# REKURRENTE UND TRANSIENTE BÄUME

Peter GERL (Salzburg)

## 1) Irrfahrten in Graphen

Wir betrachten im folgenden nur lokal endliche und zusammenhängende Graphen. Stellen wir uns vor, daß ein Teilchen durch diesen Graphen jeweils von einer Ecke zu einer Nachbarecke wandert, wobei alle Nachbarecken gleichberechtigt sind. Man spricht dann von einer Irrfahrt in einem Graphen. Wenn das Teilchen mit Sicherheit (Wahrscheinlichkeit eins) jemals wieder zur Startecke zurückkehrt, so heißt die Irrfahrt (bzw. der Graph) rekurrent, andernfalls transient (das Teilchen geht verloren). Im folgenden sollen Bäume auf Rekurrenz bzw. Transienz untersucht werden.

Zunächst einige Bezeichnungen und Definitionen: In einem Graphen schreiben wir für den Grad einer Ecke x stets d(x). Eine Irrfahrt in einem Graphen ist eine Markovkette über den Ecken mit Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{d(x)}, & \text{wenn } x,y \text{ benachbart} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir schreiben dann

$$W\left(x \xrightarrow[\text{Schritten}]{\text{in } n} y\right) = p^n(x,y) = \sum_z p(x,z)\, p^{n-1}(z,y).$$

Insbesondere ist also für eine feste Ecke e

$$p^{2n}(e,e) = W\left(e \xrightarrow[\text{Schritten}]{\text{in } 2n} e\right)$$

die Wahrscheinlichkeit, bei Start in e nach 2n Schritten wieder zu e zurückzukehren. Ein Graph heißt __rekurrent__, wenn $\sum_n p^{2n}(e,e) = \infty$ (Teilchen kommt sicher zurück)

__transient__, wenn $\sum_n p^{2n}(e,e) < \infty$ (Teilchen geht verloren)

(diese Summe ist nichts anderes als der Erwartungswert für die Anzahl der Besuche in e). Äquivalent dazu ist die Aussage:

$$\text{rekurrent} \iff W(e \xrightarrow[(\infty\ \text{oft})]{\text{jemals}} e) = 1$$

$$\text{transient} \iff W(e \xrightarrow[(\infty\ \text{oft})]{\text{jemals}} e) < 1.$$

Man überlegt sich leicht, daß diese Begriffe von der Wahl der Ecke e unabhängig sind. Da wir nach Definition stets

$$d(x)\ p(x,y) = d(y)\ p(y,x)$$

haben, ist jede Irrfahrt in einem Graphen __reversibel__ (aber im allgemeinen nicht symmetrisch).

Mehr über Irrfahrten findet man z.B in [1].

## __2) $\mathbb{Z}^d$ und spannende Bäume $B_d$__

$\mathbb{Z}^d$ bezeichnet wie üblich die Gitterpunkte in $\mathbb{R}^d$ verbunden durch Parallele zu den Koordinatenachsen. Jede Ecke des $\mathbb{Z}^d$ hat Grad 2d. Bereits 1921 hat G. POLYA ([4]) gezeigt:

$$\begin{array}{ll} \mathbb{Z}^1,\ \mathbb{Z}^2 & \text{sind rekurrent} \\ \mathbb{Z}^d\ (d \geq 3) & \text{ist transient.} \end{array}$$

Man weiß noch viel mehr, nämlich

$$p^{2n}(e,e) \underset{(n\to\infty)}{\sim} C_d \cdot n^{-d/2} \text{ im } \mathbb{Z}^d.$$

Wir betrachten nun die spannenden Bäume $B_d$ des $\mathbb{Z}^d$:
In $B_d$ gelangt man vom Ursprung $(0, \ldots, 0)$ zum Gitterpunkt $(a_1, \ldots, a_d)$ längs des Weges

$$(0,0,\dots,0) \xrightarrow[\parallel x_1\text{-Achse}]{} (a_1,0,\dots,0) \xrightarrow[\parallel x_2\text{-Achse}]{} \dots \xrightarrow[\parallel x_d\text{-Achse}]{} (a_1,a_2,\dots,a_d).$$

Dann stellt sich heraus (siehe [2]), daß diese Bäume $B_d$ für alle $d = 1,2,3,\dots$ rekurrent sind und sogar genauer:

$$p^{2n}(e,e) \underset{(n\to\infty)}{\sim} c_d \cdot n^{-1+2^{-d}} \quad \text{in } B_d.$$

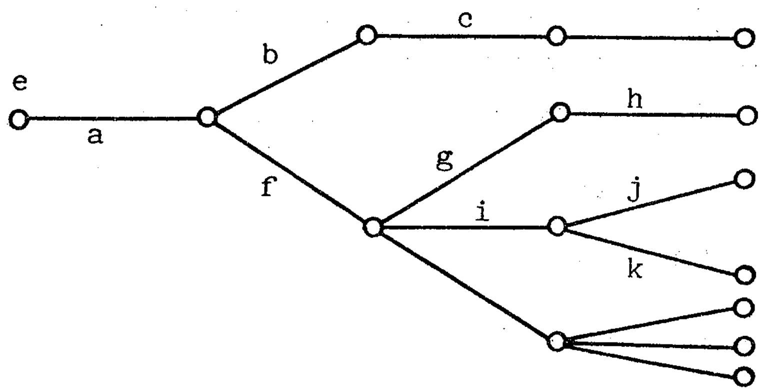
Insbesondere hat man also: $\mathbb{Z}^3$ ist transient, aber der spannende Baum $B_3$ ist rekurrent. Das führt zu der

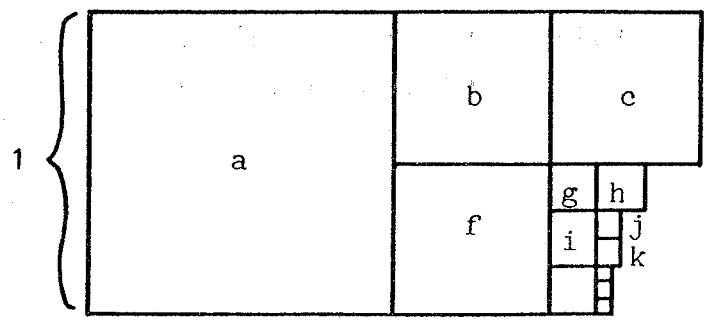
<u>Frage:</u> Gibt es Bäume im $\mathbb{Z}^3$ (als Teilgraphen), die transient sind?
(Eine Antwort wird in 4) gegeben)

## <u>3) Welche Bäume sind rekurrent (transient)?</u>

Wir übersetzen zunächst ein Kriterium für die Transienz von reversiblen Markovketten [3] in eine anschauliche Bedingung für Bäume. Dazu ordnen wir als erstes jedem Wurzelbaum ohne Endecken (das sind Ecken vom Grad eins) mit Wurzel e eine Folge von Quadraten wie folgt zu:

B:



Jeder Kante entspricht ein Quadrat; den Kanten durch e entsprechen Quadrate der Seitenlänge 1. Ist einer Kante k ein Quadrat der Seitenlänge l zugeordnet und hat die Endecke von k den Grad d(>1), so entstehen d-1 neue Quadrate der Seitenlänge l/(d-1). Wir nennen dann den <u>Inhalt des Wurzelbaumes B</u> die Zahl

$$I(B) = \Sigma \text{ (Flächen der zugeordneten Quadrate).}$$

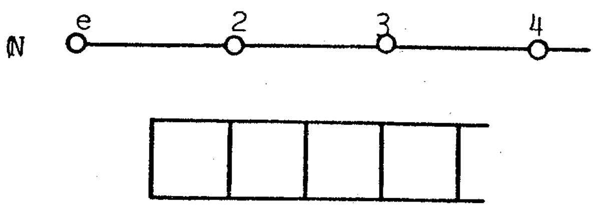
Dann gilt:

$$\left.\begin{array}{l}\text{B hat einen Teilbaum}\\ \text{B' (ohne Endecken) von}\\ \text{endlichem Inhalt } I(B')<\infty\end{array}\right\} \Longrightarrow \text{ B ist transient.}$$

Daraus ergibt sich sofort:

1) Ist $B_1$ ein Teilbaum von $B_2$ und
   a) $B_1$ transient $\Longrightarrow B_2$ transient
   b) $B_2$ rekurrent $\Longrightarrow B_1$ rekurrent.

2) Der kahle Baum $\mathbb{N}$ (nur ein Stamm, keine Äste) ist rekurrent ($I(\mathbb{N}) = \infty$).



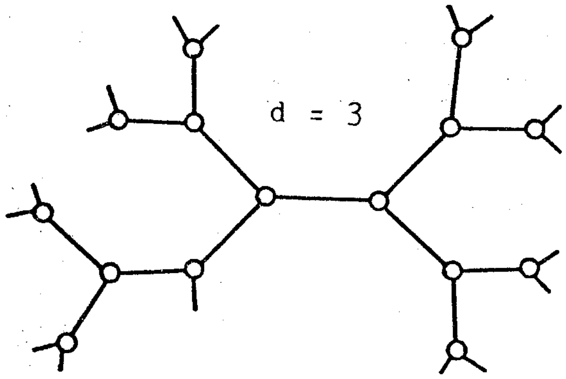

<u>4) Beispiele und offene Probleme</u>

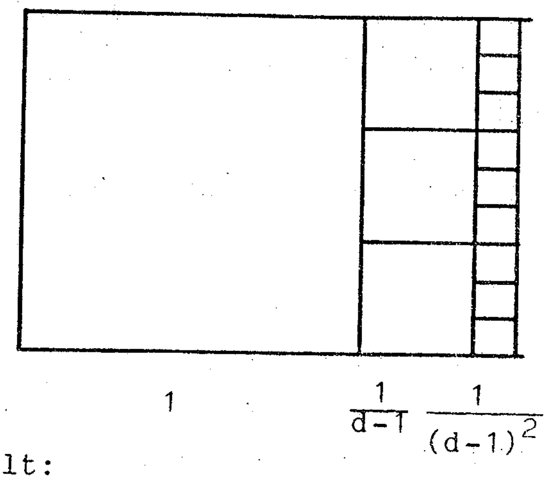
Jedem Baum B mit einer Ecke e kann man die Funktion

$$f_B(n) = \# \text{ (Ecken von B in Entfernung} \leq n \text{ von e)}$$

zuordnen. Unter dem <u>Wachstum von B</u> versteht man das Wachstumsverhalten der monotonen Funktion $f_B$; dieser Begriff ist im wesentlichen (nach Einführung einer geeigneten Äquivalenzrelation) von der Wahl der Ecke e unabhängig.

A) $H_d$ = homogener Baum vom Grad $d \geq 2$ (alle Ecken haben den Grad d).




Damit ergibt sich als Inhalt:

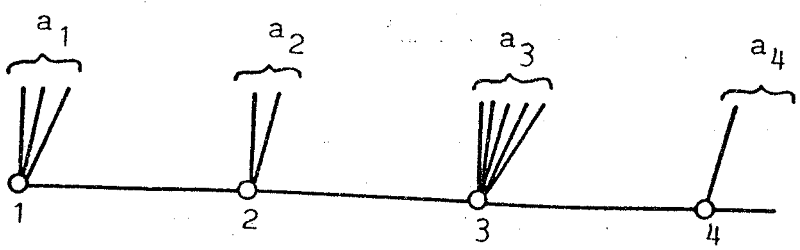
$$I(H_d) = d \sum_k \left(\frac{1}{d-1}\right)^k = \frac{d(d-1)}{d-2} < \infty \text{ für } d \geq 3.$$

Aso: $H_2 = \mathbb{Z}$ ist <u>rekurrent</u> ($H_2$ hat lineares Wachstum)

$H_d (d \geq 3)$ ist <u>transient</u> ($H_d$ hat exponentielles Wachstum).

B) $B_d$ = Spannende Bäume des $\mathbb{Z}^d$ (wie in 2)).
$B_d$ hat das gleiche Wachstum wie $\mathbb{Z}^d$ (also polynomial vom Grad d) und ist für jedes d = 1,2, ... <u>rekurrent</u>.

C) Bäume vom Typ $C(a_i)$ ($a_i \geq 0$, ganz).




(an den kahlen Baum $\mathbb{N}$ werden in der Ecke i $a_i$ Exemplare von $\mathbb{N}$ angehängt). Da jeder Teilbaum von $C(a_i)$ unendlichen Inhalt hat, ist jeder solche Baum <u>rekurrent</u>. Das Wachstum dieser Bäume kann ganz beliebig sein.

Das zeigt also, daß bei Bäumen der Begriff Rekurrenz nichts mit dem Begriff Wachstum zu tun zu haben scheint. Auf der anderen Seite konnte für große Klassen von Cayley-Graphen C(G) diskreter Gruppen bewiesen werden ( [5]):

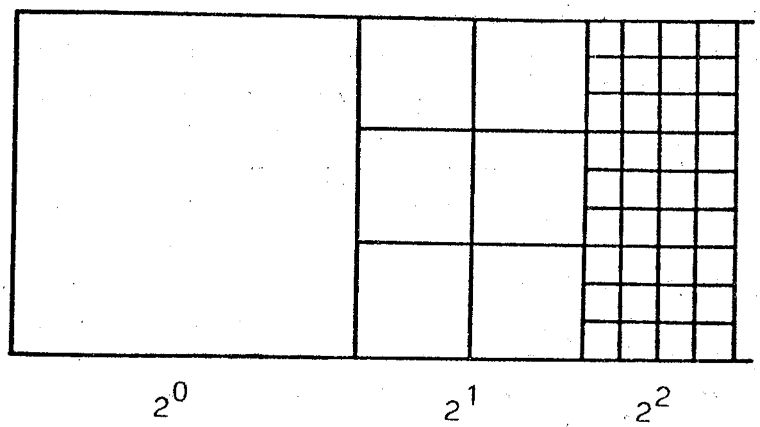
$$C(G) \text{ ist rekurrent} \Longleftrightarrow \sum_n \frac{n}{f_G(n)} = \infty$$

($f_G$ ist wieder die Wachstumsfunktion von C(G)). Das führt zu der

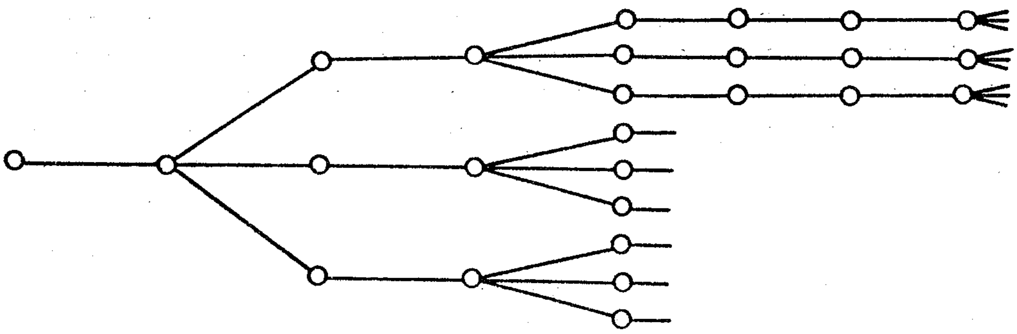
<u>Vermutung</u>: Alle "langsam" wachsenden Graphen sind rekurrent (wobeifür einen Graphen G "langsam" wachsend etwa $f_G(n) \leq C \cdot n^2$ oder $\sum_n \frac{n}{f_G(n)} = \infty$ heißen kann).

D) Wir wollen jetzt transiente Bäume finden, die "langsam" wachsen (bisher kennen wir nur Beispiele, die exponentiell wachsen). Dazu suchen wir einen Baum B mit Inhalt

$$I(B) = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1 + 2 \cdot \frac{1}{3} + 2^2 \cdot \frac{1}{3^2} + \ldots < \infty$$

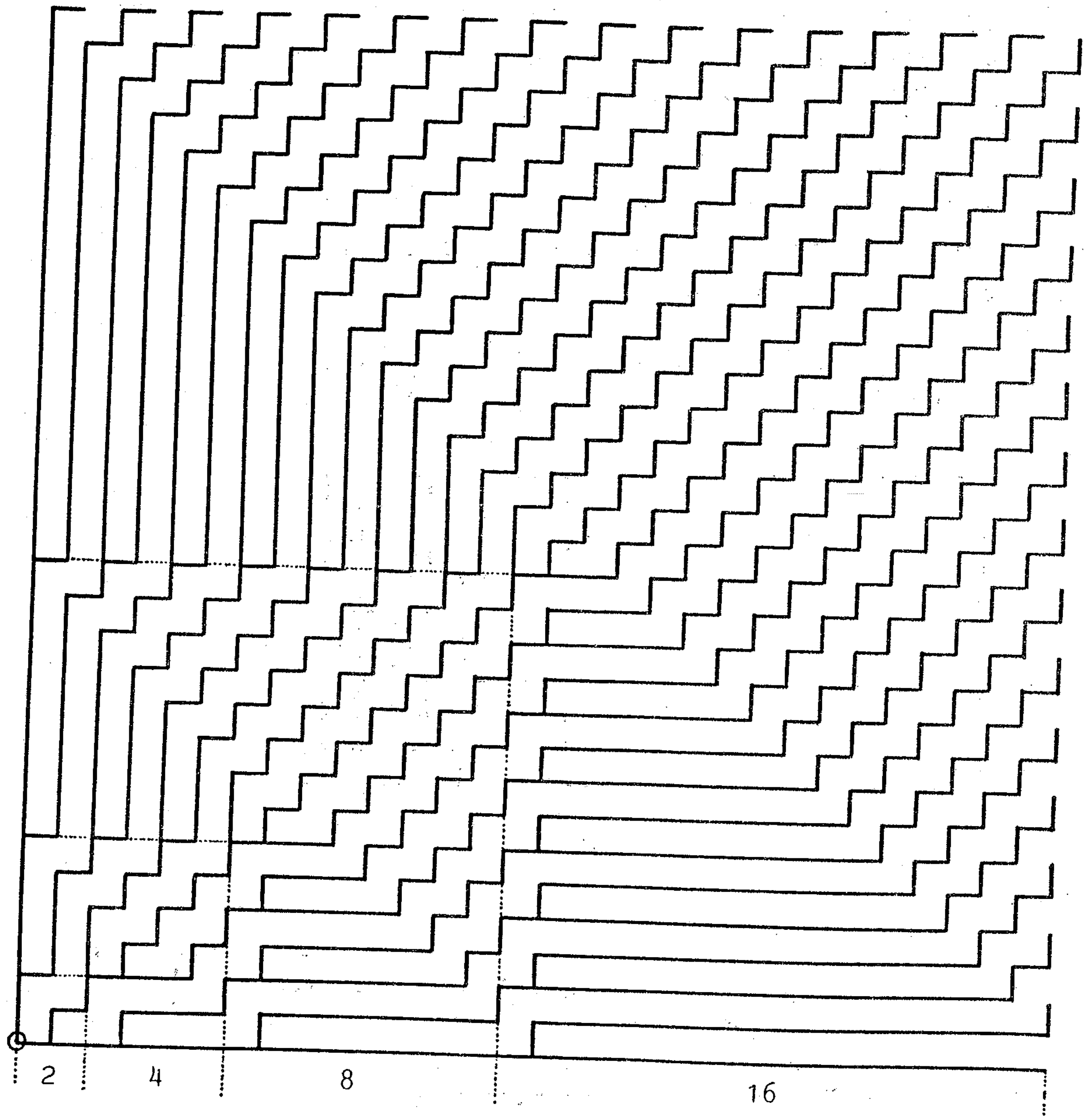



das entspricht

B: 

Dieser Baum B ist transient und das gilt natürlich auch noch für alle Bäume, die daraus durch kleine Modifikationen entstehen (z.B. mehr Verzweigungen oder Auseinanderziehen der Verzweigungsecken um einen konstanten Faktor usw.).

Wir betrachten jetzt den folgenden spannenden Baum BT(3) des $\mathbb{Z}^3$, der im Grund- und Aufriß so aussieht:




BT(3) ist also spannender Baum des $\mathbb{Z}^3$ und transient; BT(3) hat polynomiales Wachstum vom Grad 3 (wie $\mathbb{Z}^3$).

Wir haben also gesehen, daß $\mathbb{Z}^3$ sowohl rekurrente als auch transiente spannende Bäume besitzt.

<u>Problem:</u> Welche Teilbäume des $\mathbb{Z}^3$ sind transient?

## 5) Literatur

[1] P. GERL: Wachstum und Irrfahrten bei Gruppen und Graphen. Publ. IRMA, Strasbourg (1984), 1-38

[2] P. GERL: Natural spanning trees of $\mathbb{Z}^d$ are recurrent. preprint ($\pi\alpha\mu$ , Arbeitsbericht des Instituts für Mathematik der Universität Salzburg, 1-2 (1984), 147-152)

[3] T. LYONS: A simple criterion for transience of a reversible Markov chain. The Annals of Prob. 11(1983), 393-402

[4] G. POLYA: Über eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung betreffend die Irrfahrt im Straßennetz. Math. Ann. 89 (1921), 149-160

[5] N.Th. VAROPOULOS: Brownian motion and transient groups. Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 33 (1983), 241-261

Peter GERL
Mathematisches Institut der
Universität Salzburg
Petersbrunnstraße 19
A-5020 Salzburg