_{l+m\geq i+p} \binom{l-1}{i-2}\binom{m-1}{p-1}|E_{n-1,l,j-1,k,m,q,r}|.$$

(v) si $G \in E_{n-1,i,j,k-1,p-1,q,r}$, elle n'a qu'un seul antécédent F qui appartient à $E_n^{(5)}$. D'où :

$$|E_n^{(5)}| = |E_{n-1,i,j,k-1,p-1,q,r}|.$$

(vi) si $G \in E_{n-1,l,j,k,m,q,r-1}(l \geq i, m \geq p-1, l+m \geq i+p)$, $F \in E_n^{(6)}$ et G admet $\binom{l-1}{i-1}\binom{m-1}{p-2}$ antécédents (Fig 3). On a alors :

$$|E_n^{(6)}| = \sum_{l+m\geq i+p} \binom{l-1}{i-1}\binom{m-1}{p-2}|E_{n-1,l,j,k,m,q,r-1}|.$$

Puisque $|E_{n,i,j,k,p,q,r}| = |E_n^{(1)}| + |E_n^{(2)}| + \cdots + |E_n^{(6)}|$, on a l'identité suivante :

$$\begin{aligned}|E_{n,i,j,k,p,q,r}| = {} & \textstyle\sum_{l,m} \binom{l-1}{i-2}\binom{m-1}{p-2}|E_{n-1,l,j,k,m,q,r}| - |E_{n-1,i-1,j,k,p-1,q,r}| \\ & + \textstyle\sum_{l,m} \binom{l-1}{i-1}\binom{m-1}{p-1}|E_{n-1,l,j-1,k,m,q,r-1}| + |E_{n-1,i-1,j,k,p,q-1,r}| \\ & + \textstyle\sum_{l,m} \binom{l-1}{i-2}\binom{m-1}{p-1}|E_{n-1,l,j-1,k,m,q,r}| - |E_{n-1,i-1,j-1,k,p,q,r}| \\ & + |E_{n-1,i,j,k-1,p-1,q,r}| \\ & + \textstyle\sum_{l,m} \binom{l-1}{i-1}\binom{m-1}{p-2}|E_{n-1,l,j,k,m,q,r-1}| - |E_{n-1,i,j,k,p-1,q,r-1}|.\end{aligned}$$

Comme $\Gamma_n(x,y,z,\overline{x},\overline{y},\overline{z}) = \sum |E_{n,i,j,k,p,q,r}| x^{i-1}y^j z^k \overline{x}^{p-1}\overline{y}^q\overline{z}^r$, alors nous avons :

$$\begin{aligned}\Gamma_n(x,y,z,\overline{x},\overline{y},\overline{z}) = x\overline{x}\sum|E_{n-1,l,j,k,m,q,r}|(x+1)^{l-1}y^jz^k(\overline{x}+1)^{m-1}\overline{y}^q\overline{z}^r\\ -\sum|E_{n-1,i-1,j,k,p-1,q,r}|x^{i-1}y^jz^k\overline{x}^{p-1}\overline{y}^q\overline{z}^r\\ +\sum|E_{n-1,l,j-1,k,m,q,r-1}|(x+1)^{l-1}y^jz^k(\overline{x}+1)^{m-1}\overline{y}^q\overline{z}^r\\ +\sum|E_{n-1,i-1,j,k,p,q-1,r}|x^{i-1}y^jz^k\overline{x}^{p-1}\overline{y}^q\overline{z}^r\\ +x\sum|E_{n-1,l,j-1,k,m,q,r}|(x+1)^{l-1}y^jz^k(\overline{x}+1)^{m-1}\overline{y}^q\overline{z}^r\\ -\sum|E_{n-1,i-1,j-1,k,p,q,r}|x^{i-1}y^jz^k\overline{x}^{p-1}\overline{y}^q\overline{z}^r\\ +\sum|E_{n-1,i,j,k-1,p-1,q,r}|x^{i-1}y^jz^k\overline{x}^{p-1}\overline{y}^q\overline{z}^r\\ +\overline{x}\sum|E_{n-1,l,j,k,m,q,r-1}|(x+1)^{l-1}y^jz^k(\overline{x}+1)^{m-1}\overline{y}^q\overline{z}^r\\ -\sum|E_{n-1,i,j,k,p-1,q,r-1}|x^{i-1}y^jz^k\overline{x}^{p-1}\overline{y}^q\overline{z}^r,\end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}\Gamma_n(x,y,z,\overline{x},\overline{y},\overline{z}) = (x+\overline{z})(y+\overline{x})\Gamma_{n-1}(x+1,y,z,\overline{x}+1,\overline{y},\overline{z})\\ +(x(\overline{y}-y)-\overline{x}(\overline{z}-z)-x\overline{x})\Gamma_{n-1}(x,y,z,\overline{x},\overline{y},\overline{z}).\end{aligned}$$

On obtient ainsi le théorème 3. □

3. Démonstration du théorème 4.

Soit $(a_{n,k})$ et $(b_{n,k})$ deux suites de polynômes définies respectivement par :

$$(3)\qquad \begin{cases} a_{0,k}=1,\\ a_{n,k}=[(x+k)(\overline{y}-y)-(\overline{x}+k)(\overline{z}-z)-(x+k)(\overline{x}+k)]a_{n-1,k}\\ \qquad +(x+\overline{z}+k)(y+\overline{x}+k)a_{n-1,k+1},\end{cases}$$

$$(4)\qquad \begin{cases} b_{0,0}=1, \quad b_{n,k}=0 \ si\ k\notin[0,n],\\ b_{n,k}=b_{n-1,k-1}+[(x+k)(\overline{y}+k)+(y+k)(\overline{z}+k)+(z+k)(\overline{x}+k)\\ \qquad -k(k+1)]b_{n-1,k}+(k+1)(\overline{x}+y+k)(\overline{y}+z+k)(\overline{z}+x+k)b_{n-1,k+1}.\end{cases}$$

Lemme 9. — *On a :*

$$(5)\qquad a_{n,k}=\sum_{0\le j\le k}\frac{k!}{(k-j)!}(\overline{y}+z)_j b_{n,j}.$$

Démonstration : Il est évident que le lemme est vrai pour $n=0$. Supposons-le vrai pour $n=i-1$ et montrons-le pour $n=i$.

L'hypothèse de récurrence et la relation (3) nous permettent d'écrire pour $n = i$:

$$\begin{aligned}
a_{i,k} =&(x+\overline{z}+k)(y+\overline{x}+k)\sum_{0\le j\le k+1}\frac{(k+1)!}{(k+1-j)!}(\overline{y}+z)_j b_{i-1,j}\\
&+[(x+k)(\overline{y}-y)-(\overline{x}+k)(\overline{z}-z)-(x+k)(\overline{x}+k)]\sum_{0\le j\le k}\frac{k!}{(k-j)!}(\overline{y}+z)_j b_{i-1,j}\\
=&\sum_{0\le j\le k+1}\frac{k!}{(k+1-j)!}(\overline{y}+z)_j\Big((k+1)(x\overline{y}+y\overline{z}+z\overline{x}+k\overline{y}+kz)\\
&-j\big((x+k)(\overline{y}-y)-(\overline{x}+k)(\overline{z}-z)-(x+k)(\overline{x}+k)\big)\Big)b_{i-1,j}.
\end{aligned}$$

Or, d'après la relation (4), le second membre de (5) devient pour $n = i$:

$$\begin{aligned}
&\sum_{0\le j\le k}\frac{k!}{(k-j)!}(\overline{y}+z)_j b_{i,j} = \sum_{1\le j\le k}\frac{k!}{(k-j)!}(\overline{y}+z)_j b_{i-1,j-1}\\
&+\sum_{0\le j\le k}\frac{k!}{(k-j)!}(\overline{y}+z)_j\\
&\big((x+j)(\overline{y}+j)\\
&+(y+j)(\overline{z}+j)+(z+j)(\overline{x}+j)-j(j+1)\big)b_{i-1,j}\\
&+\sum_{0\le j\le k}\frac{k!}{(k-j)!}(\overline{y}+z)_j(j+1)(\overline{x}+y+j)(\overline{y}+z+j)(\overline{z}+x+j)b_{i-1,j+1}\\
&=\sum_{0\le j\le k+1}\frac{k!}{(k+1-j)!}(\overline{y}+z)_j\alpha_j b_{i-1,j}
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\alpha_j =&(k+1)(x\overline{y}+y\overline{z}+z\overline{x}+k\overline{y}+kz)\\
&-j[(x+k)(\overline{y}-y)-(\overline{x}+k)(\overline{z}-z)-(x+k)(\overline{x}+k)],
\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration du lemme. □

Posons maintenant, pour $k \ge 0$,

$$A_k(t) = 1 + a_{1,k}t + a_{2,k}t^2 + \cdots + a_{n,k}t^n + \cdots$$

et

$$B_k(t) = t^k + b_{k+1,k}t^{k+1} + b_{k+2,k}t^{k+2} + \cdots + b_{n,k}t^n + \cdots$$

D'après le lemme, on a :

(6) $$A_0(t) = B_0(t).$$

Multiplions, d'autre part, les deux membres de (3) par t^n puis sommons sur n. Nous avons :

$$A_k(t) = \frac{1 + (x + \overline{z} + k)(y + \overline{x} + k)tA_{k+1}(t)}{1 - [(x + k)(\overline{y} - y) - (\overline{x} + k)(\overline{z} - z) - (x + k)(\overline{x} + k)]t}.$$

Par itération, on a :

$$(7) \qquad A_0(t) = \sum_{n\geq 0} \frac{(x + \overline{z})_n(y + \overline{x})_n t^n}{\prod_{o\leq k\leq n}[1 - \big((x + k)(\overline{y} - y) - (\overline{x} + k)(\overline{z} - z) - (x + k)(\overline{x} + k)\big)t]}.$$

De l'autre côté, la récurrence (4) nous donne :

$$(1 - (x\overline{y} + y\overline{z} + z\overline{x})t)B_0(t) = 1 + (\overline{x} + y)(\overline{y} + z)(\overline{z} + x)tB_1(t)$$

et pour $j \geq 1$

$$[1 - ((x + j)(\overline{y} + j) + (y + j)(\overline{z} + j) + (z + j)(\overline{x} + j) - j(j + 1))t]B_j(t) = \\ tB_{j-1}(t) + (j + 1)(\overline{x} + y + j)(\overline{y} + z + j)(\overline{z} + x + j)tB_{j+1}(t).$$

Par conséquent,

$$B_0(t) = \frac{1}{1 - (x\overline{y} + y\overline{z} + z\overline{x})t - (\overline{x} + y)(\overline{y} + z)(\overline{z} + x)t(B_1(t)/B_0(t))}$$

et pour $j \geq 1$

$$\frac{B_j(t)}{B_{j-1}(t)} = \frac{t}{1 - \beta_j t - (j + 1)(\overline{x} + y + j)(\overline{y} + z + j)(\overline{z} + x + j)t\dfrac{B_{j+1}(t)}{B_j(t)}}$$

où $\beta_j = (x + j)(\overline{y} + j) + (y + j)(\overline{z} + j) + (z + j)\overline{x} + j) - j(j + 1)$.

Par itération, on trouve $B_0(t) = (1/t)\Gamma(x, y, z, \overline{x}, \overline{y}, \overline{z}; t)$.

Compte-tenu des relations (6) et (7), nous obtenons le théorème 4. □

4. Démonstration du théorème 5

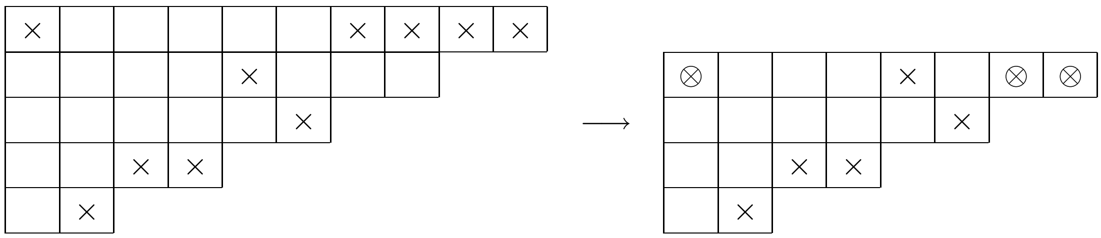
On déduit du théorème 4 la relation

$$[1 - (x(\overline{y} - y) - \overline{x}(\overline{z} - z) - x\overline{x})t]\Gamma(x, y, z, \overline{x}, \overline{y}, \overline{z}; t) \\ = t[1 + (x + \overline{z})(y + \overline{x})\Gamma(x + 1, y, z, \overline{x} + 1, \overline{y}, \overline{z}; t)].$$

En posant $\Gamma(x, y, z, \overline{x}, \overline{y}, \overline{z}; t) = \sum_{n\geq 1} \overline{\Gamma}_n(x, y, z, \overline{x}, \overline{y}, \overline{z})t^n$, on a alors :

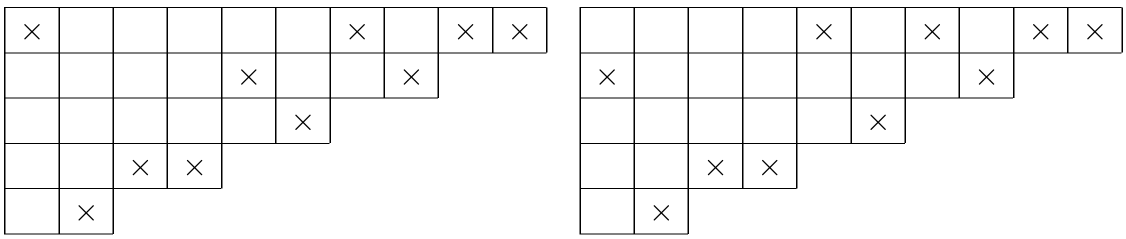
$$\sum_{n\geq 1} \overline{\Gamma}_n(x, y, z, \overline{x}, \overline{y}, \overline{z})t^n = t + (x + \overline{z})(y + \overline{x}) \sum_{n\geq 1} \overline{\Gamma}_n(x + 1, y, z, \overline{x} + 1, \overline{y}, \overline{z})t^{n+1} \\ + [x(\overline{y} - y) - \overline{x}(\overline{z} - z) - x\overline{x}] \sum_{n\geq 1} \overline{\Gamma}_n(x, y, z, \overline{x}, \overline{y}, \overline{z})t^{n+1}$$

En identifiant les cœfficients de t^n des deux membres de cette identité, on voit que $\overline{\Gamma}_n(x,y,z,\overline{x},\overline{y},\overline{z})$ vérifie la même récurrence que $\Gamma_n(x,y,z,\overline{x},\overline{y},\overline{z})$. Il s'ensuit que $\overline{\Gamma}_n(x,y,z,\overline{x},\overline{y},\overline{z}) = \Gamma_n(x,y,z,\overline{x},\overline{y},\overline{z})$ pour tout $n \geq 1$. □



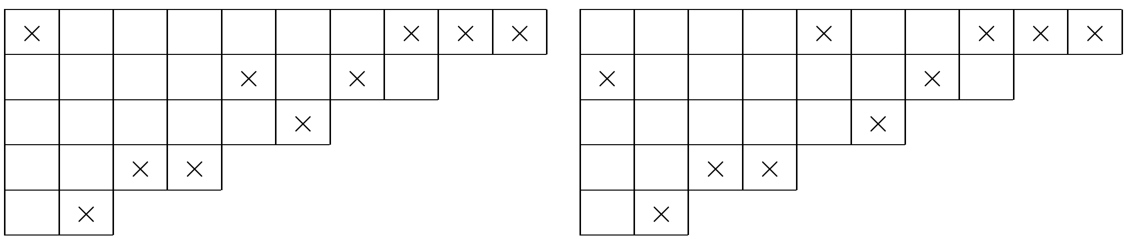
$F \in E_{5,3,1,0,2,2,1}$ $\qquad$ $G \in E_{4,3,1,0,1,2,1}$

Fig. 1



Antécédents de G dans $E_{,5,3,2,0,1,2,1}$

Fig 2



Antécédents de G dans $E_{,5,2,1,0,2,2,2}$

Fig 3

BIBLIOGRAPHIE

[B] D. Barsky. — *Congruences pour les nombres de Genocchi de deuxième espèce*, Séminaire du groupe d'analyse ultramétrique, Paris, t. 34, 1981, p. 1-13.

[C1] L. Carlitz. — *A conjecture concerning Genocchi numbers*, K. Norske Vid. Selsk. Sk., t. 9, 1972, p. 1-4.

[C2] L. Carlitz. — *Explicit formulas for the Dumont-Foata polynomials*, Dis. Math., t. 30, 1980, p. 211-225.

[D] D. Dumont. — *Conjectures sur les symétries ternaires liées aux nombres de Genocchi*, à paratre dans les Actes du 4-ème colloque de séries formelles et combinatoire algébrique, Publ. de l'UQAM, 1992.

[DF] D. Dumont , D. Foata. — *Une propriété de symétrie des nombres de Genocchi*, Bull. Soc. Math. Fr., t. 104, 1976, p. 433-451.

[DR1] D. Dumont, A. Randrianarivony. — *Dérangements et nombres de Genocchi*, Discrete Math., vol. **132** (1994), pp. 37 – 49.

[DR2] D. Dumont—, A. Randrianarivony. — *Sur une extension des nombres de Genocchi*, à paratre dans *Europ. Journ. Combin.*

[H] G.N Han. — *Symétries trivariées sur les nombres de Genocchi*, Europ. J. Combinatorics, vol. **17** (1996), pp. 397 – 407.

[RS] J. Riordan—, P.R. Stein. — *Proof of a conjecture on Genocchi numbers*, Disc. Math., t. 5, 1973, p. 381-388.

Département de Mathématiques
Université Louis-Pasteur
7, rue René Descartes
67084 Strasbourg Cedex, France