STATISTIQUES D'ORDRE SUR LES PERMUTATIONS COLORÉES

PAR

JACQUES DÉSARMÉNIEN ET DOMINIQUE FOATA (*)

RÉSUMÉ. — Un calcul explicite de distributions de statistiques d'ordre sur les permutations colorées est obtenu à l'aide de l'algèbre des fonctions de Schur.

ABSTRACT. — An explicit calculation of distributions of order statistics on colored permutations is derived by means of the Schur function algebra.

1. Introduction

L'étude des statistiques d'ordre sur le groupe symétrique remonte à MACMAHON [Mac1, 2, 3, 4], qui a introduit les notions de *nombre de descentes* ("des") et d'*indice majeur* ("maj") pour une suite finie de nombres et calculé les premières séries génératrices. Le polynôme générateur du groupe des permutations par nombre de descentes est le *polynôme eulérien* (*cf.* [Fo-Sch1]). Le polynôme q-eulérien est le polynôme générateur pour le couple $(\mathrm{des}, \mathrm{maj})$ (*cf.* [Car1, 2, 3]). Avec la statistique *nombre des inversions*, on obtient un autre polynôme q-eulérien (*cf.* [St2, Ro, Fo1, De]). Un pas décisif a été fait par GARSIA et GESSEL [Ga-Ge] (voir aussi [Ra1]), lorqu'il ont trouvé la bonne normalisation des séries de faculté à considérer. Il fallait prendre des produits de deux q-factorielles montantes. Pour chaque permutation σ on peut, en plus, introduire le nombre de descentes et l'indice majeur de l'inverse σ^{-1}, notés $\mathrm{ides}\,\sigma$ et $\mathrm{imaj}\,\sigma$. La distribution du 4-vecteur $(\mathrm{des}, \mathrm{ides}, \mathrm{maj}, \mathrm{imaj})$ est alors calculable (*cf.* [Ga-Ge, Ra1]), ainsi que son groupe de symétrie (*cf.* [Fo-Sch2]). D'autres résultats parallèles ont été obtenus par différents auteurs (*cf.* [Car4, Che-Mo, St1, Ge, Ra2]).

C'est, en fait, l'étude approfondie de l'algèbre combinatoire des tableaux réalisée par SCHÜTZENBERGER [Sch1, 2, La-Sch1, 2, 3, 4], qui a permis une insertion complète du calcul des statistiques d'ordre sur le groupe des permutations dans l'algèbre des fonctions symétriques. Il devenait enfin

(*) Avec le soutien du PRC Mathématiques et Informatique.

possible d'utiliser toute la richesse de cette dernière algèbre et de puiser les ingrédients utiles dans les ouvrages classiques [St1, Macd, Ja-Ke, Wy].

Les deux auteurs du présent article ont ainsi utilisé l'algèbre des fonctions de Schur pour reprendre le calcul de GARSIA-GESSEL [Ga-Ge] et l'insérer dans son cadre naturel [De-Fo1, 2]. La distribution du 4-vecteur (des, ides, maj, imaj) peut être évaluée pour une classe d'objets plus importante que la classe des permutations. On obtient ainsi des extensions des formules classiques sur les séries hypergéométriques basiques au cas de plusieurs bases.

Plus récemment, REMMEL [Re3] a prolongé ces précédents travaux et calculé des distributions explicites de statistiques d'ordre sur des *bipermutations.* (La définition sera rappelée ci-dessous.) Il s'est appuyé sur l'algèbre des *fonctions de Schur* (k,l)*-crochets*, introduite par BERELE et REGEV (*cf.* [Be-Reg, Be-Rem, Re1, Re2]). Il ne semble pas que ces fonctions de Schur (k,l)-crochets apportent quelque chose de vraiment nouveau d'un point de vue combinatoire. Elles ont cependant permis à REMMEL d'imaginer ce nouveau concept de bipermutation et de l'exploiter.

Le but du présent article est de calculer la fonction génératrice de plusieurs statistiques d'ordre sur des objets combinatoires plus généraux que les bipermutations appelés *permutations* (k,l)*-colorées.* Il s'agit simplement de triplets $\tau=(\sigma,\mathbf{a},\mathbf{b})$, où σ est une permutations de l'intervalle $[\,n\,]=\{1,2,\ldots,n\}$ et où $\mathbf{a}=(a_1,\ldots,a_k)$ et $\mathbf{b}=(b_1,\ldots,b_l)$ sont deux suites de k et l entiers positifs de somme n. Les suites $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ servent à cloisonner les deux mots $\sigma(1)\sigma(2)\ldots\sigma(n)$ et $\sigma^{-1}(1)\sigma^{-1}(2)\ldots\sigma^{-1}(n)$ en k et l facteurs, respectivement. Notre but est non seulement de faire le calcul explicite des distributions de statistiques d'ordre sur ces permutations colorées, mais de montrer que ce calcul repose entièrement sur l'algèbre des fonctions de Schur ordinaires, en faisant appel à une simple extension de la correspondance de Robinson-Schensted.

On trouvera dans la prochaine section la définition des statistiques d'ordre considérées ici, ainsi que le résultat principal de cet article (THÉORÈME 2.1). Le calcul sur les fonctions de Schur nécessaire pour établir ce théorème est consigné dans la section 3. Les objets combinatoires qui servent de support à ce calcul sont des tableaux gauches d'une forme particulière. A partir de la formule de Cauchy sur les fonctions de Schur, on obtient d'abord une expression pour la fonction génératrice de cette classe de tableaux gauches (*cf.* PROPOSITION 4.1). Il reste à établir une bijection entre cette classe de tableaux gauches et les permutations (k,l)-colorées pour montrer que l'expression trouvée est aussi la fonction génératrice des permutations (k,l)-colorées. Ceci est donné dans la section 5. Nous avons reproduit dans la dernière section certaines spécialisations des formules obtenues.

2. Permutations (k, l)-colorées

Quand σ est une permutation de l'intervalle $[\,n\,]$, la *ligne de route* $\mathrm{Ligne}\,\sigma$, la *ligne inverse de route* $\mathrm{Iligne}\,\sigma$, la *coligne de route* $\mathrm{Coligne}\,\sigma$ et la *coligne inverse de route* $\mathrm{Icoligne}\,\sigma$ sont habituellement définies (*cf.* [Foulk], [Fo-Sch2]) par

$$\begin{gathered}\mathrm{Ligne}\,\sigma = \{r : 1 \le r \le n-1,\ \sigma(r) > \sigma(r+1)\}\ ;\\ \mathrm{Iligne}\,\sigma = \mathrm{Ligne}\,\sigma^{-1}\ ; \qquad \mathrm{Coligne}\,\sigma = [\,n-1\,] \setminus \mathrm{Ligne}\,\sigma\ ;\\ \mathrm{Icoligne}\,\sigma = [\,n-1\,] \setminus \mathrm{Iligne}\,\sigma\ (= \mathrm{Coligne}\,\sigma^{-1})\ ;\end{gathered}$$

où σ^{-1} désigne l'inverse de σ. Le cardinal de $\mathrm{Ligne}\,\sigma$ et la somme des éléments de $\mathrm{Ligne}\,\sigma$ sont respectivement appelés *nombre de descentes* et *indice majeur* de σ. Il y a des définitions analogues pour les autres lignes de route.

On peut prolonger la définition de ces lignes de route aux permutations (k, l)-colorées. Soit $\tau = (\sigma, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ une permutation (k, l)-colorée ; son *inverse* est la permutation (l, k)-colorée $\tau^{-1} = (\sigma^{-1}, \mathbf{b}, \mathbf{a})$. Il est commode de poser $a_0 = b_0 = 0$ et de noter $\mathbf{a}_i$ et $\mathbf{b}_j$ les *sommes partielles* $\mathbf{a}_i = a_1 + \cdots + a_i$ $(0 \le i \le k)$ et $\mathbf{b}_j = b_1 + \cdots + b_j$ $(0 \le j \le l)$.

Les suites $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ déterminent des sous-intervalles de $[\,n\,]$ dans lesquels les différentes lignes de route peuvent aussi être définies : pour chaque $i = 1, \ldots, k$ et $j = 1, \ldots, l$ on pose :

$$\begin{gathered}\mathrm{Ligne}_i\,\tau = \{r : \mathbf{a}_{i-1} + 1 \le r \le \mathbf{a}_i - 1,\ \sigma(r) > \sigma(r+1)\}\ ;\\ \mathrm{Coligne}_i\,\tau = [\mathbf{a}_{i-1} + 1, \mathbf{a}_i - 1] \setminus \mathrm{Ligne}_i\,\tau\ ; \qquad \mathrm{Iligne}_j\,\tau = \mathrm{Ligne}_j\,\tau^{-1}\ ;\\ \mathrm{Icoligne}_j\,\tau = \mathrm{Coligne}_j\,\tau^{-1} = [\mathbf{b}_{j-1} + 1, \mathbf{b}_j - 1] \setminus \mathrm{Iligne}_j\,\tau.\end{gathered}$$

Autrement dit :

$$\mathrm{Iligne}_j\,\tau = \{s : \mathbf{b}_{j-1} + 1 \le s \le \mathbf{b}_j - 1,\ \sigma^{-1}(s) > \sigma^{-1}(s+1)\}.$$

2.1. *Exemple.* — Soient $n = 12$, $(k, l) = (3, 2)$, $\mathbf{a} = (5, 4, 3)$, $\mathbf{b} = (7, 5)$ et $\tau = (\sigma, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ la permutation (k, l)-colorée d'ordre n

$$\sigma = \left(\begin{array}{ccccc|cccc|ccc} \mathbf{1} & 2 & 3 & \mathbf{4} & 5 & 6 & \mathbf{7} & \mathbf{8} & 9 & 10 & \mathbf{11} & 12\\ 6 & 1 & 4 & 10 & 5 & 2 & 11 & 9 & 8 & 3 & 12 & 7 \end{array}\right).$$

Les éléments de $\mathrm{Ligne}_i\,\sigma$ $(i = 1, 2, 3)$ sont reproduits en gras. Puisque $\sigma(9) = 8 > 3 = \sigma(10)$, l'entier 8 est bien un élément de la ligne de route de σ, mais *non pas* de $\mathrm{Ligne}_2\,\tau$.

La permutation σ^{-1} s'écrit :

$$\sigma^{-1} = \left(\begin{array}{ccccccc|ccccc} 1 & 2 & \mathbf{3} & 4 & \mathbf{5} & 6 & 7 & \mathbf{8} & \mathbf{9} & 10 & 11 & 12\\ 2 & 6 & 10 & 3 & 5 & 1 & 12 & 9 & 8 & 4 & 7 & 11 \end{array}\right).$$

Les éléments de $\text{Ligne}_j\,\sigma^{-1}$ $(j=1,2)$ sont également reproduits en gras.

A chacune de ces lignes de route correspond un *nombre de descentes* et un *indice majeur* définis comme suit :

$$
\begin{aligned}
\text{des}_i\,\tau &= |\text{Ligne}_i\,\tau|\,; &\quad \text{maj}_i\,\tau &= \sum\{r-\mathbf{a}_{i-1} : r\in \text{Ligne}_i\,\tau\};\\
\text{codes}_i\,\tau &= |\text{Coligne}_i\,\tau|\,; &\quad \text{comaj}_i\,\tau &= \sum\{r-\mathbf{a}_{i-1} : r\in \text{Coligne}_i\,\tau\};\\
\text{ides}_j\,\tau &= \big|\text{Iligne}_j\,\tau\big|\,; &\quad \text{imaj}_j\,\tau &= \sum\{r-\mathbf{b}_{j-1} : r\in \text{Iligne}_j\,\tau\};\\
\text{icodes}_j\,\tau &= \big|\text{Icoligne}_j\,\tau\big|\,; &\quad \text{icomaj}_j\,\tau &= \sum\{r-\mathbf{b}_{j-1} : r\in \text{Icoligne}_j\,\tau\}.
\end{aligned}
$$

Il faut remarquer que les indices majeurs relatifs au $i^{\text{ième}}$ (resp. $j^{\text{ième}}$) compartiment de σ (resp. σ^{-1}) sont des sommes d'entiers de l'intervalle $[a_i]$ (resp. $[b_j]$). Dans l'exemple ci-dessus, on a ainsi : $\text{maj}_1\,\tau=1+4=5$; $\text{maj}_2\,\tau=(7-5)+(8-5)=5$; $\text{maj}_3\,\tau=11-9=2$.

Posons finalement :

$$
\begin{aligned}
f_i(\tau) &= s_i^{\text{des}_i\,\tau}p_i^{\text{maj}_i\,\tau}\,; &\quad f_i'(\tau) &= s_i^{\text{codes}_i\,\tau}p_i^{\text{comaj}_i\,\tau}\,;\\
g_j(\tau) &= t_j^{\text{ides}_j\,\tau}q_j^{\text{imaj}_j\,\tau}\,; &\quad g_j'(\tau) &= t_j^{\text{icodes}_j\,\tau}q_j^{\text{icomaj}_j\,\tau}.
\end{aligned}
$$

Du fait du cloisonnement, plusieurs lignes de route (une par compartiment) doivent être considérées. Pour chaque compartiment, on peut s'intéresser, en fait, soit à la ligne de route, soit à la coligne de route. On peut donc définir 2^k types de ligne de route pour la permutation colorée τ et 2^l pour τ^{-1}. On est donc amené à introduire deux partitions ordonnées $\mathbf{K}=(K_1,K_2)$ et $\mathbf{L}=(L_1,L_2)$ des intervalles $[\,k\,]$ et $[\,l\,]$, respectivement (l'un des blocs K_1 ou K_2, L_1 ou L_2 pouvant être vide). Ce choix de $\mathbf{K}$ et $\mathbf{L}$ étant fait, on pose :

$$h(\mathbf{K},\mathbf{L};\tau)=\prod_{i\in K_1}f_i(\tau)\prod_{i\in K_2}f_i'(\tau)\prod_{j\in L_1}g_j(\tau)\prod_{j\in L_2}g_j'(\tau).$$

Les suites de couleurs $\mathbf{a},\mathbf{b}$ étant fixées, on forme alors le polynôme :

$$P(\mathbf{a},\mathbf{b})=P(\mathbf{a},\mathbf{b};\mathbf{K},\mathbf{L};\mathbf{s},\mathbf{t},\mathbf{p},\mathbf{q})=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}h(\mathbf{K},\mathbf{L};(\sigma,\mathbf{a},\mathbf{b})). \tag{2.1}$$

Lorsque toutes les variables s_i et t_j sont égales à 1, on pose :

$$P(\mathbf{a},\mathbf{b};\mathbf{K},\mathbf{L};\mathbf{p},\mathbf{q})=P(\mathbf{a},\mathbf{b};\mathbf{K},\mathbf{L};\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{p},\mathbf{q}). \tag{2.2}$$

Le reste de l'article est consacré au calcul de la fonction génératrice des polynômes $P(\mathbf{a},\mathbf{b})$. Cette fonction génératrice s'exprime à l'aide des séries hypergéométriques à deux classes de bases. Il est donc utile de rappeler les notations usuelles utilisées dans l'étude de ces séries, comme la q-factorielle montante :

$$(a;q)_n = \begin{cases} 1, & \text{si } n=0\,; \\ (1-a)(1-aq)\,\ldots\,(1-aq^{n-1}), & \text{si } n\geq 1\,; \end{cases}$$
$$(a;q)_\infty = \lim_n (a;q)_n = \textstyle\prod_{n\geq 0}(1-aq^n)\,;$$

ainsi que la q_1, q_2-factorielle :

$$(a;q_1,q_2)_{r,s} = \begin{cases} 1, & \text{si } r \text{ ou } s \text{ est nul}\,; \\ \prod_{1\leq i\leq r}\prod_{1\leq j\leq s}(1-aq_1^{i-1}q_2^{j-1}), & \text{si } r,s\geq 1\,; \end{cases}$$
$$(a;q_1,q_2)_{\infty,\infty} = \lim_{r,s}(a;q_1,q_2)_{r,s} = \textstyle\prod_{i\geq 1}\prod_{j\geq 1}(1-aq_1^{i-1}q_2^{j-1}).$$

On utilisera également les notations abrégées pour les produits :

$$\mathbf{A}^{\mathbf{a}} = \prod_{1\leq i\leq k} A_i^{a_i}, \qquad \mathbf{B}^{\mathbf{b}} = \prod_{1\leq j\leq l} B_j^{b_j},$$
$$(\mathbf{p};\mathbf{p})_{\mathbf{a}} = \prod_{1\leq i\leq k}(p_i;p_i)_{a_i}, \qquad (\mathbf{s};\mathbf{p})_{\mathbf{a+1}} = \prod_{1\leq i\leq k}(s_i;p_i)_{a_i+1},$$
$$(u\mathbf{A}_K\mathbf{B}_L;\mathbf{p},\mathbf{q})_{\mathbf{c+1},\mathbf{d+1}} = \prod_{i\in K,\, j\in L}(uA_iB_j;p_i,q_j)_{c_i+1,d_j+1},$$
$$(u\mathbf{A}_K\mathbf{B}_L;\mathbf{p},\mathbf{q})_{\infty,\infty} = \prod_{i\in K,\, j\in L}(uA_iB_j;p_i,q_j)_{\infty,\infty}.$$

Dans les identités (2.3) et (2.4) ci-après, la première sommation est faite sur tous les entiers n positifs. Pour $n\geq 0$ fixé, la seconde sommation est étendue à toutes les paires $(\mathbf{a},\mathbf{b})$ de suites d'entiers $\mathbf{a}=(a_1,\ldots,a_k)$ et $\mathbf{b}=(b_1,\ldots,b_l)$ satisfaisant $\sum_i a_i = \sum_j b_j = n$. Finalement, la paire $(\mathbf{c},\mathbf{d})$ varie dans l'ensemble de toutes les suites $\mathbf{c}=(c_1,\ldots,c_k)$ et $\mathbf{d}=(d_1,\ldots,d_l)$ de k et l entiers positifs, respectivement.

Théorème 2.1. — *La fonction génératrice des polynômes $P(\mathbf{a},\mathbf{b})$ est donnée par :*

$$\sum_n u^n \sum_{\mathbf{a},\mathbf{b}} \mathbf{A}^{\mathbf{a}}\mathbf{B}^{\mathbf{b}} \frac{P(\mathbf{a},\mathbf{b};\mathbf{K},\mathbf{L};\mathbf{s},\mathbf{t},\mathbf{p},\mathbf{q})}{(\mathbf{s};\mathbf{p})_{\mathbf{a+1}}(\mathbf{t};\mathbf{q})_{\mathbf{b+1}}} \tag{2.3}$$
$$= \sum_{\mathbf{c},\mathbf{d}} \mathbf{s}^{\mathbf{c}}\mathbf{t}^{\mathbf{d}} \frac{(-u\mathbf{A}_{K_1}\mathbf{B}_{L_2};\mathbf{p},\mathbf{q})_{\mathbf{c+1},\mathbf{d+1}}(-u\mathbf{A}_{K_2}\mathbf{B}_{L_1};\mathbf{p},\mathbf{q})_{\mathbf{c+1},\mathbf{d+1}}}{(u\mathbf{A}_{K_1}\mathbf{B}_{L_1};\mathbf{p},\mathbf{q})_{\mathbf{c+1},\mathbf{d+1}}(u\mathbf{A}_{K_2}\mathbf{B}_{L_2};\mathbf{p},\mathbf{q})_{\mathbf{c+1},\mathbf{d+1}}}$$

et

$$\sum_n u^n \sum_{\mathbf{a},\mathbf{b}} \mathbf{A}^{\mathbf{a}}\mathbf{B}^{\mathbf{b}} \frac{P(\mathbf{a},\mathbf{b};\mathbf{K},\mathbf{L};\mathbf{p},\mathbf{q})}{(\mathbf{p};\mathbf{p})_{\mathbf{a}}(\mathbf{q};\mathbf{q})_{\mathbf{b}}} = \frac{(-u\mathbf{A}_{K_1}\mathbf{B}_{L_2};\mathbf{p},\mathbf{q})_{\infty,\infty}(-u\mathbf{A}_{K_2}\mathbf{B}_{L_1};\mathbf{p},\mathbf{q})_{\infty,\infty}}{(u\mathbf{A}_{K_1}\mathbf{B}_{L_1};\mathbf{p},\mathbf{q})_{\infty,\infty}(u\mathbf{A}_{K_2}\mathbf{B}_{L_2};\mathbf{p},\mathbf{q})_{\infty,\infty}}. \tag{2.4}$$

On obtient la seconde identité à partir de la première en multipliant celle-ci par $(1 - s_1)$ et en faisant $s_1 = 1$, puis en recommençant ces deux manipulations pour chacune des autres variables s_i et t_j.

Dans le membre de droite de (2.3) et de (2.4), les bases p_i, q_j apparaissent par paires, tandis que des q-factorielles montantes ordinaires apparaissent dans le membre de gauche. Ces deux formules peuvent être considérées comme des formules de transformation d'une série hypergéométrique basique *bivariée* en une série de la classe des séries hypergéométriques *univariées* à plusieurs bases. L'identité (2.4) peut aussi être vue comme une extension de l'identité q-binomiale à plusieurs bases (*cf.* [De-Fo1]).

Dans le cas $k = l = 2$, $K_1 = \{1\}$, $K_2 = \{2\}$, $L_1 = \{1\}$, $L_2 = \{2\}$, on retrouve les identités de Remmel sur les bipermutations.

3. Les fonctions de Schur

Nous renvoyons au livre de Macdonald [Macd] pour toutes les propriétés concernant les fonctions de Schur. L'identité de base sous-jacente à tout le calcul qui va suivre est l'identité de Cauchy pour les fonctions de Schur $S_\lambda(\mathbf{x})$, ainsi que l'identité duale. Elles s'écrivent :

$$\prod_{i,j}(1 - x_i y_j)^{-1} = \sum_\lambda S_\lambda(\mathbf{x}) S_\lambda(\mathbf{y})\,; \tag{3.1}$$

$$\prod_{i,j}(1 + x_i y_j) = \sum_\lambda S_\lambda(\mathbf{x}) S_{\lambda'}(\mathbf{y})\,; \tag{3.2}$$

la sommation portant sur l'ensemble de toutes les partitions λ d'entiers et λ' désignant la partition conjuguée de λ (voir [Macd, p. 33]).

Nous aurons aussi besoin des fonctions de Schur gauches $S_{\nu/\theta}(\mathbf{x})$ associées aux diagrammes gauches ν/θ. Lorsque ν/θ est le produit d'un nombre fini de diagrammes de Ferrers $\nu/\theta = \bigotimes_j \lambda_{i,j} = \lambda_{i,1} \otimes \cdots \otimes \lambda_{i,l}$, il résulte de la définition des fonctions de Schur que l'on a l'identité :

$$S_{\otimes_j \lambda_{i,j}}(\mathbf{x}) = S_{\lambda_{i,1}}(\mathbf{x}) \cdots S_{\lambda_{i,l}}(\mathbf{x}). \tag{3.3}$$

En plus des notations données dans la section 2, nous introduisons deux familles de variables (A_i) et (B_j), ainsi que $k + l$ ensembles de variables

$\mathbf{x}^{(i)} = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots)$ $(1 \le i \le k)$ et $\mathbf{y}^{(j)} = (y_1^{(j)}, y_2^{(j)}, \dots)$ $(1 \le j \le l)$. Pour tout couple (i,j) posons :

$$\mathrm{Sch}(i,j) = \prod_{p,q} (1 - uA_iB_jx_p^{(i)}y_q^{(j)})^{-1}, \tag{3.4}$$

$$\mathrm{Sch}'(i,j) = \prod_{p,q} (1 + uA_iB_jx_p^{(i)}y_q^{(j)}). \tag{3.5}$$

Les partitions $\mathbf{K} = (K_1, K_2)$ et $\mathbf{L} = (L_1, L_2)$ de $[\,k\,]$ et $[\,l\,]$ étant données, on pose pour $r, s = 1, 2$

$$\mathrm{Sch}(K_r, L_s) = \prod_{i,j} \mathrm{Sch}(i,j) \qquad ((i,j) \in K_r \times L_s), \tag{3.6}$$

$$\mathrm{Sch}'(K_r, L_s) = \prod_{i,j} \mathrm{Sch}'(i,j) \qquad ((i,j) \in K_r \times L_s). \tag{3.7}$$

D'abord les deux identités de Cauchy (3.1) et (3.2) peuvent être récrites :

$$\mathrm{Sch}(i,j) = \sum_{n_{i,j}} u^{n_{i,j}} \sum_{\lambda_{i,j}} (A_iB_j)^{|\lambda_{i,j}|} S_{\lambda_{i,j}}(\mathbf{x}^{(i)}) S_{\lambda_{i,j}}(\mathbf{y}^{(j)}), \tag{3.8}$$

$$= \sum_{n_{i,j}} u^{n_{i,j}} \sum_{\lambda_{i,j}} (A_iB_j)^{|\lambda_{i,j}|} S_{\lambda'_{i,j}}(\mathbf{x}^{(i)}) S_{\lambda'_{i,j}}(\mathbf{y}^{(j)}), \tag{3.9}$$

$$\mathrm{Sch}'(i,j) = \sum_{n_{i,j}} u^{n_{i,j}} \sum_{\lambda_{i,j}} (A_iB_j)^{|\lambda_{i,j}|} S_{\lambda_{i,j}}(\mathbf{x}^{(i)}) S_{\lambda'_{i,j}}(\mathbf{y}^{(j)}), \tag{3.10}$$

$$= \sum_{n_{i,j}} u^{n_{i,j}} \sum_{\lambda_{i,j}} (A_iB_j)^{|\lambda_{i,j}|} S_{\lambda'_{i,j}}(\mathbf{x}^{(i)}) S_{\lambda_{i,j}}(\mathbf{y}^{(j)}), \tag{3.11}$$

où la seconde sommation dans chaque identité est sur toutes les partitions $\lambda_{i,j}$ de l'entier $n_{i,j}$.

Maintenant exprimons chaque élément du produit

$$\mathrm{Sch}(K_1, L_1)\mathrm{Sch}'(K_1, L_2)\mathrm{Sch}'(K_2, L_1)\mathrm{Sch}(K_2, L_2)$$

comme somme infinie de fonctions de Schur à l'aide des identités (3.8), (3.10), (3.11) et (3.9), respectivement et calculons ce produit. On obtient :

$$\mathrm{Sch}(K_1, L_1)\mathrm{Sch}'(K_1, L_2)\mathrm{Sch}'(K_2, L_1)\mathrm{Sch}(K_2, L_2) \tag{3.12}$$

$$= \sum_n u^n \sum_{(\lambda_{i,j})} \prod_{i,j} (A_i B_j)^{|\lambda_{i,j}|}$$
$$\times \prod_{i\in K_1} \prod_{j\in L_1} S_{\lambda_{i,j}}(\mathbf{x}^{(i)}) S_{\lambda_{i,j}}(\mathbf{y}^{(j)}) \prod_{i\in K_1} \prod_{j\in L_2} S_{\lambda_{i,j}}(\mathbf{x}^{(i)}) S_{\lambda'_{i,j}}(\mathbf{y}^{(j)})$$
$$\times \prod_{i\in K_2} \prod_{j\in L_1} S_{\lambda'_{i,j}}(\mathbf{x}^{(i)}) S_{\lambda_{i,j}}(\mathbf{y}^{(j)}) \prod_{i\in K_2} \prod_{j\in L_2} S_{\lambda'_{i,j}}(\mathbf{x}^{(i)}) S_{\lambda'_{i,j}}(\mathbf{y}^{(j)})$$
$$= \sum_n u^n \sum_{(\lambda_{i,j})} \prod_{i,j} (A_i B_j)^{|\lambda_{i,j}|} \prod_{i\in K_1} \prod_{j} S_{\lambda_{i,j}}(\mathbf{x}^{(i)}) \prod_{i\in K_2} \prod_{j} S_{\lambda'_{i,j}}(\mathbf{x}^{(i)})$$
$$\times \prod_{j\in L_1} \prod_{i} S_{\lambda_{i,j}}(\mathbf{y}^{(j)}) \prod_{j\in L_2} \prod_{i} S_{\lambda'_{i,j}}(\mathbf{y}^{(j)}).$$

Soit, d'après (3.3)

$$\text{(3.13)}\quad \mathrm{Sch}(K_1, L_1)\mathrm{Sch}'(K_1, L_2)\mathrm{Sch}'(K_2, L_1)\mathrm{Sch}(K_2, L_2)$$
$$= \sum_n u^n \sum_{(\lambda_{i,j})} \prod_{i,j} (A_i B_j)^{|\lambda_{i,j}|} \prod_{i\in K_1} S_{\otimes_j \lambda_{i,j}}(\mathbf{x}^{(i)}) \prod_{i\in K_2} S_{\otimes_j \lambda'_{i,j}}(\mathbf{x}^{(i)})$$
$$\times \prod_{j\in L_1} S_{\otimes_i \lambda_{i,j}}(\mathbf{y}^{(j)}) \prod_{j\in L_2} S_{\otimes_i \lambda'_{i,j}}(\mathbf{y}^{(j)}).$$

Dans toutes ces sommations, la matrice $(\lambda_{i,j})$ varie dans l'ensemble de toutes les matrices $k \times l$ dont les coefficients $\lambda_{i,j}$ sont des partitions satisfaisant $\sum_{i,j} |\lambda_{i,j}| = n$.

Prenons maintenant pour $\mathbf{x}^{(i)}$ et $\mathbf{y}^{(j)}$ les ensembles finis

$$\{x_1^{(i)}, \dots, x_{c_i+1}^{(i)}\} \qquad \text{et} \qquad \{y_1^{(j)}, \dots, y_{d_j+1}^{(j)}\}$$

et faisons les substitutions $x_r^{(i)} \leftarrow p_i^{r-1}$ (resp. $y_s^{(j)} \leftarrow q_j^{s-1}$) dans (3.13). Compte-tenu des notations (3.4)–(3.7) et de nos conventions sur les produits, on obtient l'identité :

$$\text{(3.14)}\quad \frac{(-u\mathbf{A}_{K_1}\mathbf{B}_{L_2}; \mathbf{p}, \mathbf{q})_{\mathbf{c+1},\mathbf{d+1}} (-u\mathbf{A}_{K_2}\mathbf{B}_{L_1}; \mathbf{p}, \mathbf{q})_{\mathbf{c+1},\mathbf{d+1}}}{(u\mathbf{A}_{K_1}\mathbf{B}_{L_1}; \mathbf{p}, \mathbf{q})_{\mathbf{c+1},\mathbf{d+1}} (u\mathbf{A}_{K_2}\mathbf{B}_{L_2}; \mathbf{p}, \mathbf{q})_{\mathbf{c+1},\mathbf{d+1}}}$$
$$= \sum_n u^n \sum_{(\lambda_{i,j})} \prod_{i,j} (A_i B_j)^{|\lambda_{i,j}|}$$
$$\times \prod_{i\in K_1} S_{\otimes_j \lambda_{i,j}}(1, p_i, \dots, p_i^{c_i}) \prod_{i\in K_2} S_{\otimes_j \lambda'_{i,j}}(1, p_i, \dots, p_i^{c_i})$$
$$\times \prod_{j\in L_1} S_{\otimes_i \lambda_{i,j}}(1, q_j, \dots, q_j^{d_j}) \prod_{j\in L_2} S_{\otimes_i \lambda'_{i,j}}(1, q_j, \dots, q_j^{d_j}).$$

Multiplions les deux membres par $\mathbf{s}^{\mathbf{c}}\mathbf{t}^{\mathbf{d}}$ et sommons sur toutes les suites $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_k)$ et $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_l)$ d'entiers positifs. Le premier membre de (3.14) devient alors identique au second membre de (2.3).

4. Tableaux gauches

Nous reprenons les conventions habituelles sur les formes gauches ν/θ, qui sont des différences ensemblistes de deux diagrammes de Ferrers ν et θ. Si la forme ν/θ contient n points et si I est un ensemble fini d'entiers de cardinal n, on construit un *tableau gauche* T, de *forme* ν/θ et de *contenu* I en plaçant les n entiers de I sur les n points de la forme de façon à obtenir une croissance stricte dans chaque ligne (de gauche à droite) et dans chaque colonne (de bas en haut). Il est commode d'écrire :

$$\mathrm{Cont}\, T = I, \qquad |T| = \nu/\theta.$$

Lorsque $\mathrm{Cont}\, T = [\,n\,]$, on dit que T est *d'ordre n*.

La *ligne inverse de route* d'un tableau T, de contenu I et de forme ν/θ est définie comme l'ensemble de tous les entiers k tels que k et $k+1$ apparaissent dans T, l'entier $k+1$ étant situé *plus haut* que k dans T. On note $\mathrm{Iligne}\, T$ la ligne inverse de route de T. Comme de coutume, le *transposé* T' d'un tableau T est obtenu par réflexion de celui-ci par rapport à la diagonale principale.

Par exemple, les tableaux

$$P_{1,1} = \begin{array}{lll} 6 & & \\ 1 & 4 & 5 \end{array} \qquad P_{2,1} = 2 \qquad P_{3,1} = 3\ 7$$

sont de forme $\lambda_{1,1} = (3,1)$, $\lambda_{2,1} = (1)$ and $\lambda_{3,1} = (2)$, respectivement. Le tableau

$$T = \begin{array}{llllll} 6 & & & & & \\ 1 & 4 & \mathbf{5} & & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & \mathbf{3} & 7 \end{array}$$

est d'ordre 7 et de forme $|T_1| = \lambda_{1,1} \otimes \lambda_{2,1} \otimes \lambda_{3,1}$. On l'obtient à partir des précédents tableaux de façon évidente. La notation :

$$T_1 = P_{1,1} \otimes P_{2,1} \otimes P_{3,1}$$

n'est donc pas ambiguë. Les éléments de $\mathrm{Iligne}\, T$ ont été reproduits en gras ($\mathrm{Iligne}\, T = \{\mathbf{3}, \mathbf{5}\}$).

Soit T un tableau gauche d'ordre n. Par analogie avec les permutations colorées, on pose :

$$\operatorname{ides} T = |\operatorname{Iligne} T| \ ; \qquad \operatorname{imaj} T = \sum \{r : r \in \operatorname{Iligne} T\} \ ;$$

puis :

$$F_i(T) = s_i^{\operatorname{ides} T} p_i^{\operatorname{imaj} T}; \qquad G_j(T) = t_j^{\operatorname{ides} T} q_j^{\operatorname{imaj} T}. \tag{4.1}$$

Les suites $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ et $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_l)$ étant données, on considère l'ensemble $\Lambda(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ des matrices $(\lambda_{i,j})$ d'ordre $k \times l$ dont les coefficients sont des partitions satisfaisant les relations

$$|\lambda_{i,1}| + \cdots + |\lambda_{i,l}| = a_i, \qquad |\lambda_{1,j}| + \cdots + |\lambda_{k,j}| = b_j \tag{4.2}$$

pour chaque $i = 1, \ldots, k$ et $j = 1, \ldots, l$. On forme ensuite l'ensemble $\mathcal{T}(\lambda_{i,j})$ de toutes les suites $(\mathbf{T}, \mathbf{U}) = (T_1, \ldots, T_l, U_1, \ldots, U_k)$ de $(l + k)$ tableaux gauches, respectivement d'ordre $b_1, \ldots, b_l, a_1, \ldots, a_k$ et de forme

$$|T_j| = \lambda_{1,j} \otimes \cdots \otimes \lambda_{k,j}, \qquad |U_i| = \lambda_{i,1} \otimes \cdots \otimes \lambda_{i,l}, \tag{4.3}$$

pour $j = 1, \ldots, l$ et $i = 1, \ldots, k$.

Relativement à la paire de partitions $\mathbf{K} = (K_1, K_2)$ et $\mathbf{L} = (L_1, L_2)$, une telle suite $(\mathbf{T}, \mathbf{U})$ de tableaux gauches est munie d'un *poids* défini par :

$$H(\mathbf{K}, \mathbf{L}; \mathbf{T}, \mathbf{U}) = \prod_{i \in K_1} F_i(U_i) \prod_{i \in K_2} F_i(U_i') \prod_{j \in L_1} G_j(T_j) \prod_{j \in L_2} G_j(T_j').$$

On se propose de calculer la fonction génératrice des suites $(\mathbf{T}, \mathbf{U})$ par rapport à ce poids.

Dans la proposition suivante, la paire $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ étant fixée, la première sommation est sur toutes les matrices $(\lambda_{i,j})$ appartenant à $\Lambda(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ (*cf.* (4.2)) et la seconde sur les paires $(\mathbf{T}, \mathbf{U})$ de l'ensemble $\mathcal{T}(\lambda_{i,j})$ (*cf.* (4.3)). Enfin, la paire $(\mathbf{c}, \mathbf{d})$ est étendue à toutes les suites $\mathbf{c}$ et $\mathbf{d}$ d'entiers positifs respectivement de longueur k et l.

PROPOSITION 4.1. — *On a l'identité :*

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(\mathbf{s}; \mathbf{p})_{\mathbf{a}+\mathbf{1}} (\mathbf{t}; \mathbf{q})_{\mathbf{b}+\mathbf{1}}} \sum_{(\lambda_{i,j})} \sum_{(\mathbf{T}, \mathbf{U})} H(\mathbf{K}, \mathbf{L}; \mathbf{T}, \mathbf{U}) \\ &\quad = \sum_{\mathbf{c}, \mathbf{d}} \mathbf{s}^{\mathbf{c}} \mathbf{t}^{\mathbf{d}} \sum_{(\lambda_{i,j})} \prod_{i \in K_1} S_{\otimes_j \lambda_{i,j}}(1, p_i, \ldots, p_i^{c_i}) \prod_{i \in K_2} S_{\otimes_j \lambda'_{i,j}}(1, p_i, \ldots, p_i^{c_i}) \\ &\qquad\qquad \times \prod_{j \in L_1} S_{\otimes_i \lambda_{i,j}}(1, q_j, \ldots, q_j^{d_j}) \prod_{j \in L_2} S_{\otimes_i \lambda'_{i,j}}(1, q_j, \ldots, q_j^{d_j}). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Cette proposition est une conséquence banale du lemme suivant déjà prouvé dans [De-Fo1, théorème 4.1], qui s'énonce comme suit :

Lemme. — *Soit ν/θ un diagramme gauche de n éléments. On a alors l'identité :*

$$\sum_T \frac{G(T)}{(t;q)_{n+1}} = \sum_d t^d S_{\nu/\theta}(1,q,q^2,\ldots,q^d),$$

où la première sommation est sur tous les tableaux d'ordre n, de forme ν/θ et la seconde sur tous les entiers $d \geq 0$.

Multiplions l'identité (4.4) par $u^n \mathbf{A}^{\mathbf{a}}\mathbf{B}^{\mathbf{b}}$ et sommons par rapport aux paires $(\mathbf{a},\mathbf{b})$ d'entiers de somme n, puis par rapport à $n \geq 0$. En remarquant que

$$\mathbf{A}^{\mathbf{a}}\mathbf{B}^{\mathbf{b}} = \prod_{i,j} (A_i B_j)^{|\lambda_{i,j}|},$$

on obtient :

$$\begin{aligned}(4.5)\quad \sum_n \sum_{\mathbf{a},\mathbf{b}} \frac{1}{(\mathbf{s};\mathbf{p})_{\mathbf{a}+\mathbf{1}}(\mathbf{t};\mathbf{q})_{\mathbf{b}+\mathbf{1}}} \sum_{(\lambda_{i,j})} \sum_{(\mathbf{T},\mathbf{U})} H(\mathbf{K},\mathbf{L};\mathbf{T},\mathbf{U}) \\ = \sum_n u^n \sum_{(\lambda_{i,j})} (A_i B_j)^{|\lambda_{i,j}|} \sum_{\mathbf{c},\mathbf{d}} \mathbf{s}^{\mathbf{c}}\mathbf{t}^{\mathbf{d}} \\ \times \prod_{i\in K_1} S_{\otimes_j \lambda_{i,j}}(1,p_i,\ldots,p_i^{c_i}) \prod_{i\in K_2} S_{\otimes_j \lambda'_{i,j}}(1,p_i,\ldots,p_i^{c_i}) \\ \times \prod_{j\in L_1} S_{\otimes_i \lambda_{i,j}}(1,q_j,\ldots,q_j^{d_j}) \prod_{j\in L_2} S_{\otimes_i \lambda'_{i,j}}(1,q_j,\ldots,q_j^{d_j}).\end{aligned}$$

Le second membre de (4.5) n'est autre que la somme sur $\mathbf{c}$ et $\mathbf{d}$ du produit du second membre de (3.14) par le monôme $\mathbf{s}^{\mathbf{c}}\mathbf{t}^{\mathbf{d}}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}(4.6)\quad \sum_n \sum_{\mathbf{a},\mathbf{b}} \frac{1}{(\mathbf{s};\mathbf{p})_{\mathbf{a}+\mathbf{1}}(\mathbf{t};\mathbf{q})_{\mathbf{b}+\mathbf{1}}} \sum_{(\lambda_{i,j})} \sum_{(\mathbf{T},\mathbf{U})} H(\mathbf{K},\mathbf{L};\mathbf{T},\mathbf{U}) \\ = \sum_{\mathbf{c},\mathbf{d}} \mathbf{s}^{\mathbf{c}}\mathbf{t}^{\mathbf{d}} \frac{(-u\mathbf{A}_{K_1}\mathbf{B}_{L_2};\mathbf{p},\mathbf{q})_{\mathbf{c}+\mathbf{1},\mathbf{d}+\mathbf{1}}(-u\mathbf{A}_{K_2}\mathbf{B}_{L_1};\mathbf{p},\mathbf{q})_{\mathbf{c}+\mathbf{1},\mathbf{d}+\mathbf{1}}}{(u\mathbf{A}_{K_1}\mathbf{B}_{L_1};\mathbf{p},\mathbf{q})_{\mathbf{c}+\mathbf{1},\mathbf{d}+\mathbf{1}}(u\mathbf{A}_{K_2}\mathbf{B}_{L_2};\mathbf{p},\mathbf{q})_{\mathbf{c}+\mathbf{1},\mathbf{d}+\mathbf{1}}}\end{aligned}$$

En comparant avec l'identité (2.3) à démontrer, il reste donc à établir :

$$(4.7)\qquad P(\mathbf{a},\mathbf{b};\mathbf{K},\mathbf{L};\mathbf{s},\mathbf{t},\mathbf{p},\mathbf{q}) = \sum_{(\lambda_{i,j})} \sum_{(\mathbf{T},\mathbf{U})} H(\mathbf{K},\mathbf{L};\mathbf{T},\mathbf{U}).$$

5. La bijection

Soit $\tau = (\sigma, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ une permutation (k,l)-colorée. Pour chaque couple (i,j) telle que $1 \le i \le k$ et $1 \le j \le l$ notons I_{ij} l'ensemble de tous les entiers de l'intervalle $[\,\mathbf{a}_{i-1}+1, \mathbf{a}_i\,]$, qui sont envoyés par σ dans $[\,\mathbf{b}_{j-1}+1, \mathbf{b}_j\,]$. Notons τ_{ij} la restriction de σ à I_{ij}, qui envoie donc bijectivement $I_{i,j}$ sur $J_{i,j} = \sigma(I_{i,j})$.

Si on reprend l'exemple 2.1, les bijections $\tau_{i,j}$ et leurs inverses $\tau_{i,j}^{-1}$ sont données par :

$$\tau_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 6 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}; \quad \tau_{12} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}; \quad \tau_{21} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix};$$
$$\tau_{22} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 11 & 9 & 8 \end{pmatrix}; \quad \tau_{31} = \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}; \quad \tau_{32} = \begin{pmatrix} 11 \\ 12 \end{pmatrix};$$
$$\tau_{11}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}; \quad \tau_{12}^{-1} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad \tau_{21}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix};$$
$$\tau_{22}^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 11 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}; \quad \tau_{31}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}; \quad \tau_{32}^{-1} = \begin{pmatrix} 12 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Lorsque les éléments de $I_{i,j}$ (resp. $J_{i,j}$) sont écrits en ordre croissant (comme dans les lignes du haut des précédentes matrices), les lignes du bas forment des mots que l'on désigne par les mêmes symboles $\tau_{i,j}$ (resp. $\tau_{i,j}^{-1}$). On note maintenant τ_1, τ_2, …, τ_l (resp. τ_1^{-1}, τ_2^{-1}, …, τ_k^{-1}) le produit de *juxtaposition* des *mots* :

$$\tau_j = \tau_{1,j}\tau_{2,j}\ldots\tau_{k,j}\,; \qquad \tau_i^{-1} = \tau_{i,1}^{-1}\tau_{i,2}^{-1}\ldots\tau_{i,k}^{-1},$$

pour $j = 1, \ldots, l$ et $i = 1, \ldots, k$.

Dans l'exemple traité ci-dessus, on a :

$$\tau_1 = 6,1,4,\mathbf{5},2,\mathbf{3},7\,; \quad \tau_2 = 10,11,\mathbf{9},\mathbf{8},12\,;$$
$$\tau_1^{-1} = 2,3,5,\mathbf{1},\mathbf{4}\,; \quad \tau_2^{-1} = 6,9,\mathbf{8},\mathbf{7}\,; \quad \tau_3^{-1} = 10,12,\mathbf{11}\,;$$

où, dans chaque mot, les éléments de la *ligne inverse de route* ont été reproduits en gras. On peut constater que l'on a : $\mathrm{Ligne}_1\,\tau = \mathrm{Iligne}\,\tau_1^{-1} = \{\mathbf{1},\mathbf{4}\}$, $\mathrm{Ligne}_2\,\tau = \mathrm{Iligne}\,\tau_2^{-1} = \{\mathbf{7},\mathbf{8}\}$, $\mathrm{Ligne}_3\,\tau = \mathrm{Iligne}\,\tau_3^{-1} = \{\mathbf{11}\}$, $\mathrm{Iligne}_1\,\tau = \mathrm{Ligne}_1\,\tau^{-1} = \mathrm{Iligne}\,\tau_1 = \{\mathbf{3},\mathbf{5}\}$, $\mathrm{Iligne}_2\,\tau = \mathrm{Ligne}_2\,\tau^{-1} = \mathrm{Iligne}\,\tau_2 = \{\mathbf{8},\mathbf{9}\}$.

Le résultat est général et simple à vérifier. Nous nous contentons d'énoncer cette propriété sans démonstration.

PROPOSITION 5.1. — *Pour tout* $i = 1, \ldots, k$ *et* $j = 1, \ldots, l$ *on a :*

$$\text{Ligne}_i\,\tau = \text{Iligne}\,\tau_i^{-1}; \qquad \text{Iligne}_j\,\tau = \text{Iligne}\,\tau_j. \tag{5.1}$$

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer (4.7) et par là même le THÉORÈME 2.1. Il s'agit de construire une bijection entre permutations (k,l)-colorées et tableaux gauches de la classe $\mathcal{T}(\lambda_{i,j})$ où $(\lambda_{i,j}) \in \Lambda(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ (*cf.* (4.2) et (4.3)).

THÉORÈME 5.2. — *A toute permutation* (k,l)*-colorée* $\tau = (\sigma, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ *correspond de façon biunivoque :*

(i) *une famille* (λ_{ij}) $(1 \le i \le k\,;\ 1 \le j \le l)$ *de diagrammes de Ferrers tels que pour tout* $i = 1, \ldots, k$ *et* $j = 1, \ldots, l$ *on ait les relations :*

$$|\lambda_{i,1}| + \cdots + |\lambda_{i,l}| = a_i, \qquad |\lambda_{1,j}| + \cdots + |\lambda_{k,j}| = b_j,$$

(ii) *une suite* $(\mathbf{T}, \mathbf{U}) = (T_1, \ldots, T_l, U_1, \ldots, U_k)$ *de* $(l+k)$ *tableaux gauches, d'ordre* $b_1, \ldots, b_l, a_1, \ldots, a_k$ *et de forme* $|T_j| = \lambda_{1,j} \otimes \cdots \otimes \lambda_{k,j}$, $|U_i| = \lambda_{i,1} \otimes \cdots \otimes \lambda_{i,l}$*, ayant la propriété :*

$$\text{Iligne}_j\,\tau - \mathbf{b}_{j-1} = \text{Iligne}\,T_j \quad \text{Ligne}_i\,\tau - \mathbf{a}_{i-1} = \text{Iligne}\,U_i \tag{5.2}$$

pour tout $j = 1, \ldots, l$ *et* $i = 1, \ldots, k$.

L'ingrédient de base de cette bijection est la correspondence de Robinson-Schensted (*cf.*, par exemple, [Knu, p. 48–72] pour un excellent exposé de la question), que l'on prolonge à l'ensemble des tableaux gauches. Soit $\text{Bij}(I, J)$ l'ensemble de toutes les bijections d'un ensemble fini I sur un ensemble J. La correspondance de Robinson-Schensted ρ envoie bijectivement $\text{Bij}(I, J)$ sur l'ensemble de tous les couples (P, Q) de tableaux injectifs, de même forme λ, le contenu de P (resp. Q) étant J (resp. I). Soient $\sigma \in \text{Bij}(I, J)$ et $\rho(\sigma) = (P, Q)$. Alors ρ a la propriété supplémentaire suivante :

$$\text{Iligne}\,\sigma = \text{Iligne}\,P \qquad \text{et} \qquad \text{Iligne}\,\sigma^{-1} = \text{Iligne}\,Q.$$

Partons donc d'une permutation (k,l)-colorée τ. Associons-lui la famille des bijections $(\tau_{i,j} : I_{i,j} \to J_{i,j})$ comme il a été décrit plus haut. La correspondance de Robinson-Schensted envoie chacune des bijections $\tau_{i,j}$ sur un couple $(P_{i,j}, Q_{i,j})$ de tableaux (droits) de la même forme, dont les contenus et les lignes inverses de route sont donnés par :

$$\begin{aligned} \text{Cont}\,P_{i,j} &= J_{i,j}, & \text{Cont}\,Q_{i,j} &= I_{i,j}, \\ \text{Iligne}\,\tau_{i,j} &= \text{Iligne}\,P_{i,j}, & \text{Iligne}\,\tau_{i,j}^{-1} &= \text{Iligne}\,Q_{i,j}. \end{aligned}$$

Soit $\lambda_{i,j}$ la forme commune de $P_{i,j}$ et $Q_{i,j}$. Les tableaux gauches $\overline{T}_j = P_{1,j} \otimes \cdots \otimes P_{k,j}$ et $\overline{U}_i = Q_{i,1} \otimes \cdots \otimes Q_{i,l}$ sont alors de forme $\lambda_{1,j} \otimes \cdots \otimes \lambda_{k,j}$ et $\lambda_{i,1} \otimes \cdots \otimes \lambda_{i,l}$, respectivement. De plus,

$$\operatorname{Cont} \overline{T}_j = \sum_i J_{i,j} = [\mathbf{b}_{j-1} + 1, \mathbf{b}_j], \quad \operatorname{Cont} \overline{U}_i = \sum_j I_{i,j} = [\mathbf{a}_{i-1} + 1, \mathbf{a}_i]$$

et donc $|\lambda_{1,j}| + \cdots + |\lambda_{k,j}| = b_j, \quad |\lambda_{i,1}| + \cdots + |\lambda_{i,l}| = a_i$.

Pour chaque $i = 1, \ldots, k$ soit Iligne$(\leftarrow P_{i,j})$ (resp. Iligne$(\leftarrow \tau_{i,j})$) l'ensemble de tous les entiers s dans $[\mathbf{b}_{j-1} + 1, \mathbf{b}_j - 1]$ tels que s soit dans $P_{i,j}$ (resp. soit une lettre de $\tau_{i,j}$) et tels que $(s+1)$ apparaisse dans $P_{i',j}$ (resp. dans $\tau_{i',j}$) pour un certain $i' < i$. Comme dans le produit $P_{1,j} \otimes \cdots \otimes P_{k,j}$ le tableau $P_{i',j}$ se trouve en haut et à gauche de $P_{i,j}$ si $i' < i$, on a : $\sum_i \text{Iligne}(\leftarrow \tau_{i,j}) = \sum_i \text{Iligne}(\leftarrow P_{i,j})$. Par suite :

$$\begin{aligned}
\text{Iligne}\, \overline{T}_j &= \text{Iligne}\, P_{1,j} \otimes \cdots \otimes P_{k,j} = \sum_i \text{Iligne}\, P_{i,j} + \sum_i \text{Iligne}(\leftarrow P_{i,j}) \\
&= \sum_i \text{Iligne}\, \tau_{i,j} + \sum_i \text{Iligne}(\leftarrow \tau_{i,j}) \\
&= \text{Iligne}\, \tau_{1,j} \cdots \tau_{k,j} = \text{Iligne}\, \tau_j = \text{Iligne}_j\, \tau,
\end{aligned}$$

d'après (5.1). De la même manière, Iligne $\overline{U}_i = \text{Ligne}_i\, \tau$.

On obtient enfin la suite $(\mathbf{T}, \mathbf{U}) = (T_1, \ldots, T_l, U_1, \ldots, U_k)$ en partant de la suite $(\overline{T}_1, \ldots, \overline{T}_l, \overline{U}_1, \ldots, \overline{U}_k)$ et en remplaçant chaque élément r du tableau $\overline{T}_j$ (resp. $\overline{U}_i$) par l'élément $r - \mathbf{b}_{j-1}$ (resp. $r - \mathbf{a}_{i-1}$). Les tableaux qui en résultent sont alors d'ordre $b_1, \ldots, b_l, a_1, \ldots, a_k$. Les relations (5.2) sont alors vérifiées.

Ceci achève la démonstration du théorème 5.2.

Illustrons la construction du précédent théorème à l'aide de l'exemple considéré tout au long de cet article. Les différents éléments τ_{ij} sont envoyés sur les couples de tableaux :

$$\tau_{11} \mapsto (P_{1,1}, Q_{1,1}) = \begin{pmatrix} 6 & & & & 2 & & \\ 1 & 4 & 5 & , & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}; \quad \tau_{1,2} \mapsto (P_{1,2}, Q_{1,2}) = (10,\ 4)\ ;$$

$$\tau_{2,1} \mapsto (P_{2,1}, Q_{2,1}) = (2,\ 6)\ ; \quad \tau_{2,2} \mapsto (P_{2,2}, Q_{2,2}) = \begin{pmatrix} 11 & & 9 \\ 9 & & 8 \\ 8 & , & 7 \end{pmatrix};$$

$$\tau_{3,1} \mapsto (P_{31}, Q_{3,1}) = (3\ 7\ ,\ 10\ 12) \quad \tau_{3,2} \mapsto (P_{3,2}, Q_{32}) = (12,\ 11).$$

D'où l'on a :

$$T_1 = \begin{array}{cccccc} 6 & & & & & \\ 1 & 4 & \mathbf{5} & & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & \mathbf{3} & 7 \end{array}\ ; \qquad T_2 = \begin{array}{ccc} 3 & & \\ & 4 & \\ & \mathbf{2} & \\ & \mathbf{1} & \\ & & 5 \end{array}\ ;$$

$$U_1 = \begin{array}{cccc} 2 & & & \\ \mathbf{1} & 3 & 5 & \\ & & & \mathbf{4} \end{array}\ ; \qquad U_2 = \begin{array}{cc} 1 & \\ & 4 \\ & \mathbf{3} \\ & \mathbf{2} \end{array}\ ; \qquad U_3 = \begin{array}{ccc} 1 & 3 & \\ & & \mathbf{2} \end{array}\ .$$

6. Spécialisations

Dans [De-Fo1] les identités *linéaires* sur les fonctions de Schur avaient été exploitées pour obtenir des identités sur les polynômes générateurs des *involutions* par rapport à des statistiques d'ordre. Remmel [Re3] a prolongé ces résultats au cas des bipermutations $(\sigma; \mathbf{a}, \mathbf{b})$ pour lesquelles σ est une involution. Suivant la méthode développée dans cet article, on peut obtenir des identités concernant les involutions (k,l)-colorées, pour une paire (k,l) quelconque. Nous ne le ferons pas ici. En revanche, nous aimerions donner quelques spécialisations des formules (2.3) et (2.4).

Convenons d'écrire des_{a_i}, $\mathrm{maj}_{a_i}, \ldots$, pour des_i, $\mathrm{maj}_i, \ldots$, lorsque les nombres de descentes et les indices majeurs sont calculés par rapport à la partition $\mathbf{a}$. Prenons d'abord $\mathbf{K} = (\{1\},\{2\})$, $\mathbf{L} = (\{1\},\emptyset)$, puis faisons les substitutions $B \leftarrow 1$, $A_2 \leftarrow z$, $A_1 \leftarrow 1$, $p_1 \leftarrow q_1$, $p_2 \leftarrow q_1$, $q \leftarrow q_2$ dans l'identité (2.4). Celle-ci devient :

$$\sum_n C_n(z, q_1, q_2) \frac{u^n}{(q_1;q_1)_n (q_2,q_2)_n} = \frac{(-zu; q_1, q_2)_{\infty,\infty}}{(u; q_1, q_2)_{\infty,\infty}}, \tag{6.1}$$

c'est-à-dire l'extension à deux bases de la formule q-binomiale avec l'interprétation combinatoire

$$C_n(z; q_1, q_2) = \sum_{a_1 + a_2 = n} z^{a_2} \begin{bmatrix} n \\ a_1 \end{bmatrix}_{q_1} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} q_1^{\mathrm{maj}_{a_1} \sigma + \mathrm{comaj}_{a_2} \sigma} q_2^{\mathrm{imaj}\, \sigma},$$

interprétation différente de celle trouvée dans [De-Fo1].

Posons maintenant :

$$A_n(s,q) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} s^{\mathrm{des}\, \sigma} q^{\mathrm{imaj}\, \sigma}; \qquad B_n(s,q) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} s^{\mathrm{codes}\, \sigma} q^{\mathrm{imaj}\, \sigma}.$$

L'identité (2.3) se spécialise aisément en :

$$\sum_n \frac{u^n}{(q;q)_n} A_n(s,q) = \frac{1-s}{-s+(u(1-s);q)_\infty}, \tag{6.2}$$

$$\sum_n \frac{u^n}{(q;q)_n} B_n(s,q) = \frac{1-s}{-s+(-u(1-s);q)_\infty^{-1}}, \tag{6.3}$$

deux expressions bien connues pour les q-analogues des polynômes eulériens (*cf.* [St2], [De]). A leur tour, (6.2) et (6.3) se réduisent à l'identité classique donnant la fonction génératrice des polynômes eulériens ordinaires.

Prenons maintenant $\mathbf{K}$ quelconque et $\mathbf{L} = (\{1\}, \emptyset)$. De plus, si $\sum_i a_i = n$, posons :

$$P_{\mathbf{a}}(\mathbf{s}, q) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \Bigl(\prod_{i \in K_1} s_i^{\mathrm{des}_{a_i} \sigma}\Bigr)\Bigl(\prod_{i \in K_2} s_i^{\mathrm{codes}_{a_i} \sigma}\Bigr) q^{\mathrm{imaj}\,\sigma}.$$

On déduit aisément de (2.3), (6.2) et (6.3) la relation :

$$P_{\mathbf{a}}(\mathbf{s}, q) = \begin{bmatrix} a_1 + \cdots + a_k \\ a_1, \ldots, a_k \end{bmatrix}_q \prod_{i \in K_1} A_{a_i}(s_i, q) \prod_{i \in K_2} B_{a_i}(s_i, q). \tag{6.4}$$

Cette dernière relation peut s'établir directement si l'on se souvient (*cf.* [Fo-Sch2]) que sur le groupe $\mathfrak{S}_n$, les paires de statistiques $(\mathrm{des}, \mathrm{inv})$, $(\mathrm{des}, \mathrm{imaj})$ et $(\mathrm{ides}, \mathrm{maj})$ (où l'on a noté "$\mathrm{inv}\,\sigma$" le *nombre d'inversions* de σ) sont identiques. Il suffit, en effet, d'établir (6.4) pour les statistiques : $(\mathrm{des}_{a_i})_{i \in K_1}$, $(\mathrm{codes}_{a_i})_{i \in K_2}$, inv.

BIBLIOGRAPHIE

[Be-Reg] Berele (A.) and Regev (A.). — Hook Young diagrams with applications to combinatorics and to representations of Lie superalgebras, *Adv. in Math.*, t. **64**, 1987, p. 118–175.

[Be-Rem] Berele (A.) and Remmel (J.B.). — Hook flag characters and their combinatorics, *J. Pure and Appl. Algebra*, t. **35**, 1985, p. 222-245.

[Car1] Carlitz (Leonard). — q-Bernoulli and Eulerian numbers, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **76**, 1954, p. 332–350.

[Car2] Carlitz (Leonard). — Eulerian numbers and polynomials, *Math. Magazine*, t. **33**, 1959, p. 247–260.

[Car3] Carlitz (Leonard). — A combinatorial property of q-Eulerian numbers, *Amer. Math. Monthly*, t. **82**, 1975, p. 51–54.

[Car4] Carlitz (Leonard). — The Expansion of certain Products, *Proc. Amer. Math. Soc.*, t. **7**, 1956, p. 558–564.

[Che-Mo] Cheema (M.S.) and Motzkin (T.S.). — Multipartitions and Multipermutations, *Combinatorics* [Los Angeles. 1968], p. 39–70. — Providence, Amer. Math. Soc., 1971 (*Proc. Symposia in Pure Math.*, **19**).

[De] Désarménien (Jacques). — Fonctions symétriques associées à des suites classiques de nombres, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, t. **16**, 1983, p. 271–304.

[De-Fo1] Désarménien (Jacques) et Foata (Dominique). — Fonctions symétriques et séries hypergéométriques basiques multivariées, *Bull. Soc. Math. France*, t. **113**, 1985, p. 3–22.

[De-Fo2] Désarménien (Jacques) et Foata (Dominique). — Fonctions symétriques et séries hypergéométriques basiques multivariées, II, *Combinatoire Énumérative* [Actes Colloque Univ. Québec, Montréal. 1985], p. 68–90. — Berlin, Springer-Verlag, 1987 (*Lecture Notes in Math.*, **1234**).

[Fo1] Foata (Dominique). — Distributions eulériennes et mahonniennes sur le groupe des permutations, *Higher Combinatorics* [M. Aigner, ed., Berlin. 1976], p. 27–49. — Amsterdam, D. Reidel, 1977 (Proc. NATO Adv. Study Inst.).

[Fo-Sch1] Foata (Dominique) et Schützenberger (Marcel-Paul). — *Théorie géométrique des polynômes eulériens.* — Berlin, Springer-Verlag, 1970 (*Lecture Notes in Math.*, **138**).

[Fo-Sch2] Foata (Dominique) et Schützenberger (Marcel-Paul). — Major Index and Inversion of Permutations, *Math. Nachr.*, t. **83**, 1978, p. 143–159.

[Foulk] Foulkes (Herbert). — Enumeration of Permutations with Prescribed Up-down and Inversion Sequences, *Discrete Math.*, t. **15**, 1976, p. 235–252.

[Ga-Ge] Garsia (Adriano M.) and Gessel (Ira). — Permutation Statistics and Partitions, *Advances in Math.*, t. **31**, 1979, p. 288–305.

[Ge] Gessel (Ira). — Generating functins and enumeration of sequences, Ph.D. thesis, department of mathematics, M.I.T., Cambridge, Mass., 111 p., 1977.

[Ja-Ke] James (Gordon) and Kerber (Adalbert). — *The Representation Theory of the Symmetric Group.* — Reading, Mass., Addison-Wesley, 1981 (*Encyclopedia of Math. and Its Appl.*, **16**).

[Knu] Knuth (Donald E.). — *The Art of Computer Programming,* vol. 3, Sorting and Searching. — Don Mills, Ontario, Addison-Wesley, 1972.

[La-Sch1] Lascoux (Alain) et Schützenberger (Marcel-Paul). — A new statistics on words, *Combinatorial Mathematics, Optimal Designs and their Applications* [J. Srivastava, ed., Fort Collins, Colorado. 1978], p. 251–255. — Amsterdam, North-Holland, 1980 (*Annals of Discrete Math.*, **6**).

[La-Sch2] Lascoux (Alain) et Schützenberger (Marcel-Paul). — Sur une conjecture de H.O. Foulkes, *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. **286A**, 1978, p. 385–387.

[La-Sch3] Lascoux (Alain) et Schützenberger (Marcel-Paul). — Formulaire raisonné des fonctions symétriques, L.I.T.P., U.E.R. Math., Univ. Paris VII, 138 p., 1984.

[La-Sch4] Lascoux (Alain) et Schützenberger (Marcel-Paul). — Le monoïde plaxique, *Non-commutative Structures in Algebra and geometric Combinatorics* [A. de Luca, ed., Napoli. 1978], p. 129–156. — Roma, Consiglio Nazionale delle Ricerche, 1981 (*Quaderni de "La Ricerca Scientifica"*, **109**).

[Macd] Macdonald (Ian G.). — *Symmetric Functions and Hall Polynomials.* — Oxford, Clarendon Press, 1979.

[Mac1] MacMahon (Percy Alexander). — The indices of permutations and the derivation therefrom of functions of a single variable associated with the permutations of any assemblage of objects, *Amer. J. Math.*, t. **35**, 1913, p. 314–321.

[Mac2] MacMahon (Percy Alexander). — *Combinatory Analysis,* vol. 1. — Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1915 (Réimprimé par Chelsea, New York, 1955).

[Mac3] MacMahon (Percy Alexander). — Two applications of general theorems in combinatory analysis, *Proc. London Math. Soc.*, t. **15**, 1916, p. 314–321.

[Mac4] MacMahon (Percy Alexander). — *Collected Papers*, vol. 1 [G.E. Andrews, ed.]. — Cambridge, Mass., The M.I.T. Press, 1978.

[Ra1] Rawlings (Don). — Generalized Worpitzky Identities with Applications to Permutation Enumeration, *Europ. J. Comb.*, t. **2**, 1981, p. 67–78.

[Ra2] Rawlings (Don). — The Combinatorics of certain Products, *Proc. Amer. Math. Soc.*, t. **83**, 1983, p. 560–562.

[Re1] Remmel (J.B.). — The combinatorics of (k,l)-hook Schur functions, *Cont. Math.*, t. **34**, 1984, p. 253–287.

[Re2] Remmel (J.B.). — A bijective proof of a factorization theorem for (k,l)-hook Schur functions, Preprint, Univ. Calif. San Diego, 1985.

[Re3] Remmel (J.B.). — Permutation Statistics and (k,l)-hook Schur functions, *Discrete Math.*, à paraître.

[Ro] Roselle (David P.). — Coefficients associated with the Expansion of certain Products, *Proc. Amer. Math. Soc.*, t. **45**, 1974, p. 144–150.

[Sch1] Schützenberger (Marcel-Paul). — Quelques remarques sur une construction de Schensted, *Math. Scand.*, t. **12**, 1963, p. 117–128.

[Sch2] Schützenberger (Marcel-Paul). — La correspondance de Robinson, *Combinatoire et représentation du groupe symétrique* [Actes Table Ronde C.N.R.S., Strasbourg. 1976], p. 59–113. — Berlin, Springer-Verlag, 1977 (*Lecture Notes in Math.*, **579**).

[St1] Stanley (Richard P.). — *Ordered Structures and Partitions.* — Providence, R.I., Amer. Math. Soc., 1972 (*Memoirs Amer. Math. Soc.*, **119**).

[St2] Stanley (Richard P.). — Binomial posets, Möbius inversion, and permutation enumeration, *J. Combinatorial Theory Ser. A*, t. **20**, 1976, p. 336–356.

[Wy] Wybourne (Brian G.). — *Symmetry principles and atomic spectroscopy.* New York, Wiley 1970.

Jacques Désarménien,
Département d'informatique,
Institut universitaire de technologie,
Université Robert-Schumann,
72, route du Rhin,
F-67400 Illkirch-Graffenstaden.
email : A18630@FRCCSC21.BITNET

Dominique Foata,
Département de mathématique,
Université Louis-Pasteur,
7, rue René-Descartes,
F-67084 Strasbourg Cedex.
email : A18621@FRCCSC21.BITNET