Guo-Niu HAN

THÈSE
présentée pour obtenir
le grade de *DOCTEUR*

Domaine : *MATHÉMATIQUE*

Titre : CALCUL DENERTIEN

Soutenue le 17 janvier 1992 devant la Commission d'Examen :

MM. D. Foata, Président du Jury,
J.-P. Jouanolou, Rapporteur interne,
A. Lascoux, Rapporteur externe,
J. Désarménien,
M. Mignotte.

1991 476/TS-29

UNIVERSITÉ LOUIS PASTEUR

Département de Mathématique

INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE

Unité associée au C.N.R.S. 001

STRASBOURG

THÈSE

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR

par

Guo-Niu HAN

A.M.S. Subject Classification (1980) 05A15 05A17 33A15 33A75

Mots clefs : Statistiques euler-mahoniennes, nombre d'inversions, indice majeur, permutations, mots, réarrangements, commutation, tableaux de Young, nombres de Kostka, nombres de Genocchi, q-analogues.

Titre : CALCUL DENERTIEN

Soutenue le 17 janvier 1992 devant la Commission d'Examen :

MM. D. Foata, Président du Jury,
J.-P. Jouanolou, Rapporteur interne,
A. Lascoux, Rapporteur externe,
J. Désarménien,
M. Mignotte.

TABLE DES MATIÈRES

Remerciements 3
CHAPITRE 0. — Introduction 5
CHAPITRE 1. — La statistique de Denert 9
PARTIE 1.1. — Distribution Euler-mahonienne : une correspondance 11
PARTIE 1.2. — Une nouvelle bijection pour la statistique de Denert 17
PARTIE 1.3. — La troisième transformation fondamentale 23
CHAPITRE 2. — Statistique sur les tableaux de Young 73
PARTIE 2.1. — Croissance des polynômes de Kostka 75
PARTIE 2.2. — Polynômes de Kostka-Foulkes : une étude statistique 81
CHAPITRE 3. — Symétries trivariées sur les nombres de Genocchi . 103
Index 119

REMERCIEMENTS

Je tiens d'abord à exprimer toute ma reconnaissance à M. Dominique Foata sous la direction et avec l'aide duquel ce travail a été effectué. Ses conseils judicieux et sa grande expérience tant sur le plan mathématique que sur le plan humain ainsi que son allant permanent et sa disponibilité, m'ont été très profitables depuis mon arrivée à Strasbourg.

Je ne saurais oublier M. A. Lascoux pour son étroite collaboration de tous les instants ; il m'a fait bénéficier de sa grande expérience en mathématique et m'a soutenu de façon indéfectible avec une extrême gentillesse et m'a donné beaucoup de courage en face de toutes les difficultés rencontrées durant mes séjours à Ivry. Qu'il trouve ici l'expression de toute ma gratitude.

Je remercie vivement M. J.-P. Jouanolou, qui a fidèlement écouté mes exposés au séminaire, et a bien voulu rapporter sur mes travaux. Je remercie également MM. J. Désarménien et M. Mignotte qui m'ont fait le grand plaisir de juger ce travail en participant au jury.

Mes remerciements vont aussi à M. M.-P. Schützenberger qui m'a consacré beaucoup de son temps précieux pour de nombreuses discussions sur les mathématiques et l'informatique qui m'ont beaucoup aidé.

Je tiens également à remercier mes collègues D. Dumont et J. Zeng sans l'aide desquels ce travail n'aurait pu être mené à bien. Enfin Raymond Seroul a eu la gentillesse de me faire bénéficier de tout son savoir-faire en typographie informatique.

CHAPITRE 0

INTRODUCTION

Le titre initial qui avait été donné à cette thèse était "Études statistiques sur le groupe symétrique et les tableaux de Young." En effet, le but de ce travail était d'étudier les propriétés d'une large classe de statistiques sur ces dernières structures. Dans la rédaction finale, le chapitre 1 a pris une place tellement prépondérante qu'il a fourni en fait le titre de la thèse.

On sait depuis MacMahon [MacM] que les statistiques *indice majeur* ("maj") et *nombre d'inversions* ("inv") ont même distribution non seulement sur le groupe symétrique, mais aussi sur toute classe de réarrangements d'un mot (avec éventuellement répétition d'une même lettre). Il en est de même des statistiques *nombre d'excédances* ("exc") et *nombre de descentes* ("des"). Le polynôme générateur de "des" (donc de "exc") sur le groupe symétrique est le *polynôme eulérien* [F-S] et le polynôme générateur du couple (des, maj) est le q-analogue de ce polynôme. On dit encore que ce couple est *euler-mahonien*. La question naturelle qui se posait était de trouver la statistique qu'il fallait associer à "exc" pour que la paire ainsi constituée soit aussi euler-mahonienne.

On doit à Denert [Den] d'avoir imaginé la définition de cette statistique, appelée "den" par la suite, dans un contexte tout à fait différent, celui des fonctions zêta attachées aux structures d'ordre de certaines algèbres simples.

Le fait que le couple (exc, den) est euler-mahonien a tout d'abord été démontré par Foata et Zeilberger [F-Z]. Une première question naturelle qui se posait était d'établir ce résultat combinatoirement, c'est-à-dire sachant que la paire classique (des,maj) est euler-mahonienne, de construire une *bijection* de $\mathfrak{S}_n$ sur lui-même qui envoie la paire (des,maj) sur la paire (exc,den).

Nous avons donné la construction de deux telles bijections, décrites dans deux notes aux Compte-Rendus, reproduites ici comme parties 1.1 et 1.2.

La seconde question naturelle qui se posait était d'étendre le résultat de Foata et Zeilberger, valable pour le seul groupe symétrique, au cas des classes de réarrangements de mots quelconques. Une première difficulté était de prolonger la définition de "den" elle-même au cas des mots arbitraires. Nous avons pu le faire à partir d'une formule équivalente établie par ces auteurs.

Le problème majeur à résoudre ensuite était de *construire une bijection* d'une classe de réarrangements sur elle-même qui envoie le *couple* (des, maj) sur (exc, den). Pour ce faire, nous avons dû faire tout d'abord une étude systématique des statistiques sur le groupe symétrique et le monoïde libre ordonné. Il a fallu reprendre ensuite l'étude de l'algèbre des circuits telle qu'elle avait été développée dans Cartier-Foata [C-F]. La loi de transposition des circuits devient ici beaucoup plus complexe, mais conduit tout naturellement en utilisant ce que nous appellons *h-multiplication* vers la construction explicite de cette bijection.

Le résultat principal de cette partie est consigné dans les théorèmes 10.4.1 et 10.5.8. La bijection définie sur le monoïde libre ordonné qui envoie la paire (exc, den) sur (des, maj) est appelée "troisième transformation fondamentale," faisant suite aux deux transformations fondamentales qui envoyaient "exc" sur "des", et "maj" sur "inv," respectivement. On peut ainsi considérer cette nouvelle transformation comme le q-analogue de la première tansformation fondamentale.

Le deuxième chapitre est consacré à une étude combinatoire et analytique des polynômes de Kostka-Foulkes $K_{\nu,\theta}(q)$ (ν, θ étant des partitions et q une variable), définis comme les coefficients de la matrice de passage, dans l'algèbre des fonctions symétriques, de la base des fonctions de Schur à celle formée par les fonctions de Hall-Littlewood. On sait d'après les travaux de Lascoux et Schützengberger [L-S] que ces polynômes sont à coefficients entiers positifs. Ces auteurs ont, en effet, démontré que $K_{\nu,\theta}(q)$ était le polynôme générateur de l'ensemble des tableaux de forme ν et d'évaluation θ par une certaine statistique à valeurs entières appelée *charge*.

Nous avons utilisé cette interprétation combinatoire pour étudier les propriétés de croissance de ces polynômes et répondu ainsi, dans une

Note aux Compte-Rendus, reproduite comme partie 2.1 ici, à une conjecture proposée par GUPTA-BRYLINSKI [Gup], à savoir démontré l'inégalité $K_{\lambda,\mu}(q) \leq K_{\lambda\cup a,\mu\cup a}(q)$.

Le problème qui reste ouvert est d'étudier la limite $\lim_n K_{\lambda\cup a^n,\mu\cup a^n}(q)$. Sous cette forme générale, le problème reste trop complexe. Suivant une suggestion de LASCOUX, il semble plus fructueux de trouver une expression simple pour la somme de la série $\sum_{n\geq 0} z^n K_{\lambda\cup a^n,\mu\cup a^n}(q)$. On conjecture que cette somme est une fraction rationnelle en q dépendant naturellement des paramètres λ, μ et a.

Dans ce chapitre, le calcul est explicitement fait dans le cas où $a = 1$, $q = 1$ et $\mu = 11\ldots1$, c'est-à-dire dans le cas des tableaux de Young de forme λ. On trouve, en effet, une fraction rationnelle $P_\lambda(1-z)/(1-z)^{|\lambda|+1}$. Le calcul nous a amené à introduire des statistiques nouvelles sur les tableaux de Young et à les étudier pour leur intérêt propre. En particulier, le numérateur $P_\lambda(z)$ est en fait la fonction génératrice de l'ensemble des tableaux de forme λ par la première lettre "pre" et aussi la fonction génératrice de ce même ensemble par une seconde statistique "deu." Le fait inattendu est que la distribution jointe de ces deux statistiques est *symétrique*. Ce que nous établissons par la construction d'un algorithme simple.

Dans le cas où q est quelconque, nous avons obtenu le résultat explicite suivant

$$\sum_{n\geq 0} K_{t1^n}(q) z^n = \frac{q^{\text{charge}\, t}}{(1-zq^c)(1-zq^{c+1})\ldots(1-zq^{c+m-p})}.$$

Ces derniers résultats sont consignés dans la partie 2.2.

Dans le chapitre 3, nous proposons une extension de la théorie géométrique des *nombres de Genocchi* introduite par DUMONT. Celui-ci a démontré que ces nombres définis par $G_{2n} = 2(2^{2n}-1)B_{2n}$, où B_{2n} désigne le nombre de Bernoulli de rang n, comptaient les fonctions excédantes de l'intervalle $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ qui sont surjectives sur $\{2, 4, \ldots, 2n\}$. DUMONT et FOATA [D-F] avaient établi une propriété de symétrie trivariée sur cet ensemble de fonctions. En fait, on peut définir une classe beaucoup plus importante de statistiques trivariées qui ont aussi cette propriété de symétrie. Pour toute suite U dont les lettres sont X, Y et Z, on définit des points U-maximaux, U-fixes, et U-surfixes ; on démontre que le polynôme générateur de ces statistiques est indépendant de la suite U. De cette

façon, la symétrie de ce polynôme à trois variables est évidente. On introduit, enfin, un codage des fonctions excédantes, servant à construire une involution qui conserve ces statistiques "max" et "fix", et échange le nombre de points saillants et le nombre de points surfixes.

BIBLIOGRAPHIE

[C-F] P. Cartier et D. Foata. — *Problèmes combinatoires de permutations et réarrangements*. — Berlin, Springer-Verlag, 1969 (*Lecture Notes in Math.,* **85**).

[Den] M. Denert. — The genus zeta function of hereditary orders in central simple algebras over global fields, *Math. Comp.*, t. **54**, 1990, p. 449–465.

[D-F] D. Dumont et D. Foata. — Une propriété de symétrie des nombres de Genocchi, *Bull. Soc. math. France*, t. **104**, 1976, p. 433-451.

[F-S] D. Foata et M.-P. Schützenberger. — *Théorie géométrique des polynômes eulériens*. — Berlin, Springer-Verlag, 1970 (*Lecture Notes in Math.*, **138**).

[F-Z] D. Foata et D. Zeilberger. — Denert's Permutation Statistic Is Indeed Euler-Mahonian, *Studies in Appl. Math.*, t. **83**, 1990, p. 31–59.

[Gup] G. Gupta. — Problem No. 9, in *Combinatorics and Algebra* [C. Greene, éd. 1984], p. 310. — *Contemporary Mathematics*, vol.34.

[L-S] A. Lascoux et M.-P. Schützenberger. — Le monoïde plaxique, *Non-commutative Structures in Algebra and geometric Combinatorics* [A. de Luca, ed., Napoli. 1978], p. 129–156. — Roma, Consiglio Nazionale delle Ricerche, 1981 (*Quaderni de "La Ricerca Scientifica"*, **109**).

[MacM] P.A. MacMahon. — The indices of permutations and the derivation therefrom of functions of a single variable associated with the permutations of any assemblage of objects, *Amer. J. Math.*, t. **35**, 1913, p. 281–322.

CHAPITRE 1

LA STATISTIQUE DE DENERT

L'étude des statistiques euler-mahoniennes a été remise en faveur récemment à la suite des travaux de Denert [Den] sur le calcul des fonctions zêta attachées aux structures d'ordre de certaines algèbres simples. D'un point de vue proprement combinatoire, on lui doit l'introduction d'une nouvelle statistique d'ordre sur les permutations, appelée "den" dans tout le présent travail, et d'avoir conjecturé que la paire (exc, den), où "exc" est le nombre usuel d'excédances d'une permutation, avait la *distribution euler-mahonienne* sur le groupe symétrique.

Le résultat a été démontré tout d'abord par Foata et Zeilberger [F-Z] et la question naturelle qui se posait était d'établir ce résultat combinatoirement, c'est-à-dire sachant que la paire classique (des,maj) est euler-mahonienne, de construire une *bijection* de $\mathfrak{S}_n$ sur lui-même qui envoie la paire (des,maj) sur la paire (exc,den).

Nous avons donné la construction de deux telles bijections, dans deux notes aux Compte-Rendus, que nous reproduisons dans le présent chapitre en parties 1.1 et 1.2. La première de ces bijections repose sur une manipulation des chemins de Motzkin valués ; elle a pour propriété complémentaire de donner une démonstration directe du fait que le cardinal de l'ensemble de ces chemins est $n!$ sans passer par l'intermédiaire du groupe symétrique.

La seconde bijection utilise une extension du *procédé d'insertion* de Rawlings et fournit aussi une démonstration directe du fait que les deux paires (des, maj) et (exc, den) sont euler-mahoniennes.

A priori, la statistique "den" se prêtait mal aux calculs. Pour la rattacher aux autres statistiques mahoniennes, comme l'indice majeur "maj" et le nombre d'inversions "inv," il a fallu faire une étude globale de toutes les distributions euler-mahoniennes. L'introduction des *invervalles cycliques* permet de trouver le cadre naturel englobant toutes les statistiques classiques, y comprix "den."

Cette recherche du bon cadre algébrique nous a conduit à prolonger le résultat de Foata-Zeilberger, valable sur les seuls groupes symétriques, aux classes des réarrangements de mots quelconques (avec répétitions). La difficulté initiale était de trouver d'abord la bonne définition de "den" pour les mots quelconques, ensuite de construire une bijection d'une classe de réarrangements sur elle-même qui envoie la paire $(\mathrm{des}, \mathrm{maj})$ sur $(\mathrm{exc}, \mathrm{den})$. La construction de cette bijection, appelée *troisième transformation fondamentale*, est donnée dans la troisième partie de ce chapitre.

On connaissait jusqu'ici deux autres transformations du même type, valables pour toutes les classes de mots. La première envoyait la statistique eulérienne "exc" sur "des," la seconde la statistique mahonienne "maj" sur "inv" (*cf.* [Fo1]). Cette troisième transformation envoyant une statistique *bivariée* euler-mahonienne sur une autre, donc en particulier "des" sur "exc," peut être considérée comme le q-analogue de la première transformation.

Les techniques d'algèbre non-commutative développées ici, bien que reprenant les méthodes de commutation partielle introduites dans la construction de la première transformation, sont d'un emploi plus délicat. La h-transposition, par exemple, définie sur les bimots, dépend fondamentalement du contexte des deux bilettres consécutives à permuter.

Nous avons fait figurer à la fin de chaque partie de ce chapitre la bibliographie propre à cette partie. Les références apparaissant dans cette introduction renvoient à la bibliographie de la *troisième* partie.

PARTIE 1.1

DISTRIBUTION EULER-MAHONIENNE : UNE CORRESPONDANCE (*)

RÉSUMÉ. — Récemment Foata et Zeilberger ont démontré une conjecture due à Marleen Denert qui affirmait que deux paires de statistiques sur le groupe des permutations étaient équidistribuées. Cette Note fournit une démonstration combinatoire de ce fait.

ABSTRACT. — Recently Foata and Zeilberger have proved a conjecture due to Marleen Denert that asserted that two pairs of statistics on the permutation group were equidistributed. The present Note provides a combinatorial proof of this statement.

1. Introduction

On appelle *mot sous-excédant* d'ordre n tout mot $s = s_1 s_2 \dots s_n$ de longueur n dont les lettres s_i sont des entiers satisfaisant les inégalités $0 \leq s_i \leq i-1$ pour $i = 1, 2, \dots, n$. On désigne par SE_n l'ensemble de ces mots. La *somme* $s_1 + s_2 + \cdots + s_n$ est notée $\mathrm{tot}(s)$, et la *valeur eulérienne* $\mathrm{eul}(s)$ d'un mot sous-excédant est définie de la façon suivante : d'abord, $\mathrm{eul}(s) := 0$, si s est de longueur 1 ; ensuite si $s = s_1 s_2 \dots s_n$ avec $n \geq 2$:

$$\mathrm{eul}(s_1 s_2 \dots s_n) := \begin{cases} \mathrm{eul}(s_1 \dots s_{n-1}), & \text{si } s_n \leq \mathrm{eul}(s_1 \dots s_{n-1}) ; \\ \mathrm{eul}(s_1 \dots s_{n-1}) + 1, & \text{si } s_n \geq \mathrm{eul}(s_1 \dots s_{n-1}) + 1. \end{cases}$$

Ainsi $\mathrm{eul}(0,0,0,3) = 1$, $\mathrm{eul}(0,0,0,3,2) = 2$, $\mathrm{eul}(0,0,0,3,2,0,5,0,3) = 3$.

On dit qu'une statistique (f, g) a la distribution *euler-mahonienne*, si f et g sont définies sur un ensemble fini E_n de cardinal $n!$ et si leur fonction génératrice $\sum t^{f(\sigma)} q^{g(\sigma)}$, écrite sous la forme $\sum_{k \geq 0} A_{n,k}(q) t^k$, satisfait la relation de récurrence

$$A_{n,k}(q) = [k+1]_q A_{n-1,k}(q) + q^k [n-k]_q A_{n-1,k-1}(q) \tag{1.1}$$

(*) Note publiée dans *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. **310**, Série I, p. 311–314, 1990.

pour $1 \leq k \leq n-1$ avec les conditions initiales $A_{n,0}(q) = 1$ et $A_{n,k}(q) = 0$ pour $k \geq n$. Dans (1.1) on a posé $[k]_q = 0$ pour $k = 0$ et $(1-q^k)/(1-q)$ pour $k \geq 1$ (*cf.* [Car]).

Pour établir *combinatoirement* qu'une paire (f, g) définie sur E_n est euler-mahonienne, il suffit de construire une bijection $\Psi : (\pi, s_n) \mapsto \sigma$ de $E_{n-1} \times [0, n-1]$ sur E_n ayant les propriétés suivantes :

$$g(\sigma) = g(\pi) + s_n;$$
$$f(\sigma) = \begin{cases} f(\pi), & \text{si } 0 \leq s_n \leq f(\pi); \\ f(\pi)+1, & \text{si } f(\pi)+1 \leq s_n \leq n-1. \end{cases}$$

Ainsi, (eul,tot) est euler-mahonienne. En appliquant Ψ itérativement, on obtient une bijection Φ de SE_n sur E_n satisfaisant les propriétés : $\mathrm{eul}(s) = f \circ \Phi(s)$, $\mathrm{tot}(s) = g \circ \Phi(s)$. La bijection inverse Φ^{-1} est appelé le *codage* de E_n.

L'exemple classique de statistique euler-mahonienne sur le groupe des permutations $\mathfrak{S}_n$ est fourni par le couple $(\mathrm{des}, \mathrm{maj})$, où des et maj sont respectivement le *nombre de descentes* et l'*indice majeur* (*cf.* [Car], [D-F], [Raw], [G-G]). Dans ce cas, la bijection Ψ est aisée à construire. Le mot sous-excédant $\Phi^{-1}_{\mathrm{maj}}(\sigma)\big(= \Phi^{-1}(\sigma)\big)$ correspondant à σ s'appelle le *maj-codage* de σ (*cf.* [Raw]).

Nous nous proposons dans cette Note de faire une construction analogue pour la statistique bivariée (exc,den) introduite par Denert ([Den]) dont on sait qu'elle est déjà euler-mahonienne d'après le récent travail de Foata et Zeilberger ([F-Z]). La statistique "exc" est simplement le *nombre* classique *des excédances*, défini pour toute permutation $\sigma = \sigma(1)\sigma(2)\ldots\sigma(n)$ par $\mathrm{exc}(\sigma) := \#\{i : 1 \leq i \leq n, \sigma(i) > i\}$. La statistique "den" est, elle, définie par

$$\begin{aligned} \mathrm{den}\,\sigma := \quad & \#\{1 \leq i < j \leq n : \sigma(j) < \sigma(i) \leq j\} \\ & +\#\{1 \leq i < j \leq n : \sigma(i) \leq j < \sigma(j)\} \\ & +\#\{1 \leq i < j \leq n : j < \sigma(j) < \sigma(i)\}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Dans cette Note on trouvera donc la construction d'un *den-codage* Φ^{-1}_{den}.

2. Chemins de Motzkin

Un *chemin de Motzkin coloré* (ou simplement *chemin*) de longueur n est un chemin polygonal dans le quart plan $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, allant de (0,0) à $(n,0)$ dont les pas élémentaires sont de quatre sortes : $\nearrow$, $\longrightarrow$, $\dashrightarrow$, $\searrow$. De plus,

il n'y a jamais de pas $\dashrightarrow$ sur l'axe horizontal. On identifiera un tel chemin au *mot* $w = x_1 x_2 \dots x_n$, dit *de Motzkin coloré*, dont les lettres sont prises dans l'alphabet $\{\nearrow, \longrightarrow, \dashrightarrow, \searrow\}$. Pour chaque x_r, la *hauteur* de x_r, notée $h_r(w)$, est définie par :

$$h_r(w) := \begin{cases} \#\{s < r : x_s = \nearrow\} - \#\{s < r : x_s = \searrow\}, \\ \qquad\qquad \text{si } x_r = \nearrow \text{ ou } \longrightarrow; \\ \#\{s < r : x_s = \nearrow\} - \#\{s < r : x_s = \searrow\} - 1, \\ \qquad\qquad \text{si } x_r = \searrow \text{ ou } \dashrightarrow. \end{cases} \tag{2.1}$$

Une *évaluation* d'un mot w est une suite $t = t_1 t_2 \dots t_n$ tel que $0 \le t_r \le h_r(w)$ pour tout $r = 1, 2, \dots, n$. Le *nombre de montées*, noté $\mathrm{mon}(w)$, est defini par : $\mathrm{mon}\, w := |w|_{\nearrow} + |w|_{\dashrightarrow}$. De plus, tout couple $u = (w, t)$, où t est une évaluation de w, est appelé *chemin (mot) évalué*. L'ensemble des mots évalués de longueur n est noté U_n et le sous-ensemble de ces mots $u = (w, t)$ tels que $\mathrm{mon}(u) := \mathrm{mon}(w) = k$ est noté $U_{n,k}$. Enfin, *l'indice* $\mathrm{ind}(u)$ de u est defini comme la somme des places des montées et de tous les t_r, c'est-à-dire $\mathrm{ind}(u) := \sum\{r : x_r = \nearrow \textit{ ou } \dashrightarrow\} + \sum_{r=1}^{n} t_r$.

Foata et Zeilberger [F-Z] ont établi une bijection Θ de $\mathfrak{S}_n$ sur U_n, différente de la bijection classique (cf. [Vie]), ayant la propriété $\mathrm{exc}(\sigma) = \mathrm{mon}\,\Theta(\sigma)$, $\mathrm{den}(\sigma) = \mathrm{ind}\,\Theta(\sigma)$, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Le reste de la Note va être consacré à la construction d'une bijection $\Phi_{\mathrm{den}} : SE_n \to U_n$ ayant la propriété $\mathrm{eul}(s) = \mathrm{mon}\,\Phi_{\mathrm{den}}(s)$, $\mathrm{tot}(s) = \mathrm{ind}\,\Phi_{\mathrm{den}}(s)$, et la suite des bijections

$$\begin{array}{ccccccc} \mathfrak{S}_n & \xleftarrow{\Phi_{\mathrm{maj}}} & SE_n & \xrightarrow{\Phi_{\mathrm{den}}} & U_n & \xleftarrow{\Theta} & \mathfrak{S}_n \\ (\mathrm{des}, \mathrm{maj}) & & (\mathrm{eul}, \mathrm{tot}) & & (\mathrm{mon}, \mathrm{ind}) & & (\mathrm{exc}, \mathrm{den}) \end{array}$$

fournira la correspondance $\sigma \mapsto \sigma'$ telle que $\mathrm{exc}(\sigma) = \mathrm{des}(\sigma')$ et $\mathrm{den}(\sigma) = \mathrm{maj}(\sigma')$. Comme déjà signalé précédemment, il nous suffira de construire une bijection

$$\begin{gathered} \Psi_{\mathrm{den}} : (v, s_n) \longmapsto u \\ U_{n-1,k} \times [0, k] + U_{n-1,k-1} \times [k, n-1] \longrightarrow U_{n,k} \end{gathered} \tag{2.2}$$

satisfaisant $\mathrm{ind}(u) = \mathrm{ind}(v) + s_n$.

3. La Bijection

Il est commode d'introduire la notion de *chemin évalué pointé*. Il y en a de deux sortes :

$$\overrightarrow{U_{n-1,k}} := \{(u,p) : u \in U_{n-1,k},\ \ x_p = \searrow \text{ ou } \dashrightarrow\}; \tag{3.1}$$

$$\overrightarrow{U_{n-1,k-1}} := \{(u,p) : u \in U_{n-1,k-1},\ \ x_p = \searrow \text{ ou } \longrightarrow\}; \tag{3.2}$$

Puis, on définit l'indice "ind" pour les chemins évalués pointés. Si $(u,p) \in \overrightarrow{U_{n-1,k}}$, on marque tous les pas $\searrow$ ou $\dashrightarrow$ dont le nombre total est exactement k, et on les numérote $1, 2, \ldots, k$ *de droite à gauche*. On pose alors :

$$\mathrm{ind}(u,p) := \#\{r \geq p : x_r = \searrow \text{ ou } \dashrightarrow\}.$$

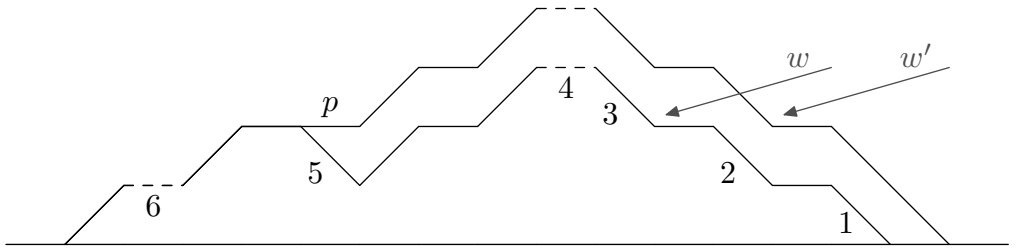
Le chemin inférieur de la figure 1 est un chemin évalué pointé (u,p) avec comme paramètres : $n-1 = 14,\ k = 6,\ p = 5,\ \mathrm{ind}(u,p) = 5$. Si $(u,p) \in \overrightarrow{U_{n-1,k-1}}$, on marque tous les pas $\searrow$ et $\longrightarrow$ dont le nombre total est exactement $n-k$, et on les numérote $k, k+1, \ldots, n-1$ *de gauche à droite*. De même, on pose

$$\mathrm{ind}(u,p) := (k-1) + \#\{r \leq p : x_r = \searrow \text{ ou } \longrightarrow\}.$$

Par exemple, avec $n-1 = 14,\ k-1 = 6,\ p = 5,\ \mathrm{ind}(u,p) = 8$, on obtient le chemin inférieur de la figure 2. Pour construire l'application Ψ_{den}, on distingue deux cas suivant que (v, s_n) , avec $v = (w,t) = (x_1x_2\ldots x_{n-1},\ t_1t_2\ldots t_{n-1})$, appartient à $U_{n-1,k} \times [0,k]$ ou à $U_{n-1,k-1} \times [k, n-1]$ (*cf.* (2.2)).

Premier cas. — Supposons $(v, s_n) \in U_{n-1,k} \times [0,k]$. D'abord si $s_n = 0$, on définit $u = \Psi_{\mathrm{den}}(v, s_n) := (x_1x_2\ldots x_{n-1} \rightarrow, t_1t_2\ldots t_{n-1}0)$. Par contre, si $s_n \neq 0$, d'après la définition de ind, on sait qu'il existe dans $\overrightarrow{U_{n-1,k}}$ un chemin évalué pointé unique (v,p) tel que $\mathrm{ind}(v,p) = s_n$. On fait alors correspondre un chemin $w' = y_1y_2\ldots y_n$ et une suite $t' = l_1l_2\ldots l_n$ de la façon suivante :

(W1) $y_r = x_r$, si $r \leq n-1$ et $r \neq p$;
(W2) $y_p = \longrightarrow$, si $x_p = \searrow$;
$y_p = \nearrow$, si $x_p = \dashrightarrow$;
(W3) $y_n = \searrow$;
(T1) $l_r = t_r$, si $r \leq p-1$;
(T2) $l_p = h_p(w')$;
(T3) $l_{r+1} = t_r$, si $p \leq r \leq n-1$, et $x_r = \searrow$ ou $\longrightarrow$;
$l_{r+1} = t_r + 1$, si $p \leq r \leq n-1$, et $x_r = \nearrow$ ou $\dashrightarrow$.



$r =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$t =$	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}	t_{11}	t_{12}	t_{13}	t_{14}	
$t' =$	t_1	t_2	t_3	t_4	$h_5(w')$	t_5	$t_6{+}1$	t_7	$t_8{+}1$	$t_9{+}1$	t_{10}	t_{11}	t_{12}	t_{13}	t_{14}

Fig.1

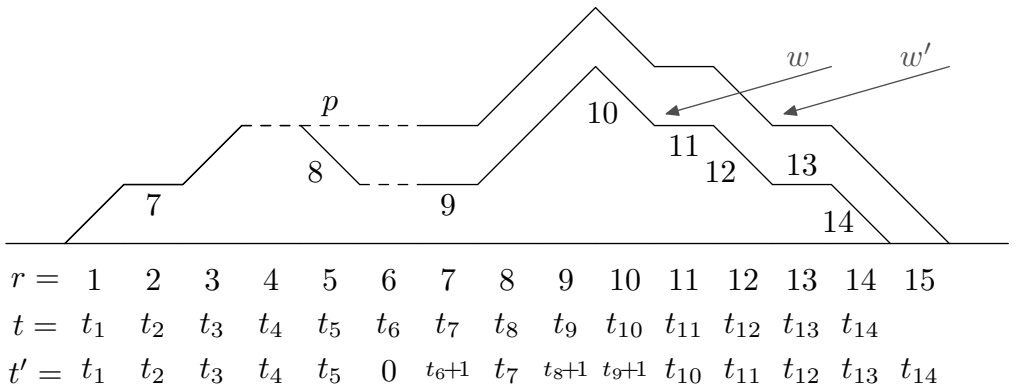
Second cas. — Supposons $(v, s_n) \in U_{n-1,k-1} \times [k, n-1]$. De même, il existe dans $\overrightarrow{U_{n-1,k-1}}$ un chemin évalué pointé unique (v, p) tel que $\mathrm{ind}(v, p) = s_n$. On fait alors correspondre un chemin $w' = y_1 y_2 \dots y_n$ et une suite $t' = l_1 l_2 \dots l_n$ de la façon suivante :

(W1') $y_r = x_r$, si $r \leq n-1$ et $r \neq p$;
(W2') $y_p = \dashrightarrow$, si $x_p = \searrow$; $y_p = \nearrow$, si $x_p = \longrightarrow$;
(W3') $y_n = \searrow$;
(T1') $l_r = t_r$, si $r \leq p$;
(T2') $l_{p+1} = 0$;
(T3') $l_{r+1} = t_r$, si $p+1 \leq r \leq n-1$, et $x_r = \searrow$ ou $\longrightarrow$;
$l_{r+1} = t_r + 1$, si $p+1 \leq r \leq n-1$, et $x_r = \nearrow$ ou $\dashrightarrow$.

Proposition 3.1. — *On a :* $(w', t') \in U_{n,k}$ *et* $\mathrm{ind}(w', t') = \mathrm{ind}(v) + s_n$.

On pose alors $u = \Psi_{\mathrm{den}}(v, s_n) := (w', t')$. L'entier p est dit la *place de changement* par rapport à u.

Pour le premier cas, on reprend l'exemple de la figure 1. La place de changement est $p = 5$. On a $5 = h_p(w') + 3$ et on obtient le chemin supérieur de la figure 1. Pour le second cas, on reprend l'exemple de la figure 2, la place de changement étant $p = 5$. On a $8 = p + 3$ et on obtient le chemin supérieur representé dans la figure 2.



$r =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$t =$	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}	t_{11}	t_{12}	t_{13}	t_{14}	
$t' =$	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	0	$t_6{+}1$	t_7	$t_8{+}1$	$t_9{+}1$	t_{10}	t_{11}	t_{12}	t_{13}	t_{14}

Fig.2

PROPOSITION 3.2. — *L'application* Ψ_{den} *ainsi construite est inversible.*

BIBLIOGRAPHIE

[Car] L. CARLITZ. — q-Bernoulli and Eulerian numbers, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **76**, 1954, p. 332–350.

[Den] M. DENERT. — The genus zeta function of hereditary orders in central simple algebras over global fields, *Math. Comp.*, t. **54**, 1990, p. 449–465.

[D-F] J. DÉSARMÉNIEN et D. FOATA. — Fonctions symétriques et séries hypergéométriques basiques multivariées, *Bull. Soc. Math. France*, t. **113**, 1985, p. 3–22.

[F-Z] D. FOATA et D. ZEILBERGER. — Denert's Permutation Statistic Is Indeed Euler-Mahonian, *Studies in Appl. Math.*, t. **83**, 1990, p. 31–59.

[F-S] D. FOATA et M.-P. SCHÜTZENBERGER. — Major Index and Inversion Number of Permutations, *Math. Nachr.*, t. **83**, 1978, p. 143–159.

[G-G] A. GARSIA et I. GESSEL. — Permutation Statistics and Partitions, *Adv. in Math.*, t. **31**, 1979, p. 288–305.

[Raw] D. RAWLINGS. — Generalized Worpitzki Identites with Applications to Permutation Enumeration, *Europ. J. Comb.*, t. **2**, 1981, p. 67–78.

[Vie] G. VIENNOT. — Une Théorie Combinatoire des Polynômes Orthogonaux Généraux, Notes conf. Univ. Québec à Montréal, 1984.

PARTIE 1.2

UNE NOUVELLE BIJECTION POUR LA STATISTIQUE DE DENERT (*)

RÉSUMÉ. — Pour le théorème de Foata-Zeilberger sur les statistiques de Denert, on a construit dans [Han] une bijection indirecte en passant par les chemins évalués. Dans cette Note, on trouvera une bijection définie directement sur le groupe des permutations.

ABSTRACT. — A bijection was constructed in [Han] for the Foata-Zeilberger theorem on Denert's statistic. This note provides the construction of another bijection directly defined on the permutation group.

1. Introduction. — Soit $\sigma = \sigma(1)\sigma(2)\cdots\sigma(n)$ une permutation d'ordre n. Si $\sigma(i) > i$, on dit que i est une *place excédante* pour σ et $\sigma(i)$ est une *valeur excédante* pour σ. Soient $\mathrm{Exc}(\sigma) = \sigma(i_1)\sigma(i_2)\cdots\sigma(i_k)$ le sous-mot des valeurs excédantes et $\mathrm{Nexc}(\sigma) = \sigma(j_1)\sigma(j_2)\cdots\sigma(j_{n-k})$ le sous-mot des valeurs non-excédantes. La statistique "exc" est simplement le *nombre des excédances,* i.e., la longueur du mot $\mathrm{Exc}(\sigma)$, et la statistique "den" est définie par (*cf.* [F-Z], [Den])

$$\mathrm{den}(\sigma) := \Sigma\{i : \sigma(i) > i\} + \mathrm{inv}\,\mathrm{Exc}(\sigma) + \mathrm{inv}\,\mathrm{Nexc}(\sigma),$$

où la statistique "inv" est le *nombre d'inversion*. Par exemple, si

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 1 & 5 & 4 & 9 & 2 & 6 & 3 & 8 \end{pmatrix},$$

on a $\mathrm{den}(\sigma) = 1 + 3 + 5 + \mathrm{inv}(759) + \mathrm{inv}(142638) = 13$.

Comme d'habitude, les statistiques "des" et "maj" sont respectivement le *nombre de descentes* et l'*indice majeur* pour les permutations. On dit

(*) Note publiée dans *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. **310**, Série I, p. 493–496, 1990.

qu'une statistique bivariée (f, g) définie sur le groupe des permutations d'ordre n a la distribution *euler-mahonienne*, si (f, g) est équidistribuée à la statistique bivariée $(\mathrm{des}, \mathrm{maj})$. Dans [F-Z], Foata et Zeilberger ont démontré la conjecture suivante due à Denert :

THÉORÈME 1.1 ([F-Z]). — *La statistique bivariée* $(\mathrm{exc}, \mathrm{den})$ *a la distribution euler-mahonienne.*

Dans une note précédente [Han] nous avions démontré combinatoirement ce résultat en établissant une bijection Φ entre les mots sous-excédants et les chemins valués. Pour obtenir une bijection définie sur $\mathfrak{S}_n$, il fallait encore prendre le produit de composition de Φ par une bijection entre $\mathfrak{S}_n$ et les chemins valués, établi par Foata et Zeilberger [F-Z]. La bijection proposée dans cette note est une bijection *directe* sur $\mathfrak{S}_n$.

Pour établir *combinatoirement* qu'une paire de statistiques (f, g) définie sur $\mathfrak{S}_n$ est euler-mahonienne, il suffit de construire une bijection $\Psi : (\sigma, s) \mapsto \pi$ de $\mathfrak{S}_{n-1} \times [0, n-1]$ sur $\mathfrak{S}_n$ ayant les propriétés suivantes (*cf.* [Car], [Han], [Raw]) :

$$g(\pi) = g(\sigma) + s;$$
$$f(\pi) = \begin{cases} f(\sigma)\ , & \text{si } 0 \le s \le f(\sigma)\ , \\ f(\sigma)+1\ , & \text{si } f(\sigma)+1 \le s \le n-1\ . \end{cases}$$

C'est la construction d'une telle bijection Ψ que nous allons décrire ici.

2. La Bijection. — Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_{n-1}$. On fait correspondre d'abord une permutation $\nu \in \mathfrak{S}_{n-1}$, appelée *numérotation* de σ, de la façon suivante :

$$\nu(r) := \begin{cases} \#\big\{ i \ge r :\ i \in \mathrm{Exc}(\sigma) \big\}\ , & \text{si } r \in \mathrm{Exc}(\sigma)\,; \\ \#\big\{ i \le r :\ i \in \mathrm{Nexc}(\sigma) \big\} + \mathrm{exc}(\sigma)\ , & \text{si } r \in \mathrm{Nexc}(\sigma)\ . \end{cases}$$

En reprenant l'exemple de la section 1, on peut réprésenter σ et sa numérotation ν par les trois lignes suivantes :

place − ligne	1	2	3	4	5	6	7	8	9
valeur − ligne	7	1	5	4	9	2	6	3	8
numéro-ligne	2	4	3	7	1	5	8	6	9.

Soit $0 \le s \le n-1$. Si $s = 0$, on définit $\Psi(\sigma, 0) := \sigma(1)\sigma(2)\cdots\sigma(n-1)\,n$. Si $s \ne 0$, on construit la permutation $\Psi(\sigma, s)$ de la façon suivante :

[B1].— Dans la valeur-ligne, on souligne $\sigma(i)$ s'il est une valeur excédante et si $\sigma(i) \geq \nu^{-1}(s)$. L'ensemble de toutes les valeurs soulignées

$$\big\{\nu^{-1}(1), \nu^{-1}(2), \cdots, \nu^{-1}(k)\big\}$$

est noté $\mathrm{Soul}(\sigma)$.
[B2].— On remplace les valeurs soulignées de grande à petite en commençant par n et en sortant la plus petite valeur soulignée $p := \nu^{-1}(k)$, d'où une suite de remplacement

$$n = \nu^{-1}(0) \mapsto \nu^{-1}(1) \mapsto \nu^{-1}(2) \mapsto \cdots \mapsto \nu^{-1}(k) = p \ ,$$

où par convention, $\nu(n) = 0$. Ainsi, on a

$$\big\{p > \sigma(i) \geq \nu^{-1}(s) \ , \ \sigma(i) > i\big\} = \emptyset \ . \tag{2.1}$$

[B3].— On insère p à la place $\nu^{-1}(s)$ qui est appelée la *place d'insertion* par rapport à π, et on ajoute n à la fin de la place-ligne.

Autrement dit, la permutation $\pi := \Psi(\sigma, s)$ est définie comme suit :

a) $\pi(i) := \sigma(i)$ si $i < \nu^{-1}(s)$ et $\sigma(i) \notin \mathrm{Soul}(\sigma)$;
b) $\pi(i+1) := \sigma(i)$ si $i \geq \nu^{-1}(s)$ et $\sigma(i) \notin \mathrm{Soul}(\sigma)$;
c) $\pi(i) := \nu^{-1}(l-1)$ si $i < \nu^{-1}(s)$ et $\sigma(i) = \nu^{-1}(l) \in \mathrm{Soul}(\sigma)$;
d) $\pi(i+1) := \nu^{-1}(l-1)$ si $i \geq \nu^{-1}(s)$ et $\sigma(i) = \nu^{-1}(l) \in \mathrm{Soul}(\sigma)$;
e) $\pi(\nu^{-1}(s)) = \nu^{-1}(k)$.

Dans le tableau de la page suivante, on donne deux exemples pour illustrer la construction de l'image $\Psi(\sigma, s)$.

Lemme 2.1 (Dumont [Dum]). — *Soit σ une permutation d'ordre n et v un entier. On a*

$$\#\big\{i \geq v > \sigma(i)\big\} = \#\big\{\sigma(i) \geq v > i\big\}.$$

Démonstration. — En effet,

$$\begin{aligned} m.g. + \#\big\{i \geq v, \ v \leq \sigma(i)\big\} &= \#\big\{i \geq v\big\}, \\ m.d. + \#\big\{i \geq v, \ v \leq \sigma(i)\big\} &= \#\big\{\sigma(i) \geq v\big\}. \end{aligned}$$

D'où le lemme. □

	s=2	s=7
[B1]	$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\ \underline{7}&1&5&4&\underline{9}&2&6&3&8\end{pmatrix}$ $\nu^{-1}(2)=7$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\ \underline{7}&1&\underline{5}&4&\underline{9}&2&6&3&8\end{pmatrix}$ $\nu^{-1}(7)=4$
[B2]	$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\ \underline{9}&1&5&4&\underline{10}&2&6&3&8\end{pmatrix}$ $10\mapsto 9\mapsto 7=p$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\ \underline{9}&1&\underline{7}&4&\underline{10}&2&6&3&8\end{pmatrix}$ $10\mapsto 9\mapsto 7\mapsto 5=p$
[B3]	$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10\\ 9&1&5&4&10&2&7&6&3&8\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10\\ 9&1&7&5&4&10&2&6&3&8\end{pmatrix}$
	$\Psi(\sigma,2)$	$\Psi(\sigma,7)$

La construction de l'image $\Psi(\sigma,s)$.

PROPOSITION 2.2. — *Posons $\pi=\Psi(\sigma,s)$. On a*

$$\text{(2.2)}\qquad \operatorname{den}(\pi)=\operatorname{den}(\sigma)+s\ ;$$

$$\text{(2.3)}\qquad \operatorname{exc}(\pi)=\begin{cases}\operatorname{exc}(\sigma)\ , & si\ \ 0\le s\le \operatorname{exc}(\sigma)\ ,\\ \operatorname{exc}(\sigma)+1\ , & si\ \ \operatorname{exc}(\sigma)+1\le s\le n-1\ .\end{cases}$$

DÉMONSTRATION. — Comme on le verra, la démonstration de (2.3) est incluse dans celle de (2.2) ; il nous suffit donc de démontrer la première partie de la proposition. On distingue deux cas suivant que $s\le \operatorname{exc}(\sigma)$ ou $s\ge \operatorname{exc}(\sigma)+1$.

Premier cas.— Supposons $0\le s\le \operatorname{exc}(\sigma)$. La propriété (2.3) est banale pour $s=0$. Si $s\ge 1$ (*cf.* le premier exemple), on a $p=\nu^{-1}(s)$, d'où la place $\nu^{-1}(s)$ est non-excédante. Pour tout $i<\nu^{-1}(s)$ (resp. $i>\nu^{-1}(s)$), i est une place excédante pour π, si et seulement si i (resp. $i-1$) est une place excédante pour σ. On a donc

$$\text{(2.4)}\quad \Sigma\big\{i:\pi(i)>i\big\}-\Sigma\big\{i:\sigma(i)>i\big\}=\#\big\{\sigma(i)>i\ge\nu^{-1}(s)\big\}\ ;$$

$$\text{(2.5)}\quad \operatorname{inv}\operatorname{Exc}(\pi)-\operatorname{inv}\operatorname{Exc}(\sigma)=0\ ;$$

$$\text{(2.6)}\quad \begin{aligned}\operatorname{inv}\operatorname{Nexc}(\pi)-\operatorname{inv}\operatorname{Nexc}(\sigma)&=\#\big\{i\ge\nu^{-1}(s)>\sigma(i)\big\}\\ &=\#\big\{\sigma(i)\ge\nu^{-1}(s)>i\big\}\ ,\end{aligned}$$

d'après le lemme précédent. Par définition de "den", on a

$$\begin{aligned}\mathrm{den}(\pi)-\mathrm{den}(\sigma) =& \#\big\{\sigma(i)>i\geq\nu^{-1}(s)\big\}+\#\big\{\sigma(i)\geq\nu^{-1}(s)>i\big\}\\ =& \#\big\{\sigma(i)\geq\nu^{-1}(s),\ \sigma(i)>i\big\}\\ =& s\ .\end{aligned}$$

Second cas.— Supposons $\mathrm{exc}(\sigma)\leq s\leq n-1$ (*cf.* le deuxième exemple), on peut vérifier que $p>\nu^{-1}(s)$, d'où la place $\nu^{-1}(s)$ est excédante. De même, On a

(2.4′) $\Sigma\big\{i:\pi(i)>i\big\}-\Sigma\big\{i:\sigma(i)>i\big\}=\#\big\{\sigma(i)>i\geq\nu^{-1}(s)\big\}+\nu^{-1}(s)$;

(2.5′) $\mathrm{inv}\,\mathrm{Exc}(\pi)-\mathrm{inv}\,\mathrm{Exc}(\sigma)=\#\big\{\nu^{-1}(s)>i,\ \sigma(i)>i,\ \sigma(i)\geq p\big\}$;

(2.6′) $\mathrm{inv}\,\mathrm{Nexc}(\pi)-\mathrm{inv}\,\mathrm{Nexc}(\sigma)=0$.

D'autre part,

$$\begin{aligned}\nu^{-1}(s) &= \#\big\{\sigma(i)\leq\nu^{-1}(s),\ i\geq\sigma(i)\big\}+\#\big\{\nu^{-1}(s)\geq\sigma(i)>i\big\}\\ &= s-\mathrm{exc}(\sigma)+\#\big\{p>\sigma(i)>i,\ \nu^{-1}(s)>i\big\}\ ,\end{aligned}$$

où la première partie de la dernière égalité provient de la définition de la numérotation ν et la seconde de la relation (2.1). Avec

$$\begin{aligned}\#\big\{\sigma(i)>i\geq\nu^{-1}(s)\big\}+\#\big\{\nu^{-1}(s)>i,\ \sigma(i)>i,\ \sigma(i)\geq p\big\}&\\ +\#\big\{p>\sigma(i)>i,\ \nu^{-1}(s)>i\big\}&\\ =\#\big\{\sigma(i)>i\geq\nu^{-1}(s)\big\}+\#\big\{\sigma(i)>i,\ \nu^{-1}(s)>i\big\}&\\ =\#\big\{\sigma(i)>i\big\}&\\ =\mathrm{exc}(\sigma)\ ,&\end{aligned}$$

on a enfin

$$\begin{aligned}\mathrm{den}(\pi)-\mathrm{den}(\sigma) =& \nu^{-1}(s)+\#\big\{\sigma(i)>i\geq\nu^{-1}(s)\big\}\\ &+\#\big\{\nu^{-1}(s)>i,\ \sigma(i)>i,\ \sigma(i)\geq p\big\}\\ =& s\ .\quad\square\end{aligned}$$

La propriété (2.1) nous suggère de définir la *place grande-fixe* d'une permutation π, comme étant une place j, qui soit une place fixe, ou qui satisfasse la propriété :

$$E_j=\big\{\pi(i):\pi(i)>i,\ \pi(j)>\pi(i)\geq j\big\}=\emptyset.$$

LEMME 2.3. — *Soit $\pi = \Psi(\sigma, s)$ une permutation d'ordre n. Alors*
[G1] *La place d'insertion $\nu^{-1}(s)$ est une place grande-fixe*;
[G2] *Tout $j > \nu^{-1}(s)$ n'est pas une place grande-fixe.*

DÉMONSTRATION. — Soit $j > \nu^{-1}(s)$. Comme j n'est pas une place fixe, il suffit de considérer le cas où j est une place excédante. Dans ce cas, on a $j > p$ (*cf.* [B2]). En écrivant $\pi(j) = \nu^{-1}(k)$, on peut vérifier que $\nu^{-1}(k+1) \in E_j$. D'où [G2]. □

PROPOSITION 2.4. — *L'application Ψ ainsi construite est inversible.*

DÉMONSTRATION. — Soit π une permutation. Notons $G(\pi)$ l'ensemble des places grandes-fixes. Ou bien $\mathrm{exc}(\pi) = 0$ et alors toutes les places sont grandes-fixes, ou bien $\mathrm{exc}(\pi) \neq 0$; dans ce cas, on note i l'entier défini par $\pi(i) = \min \mathrm{Exc}(\pi)$. Il appartient évidemment à $G(\pi)$. On peut alors faire l'inverse de la procédure [B$*$] en prenant $\max G(\pi)$ comme la place d'insertion. □

BIBLIOGRAPHIE

[Car] L. CARLITZ. — q-Bernoulli and Eulerian numbers, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **76**, 1954, p. 332–350.

[Den] M. DENERT. — The genus zeta function of hereditary orders in central simple algebras over global fields, *Math. Comp.*, t. **54**, 1990, p. 449–465.

[Dum] D. DUMONT. — Interprétations Combinatoires des nombres de Genocchi, *Duke Math.J.*, t. **41**, 1974, p. 305–317.

[F-Z] D. FOATA et D. ZEILBERGER. — Denert's Permutation Statistic Is Indeed Euler-Mahonian, *Studies in Appl. Math.*, t. **83**, 1990, p. 31–59.

[Han] G.-N. HAN. — Distribution Euler-mahonienne : une correspondance, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. **310**, 1990, p. 311–314.

[Raw] D. RAWLINGS. — Generalized Worpitzki Identites with Applications to Permutation Enumeration, *Europ.J.Comb.*, t. **2**, 1981, p. 67–78.

PARTIE 1.3

LA TROISIÈME TRANSFORMATION FONDAMENTALE

1. Introduction et statistiques classiques

Dans cet article, nous nous intéressons tout d'abord aux *statistiques* définies sur les ensembles E_n de cardinal $n!$ Par statistique, nous entendons des fonctions définies sur E_n à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Les ensembles E_n sont de type varié : le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$, l'ensemble des *mots sous-excédants* $SE_n = \{s = s_1 s_2 \cdots s_n \mid 0 \leq s_i \leq i-1\}$, l'ensemble des *chemins de Motzkin valués* U_n (*cf.* [Vie], [Fla], [Dum]), l'ensemble des *bi-tableaux de Young* et ceux des *bi-tableaux de Fibonacci* [Sta]. Les statistiques classiques sur $\mathfrak{S}_n$ et SE_n dont nous allons faire plus particulièrement l'étude sont les suivantes (*cf.* [Den], [F-Z], [Ha1], [Ha2]) :

DÉFINITION 1.1. — Si F est un ensembles d'entiers, on note $\#F$ son cardinal et $\sum F$ la somme de tous les éléments dans F. Soit $\sigma = \sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n \in \mathfrak{S}_n$ une permutation. On pose :

(i) $\operatorname{inv}\sigma = \#\{i < j \mid \sigma_i > \sigma_j\}$;

(ii) $\operatorname{des}\sigma = \#\{i \mid \sigma_i > \sigma_{i+1}\}$;

(iii) $\operatorname{maj}\sigma = \sum\{i \mid \sigma_i > \sigma_{i+1}\}$;

(iv) $\operatorname{exc}\sigma = \#\{i \mid \sigma_i > i\}$;

les statistiques "inv," "des," "maj," "exc" sont appelées classiquement *nombre d'inversions*, *nombre de descentes*, *indice majeur*, *nombre d'excédances*; si $1 \leq i \leq n$, on dit que i est une *place d'excédance* ou une *place de non-excédance* pour σ, suivant que l'on a $\sigma(i) > i$ ou $\sigma(i) \leq i$; soit $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ la suite croissante des places d'excédance et $j_1 < j_2 < \cdots < j_{n-k}$ la suite croissante des places de non-excédance pour σ ; on forme alors les sous-mots : $\operatorname{Exc}\sigma = \sigma(i_1)\ldots\sigma(i_k)$ et $\operatorname{Nexc}\sigma = \sigma(j_1)\ldots\sigma(j_{n-k})$, l'*ensemble* des lettres de chacun de ces sous mots étant respectivement noté : $\{\operatorname{Exc}\sigma\}$ et $\{\operatorname{Nexc}\sigma\}$.

(v) $\operatorname{den}\sigma = \sum_i \#\{i \mid \sigma_i > i\} + \operatorname{inv}\operatorname{Exc}\sigma + \operatorname{inv}\operatorname{Nexc}\sigma$.

(vi) La *charge* de chaque lettre σ_i est définie comme suit : d'abord la charge $\operatorname{ch}(1)$ de la lettre 1 est zéro ; pour $i \geq 1$, la charge $\operatorname{ch}(i+1)$ de la lettre $(i+1)$ est égale à $\operatorname{ch}(i)$, si $(i+1)$ est à la gauche de i, et vaut $\operatorname{ch}(i)+1$, si $(i+1)$ est à la droite de i. La charge $\operatorname{ch}(\sigma)$ du tableau t est alors définie comme la somme de tous les $\operatorname{ch}(i)$: $\operatorname{ch}(\sigma) = \sum_i \operatorname{ch}(i)$. (*cf.* [Ma1], p. 129, [L-S])

Soit $s = s_1 s_2 \cdots s_n \in SE_n$, on définit les statistiques "eul" et "tot" de la façon suivante :

(vii) d'abord $\operatorname{eul} s = 0$ si $n = 1$; et récursivement pour $n \geq 2$,

$$\operatorname{eul}(s_1 s_2 \cdots s_n) = \begin{cases} \operatorname{eul}(s_1 s_2 \cdots s_{n-1}), & \text{si } s_n \leq \operatorname{eul}(s_1 s_2 \cdots s_{n-1}) ; \\ \operatorname{eul}(s_1 s_2 \cdots s_{n-1}) + 1, & \text{sinon} ; \end{cases}$$

(viii) $\operatorname{tot} s = s_1 + s_2 + \cdots + s_n$.

Exemple 1.2. — Pour la permutation $\sigma = 71548326$, on a $\operatorname{inv}\sigma = 15$, $\operatorname{des}\sigma = 4$, $\operatorname{maj}\sigma = 15$, $\operatorname{exc}\sigma = 3$; de plus, $\operatorname{Exc}\sigma = 758$, $\operatorname{Nexc}\sigma = 14326$, de sorte que $\operatorname{inv}\operatorname{Exc}\sigma = 1$, $\operatorname{inv}\operatorname{Nexc}\sigma = 3$ et $\operatorname{den}\sigma = (1+3+5)+1+3 = 13$.

Pour le mot sous-excédant $s = 000320503$, on a $\operatorname{eul} s = 3$ et $\operatorname{tot} s = 13$.

Parmi ces statistiques, "den" est la plus récente ; on connait donc moins bien ses propriétés. La première étude la concernant repose sur une conjecture de Denert [Den], qui a été prouvée par Foata et Zeilberger [F-Z]. Pour ce faire, ils ont utilisé une bijection pour traduire la conjecture dans l'ensemble U_n des chemins de Motzkin et bâti ensuite un calcul algébrique assez complexe.

Dans deux précédentes notes ([Ha1], [Ha2]), nous avons construit deux bijections explicites pour démontrer directement la conjecture de Denert. Ceci nous a amené à découvrir de nouvelles propriétés de la statistique de Denert et à revoir toute l'étude des statistiques dites euler-mahoniennes. Le présent article a pour but d'énoncer et de démontrer ces propriétés. Le corollaire 4.6, par exemple, donne pour la première fois un maj-codage assez simple. Le théorème 5.5 donne une M-bijection qui est à la fois $(\operatorname{des}, \operatorname{maj})$-codageable et $(\operatorname{exc}, \operatorname{den})$-codageable. Dans le corollaire 7.9, on construit plusieurs statistiques euler-mahoniennes dont le premier argument est la statistique eulérienne "exc."

Nous avons été amenés à définir des *intervalles cycliques*, permettant d'avoir une description globale des statistiques mahoniennes "inv," "maj," et "den" et obtenir ainsi une extension naturelle de leurs propriétés classiques. Ceci est traité dans la section 7.

L'action du groupe diédral sur $\mathfrak{S}_n$ a fourni des propriétés intéressantes de symétrie de la statistique bivariée (des, maj) (*cf.* [FS3]). Comme celle-ci a même distribution que (exc, den), il paraissait naturel d'imaginer les opérations géométriques qu'il fallait définir sur $\mathfrak{S}_n$ pour obtenir des propriétés analogues pour (exc, den). Nous avons ainsi été amenés à définir le ζ-*complément* et le ζ-*retournement* d'une permutation et à en étudier les propriétés. Ces nouvelles propriétés sont décrites dans la section 9.

Denert a introduit une famille de polynômes $f^\eta(q)$, où η est une partition, pour l'étude des fonctions "genus zeta" [Den]. Lorsque $\eta = 111\ldots1$, ces polynômes sont les polynômes q-eulériens, c'est-à-dire, les fonctions génératrices de la statistique (des, maj) (ou de (exc, den)) sur les groupes symétriques, ce qui est une conséquence du résultat établi par Foata et Zeilberger. On pouvait s'attendre à ce que pour une partition quelconque, les polynômes $f^\eta(q)$ soient les fonctions génératrices de $(\mathrm{des}, \mathrm{maj})$ ou de $(\mathrm{exc}, \mathrm{den})$ sur des classes de réarrangements de mots quelconques (avec répétitions).

Les statistiques "exc," "des" et "maj" pour les mots quelconques sont classiques (voir ci-dessous). Il restait à trouver une définition adéquate pour "den" valable pour les mots quelconques et de construire, pour une classe de réarrangements d'un mot (quelconque), une bijection de cette classe sur elle-même qui envoie la paire $(\mathrm{des}, \mathrm{maj})$ sur $(\mathrm{exc}, \mathrm{den})$. Le but de la seconde partie de cet article (en fait, toute la section 10) est de donner la construction d'une telle bijection. Nous l'avons appelée "troisième transformation fondamentale," les deux premières transformations fondamentales (valables pour les mots arbitraires) ayant été construites par Foata ([Fo1]). Il reste encore à vérifier que $f^\eta(q)$ est bien la fonction génératrice de $(\mathrm{exc}, \mathrm{den})$ (donc de $(\mathrm{des}, \mathrm{maj})$) sur une classe de mots correspondant à la partition η. Nous ne le ferons pas ici, car la définition des polynômes $f^\eta(q)$ proposée par Denert est compliquée, voire inutilisable. Nous avons préféré rester dans l'algèbre des réarrangements des mots et donner explicitement la construction de cette transformation fondamentale.

Plus précisément, soient u un mot quelconque de longueur n. Si a désigne le réarrangement *croissant* de ce mot, on notera $R(u)(= R(a))$ la classe de tous les réarrangements du mot u. De façon classique, on définit $\mathrm{exc}\, u$, $\mathrm{des}\, u$, $\mathrm{inv}\, u$ et $\mathrm{maj}\, u$ par :

$$\mathrm{exc}\, u = \#\{i \mid 1 \le i \le n,\ u_i > a_i\},$$
$$\mathrm{des}\, u = \#\{i \mid 1 \le i \le n-1,\ u_i > u_{i+1}\},$$
$$\mathrm{inv}\, u = \#\{i < j \mid u_i > u_j\}, \quad \mathrm{maj}\, u = \sum\{i \mid 1 \le i \le n-1,\ u_i > u_{i+1}\}.$$

Pour définir $\operatorname{den} u$, nous avons non seulement besoin de "inv" qui désigne le *nombre d'inversions ordinaires*, mais aussi le *nombre d'inversions faibles*

$$\operatorname{imv} u = \#\{i < j \mid u_i \geq u_j\}.$$

Comme pour les permutations ordinaires, on dit que pour le mot $u = u_1 u_2 \dots u_n$, l'entier i est une *place d'excédance*, ou de *non-escédance*, si l'on a $u_i > a_i$, ou si l'on a $u_i \leq a_i$. Comme dans la définition 1.1(iv), on peut former les deux sous-mots $\operatorname{Exc} u$ et $\operatorname{Nexc} u$.

Définition 1.3. — Pour un mot u, on pose

$$\operatorname{den} u = \sum_i \{i \mid u_i > a_i\} + \operatorname{imv} \operatorname{Exc} u + \operatorname{inv} \operatorname{Nexc} u.$$

On notera que dans cette définition on prend les inversions *faibles* pour le sous-mot des places d'excédances et les inversions *ordinaires* pour le sous-mot des places de non-excédances.

Par exemple, pour le mot

$$\begin{pmatrix} a \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ \mathbf{3} & \mathbf{5} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & 1 & 3 & \mathbf{5} & 1 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

on a $\operatorname{exc} u = 7$, puis $\operatorname{Exc} u = 3533455$ et $\operatorname{Nexc} u = 1312531$. D'où

$$\begin{aligned} \operatorname{den} u &= (1+2+3+4+5+6+9) + \operatorname{imv}(3533455) + \operatorname{inv}(1312531) \\ &= 30 + 9 + 7 = 46. \end{aligned}$$

Le résultat essentiel de ce mémoire est de donner la construction de cette troisième transformation fondamentale, c'est-à-dire, la construction d'une bijection $u \mapsto \widetilde{u}$ de $R(a)$ sur lui-même satisfaisant

$$\operatorname{des} u = \operatorname{exc} \widetilde{u}\,; \qquad \operatorname{maj} u = \operatorname{den} \widetilde{u}.$$

La construction d'une transformation ayant ces propriétés entraîne le théorème suivant.

Théorème 1.4. — *Pour tout mot u, les deux paires de statistiques* $(\operatorname{des}, \operatorname{maj})$ *et* $(\operatorname{exc}, \operatorname{den})$ *sont équidistribuées sur $R(u)$.*

Pour la construction de la troisième fondamentale, nous avons repris les techniques de décomposition des bimots en cycles (voir [Fo1]). Il faut alors recourir à des transpositions de bilettres successives, dont la règle de commutation est plus complexe que dans le cas de la construction de la première transformation fondamentale. Nous terminons cette partie par une présentation de plusieurs tableaux annexes.

2. Codage

Supposons donné pour chaque entier $n \geq 1$ un ensemble E_n de cardinal $n!$

Définition 2.1. — On appelle *M-bijection* une suite de bijections de la forme :

$$\begin{array}{ccc} E_{n-1} \times [0, n-1] & \xrightarrow{\Psi} & E_n \\ (\pi, x) & \longmapsto & \sigma \end{array}$$

($n \geq 1$). On convient que $E_0 = \emptyset$. On voit alors que la condition $\#E_n = n!$ est nécessaire dans cette définition. Plusieurs de ces bijections seront utilisées et notamment :

(i) *La M-bijection canonique* sur les ensembles SE_n, qui à tout mot sous-excédant s de longueur $n-1$ et à tout $x \in [0, n-1]$ fait correspondre :

$$\Psi_{\mathrm{can}}(s, x) = sx = s_1 s_2 \cdots s_{n-1} x \in SE_n.$$

(ii) *L'insertion par valeur* sur les groupes symétriques $\mathfrak{S}_n$, qui à toute permutation $\pi = \pi_1 \pi_2 \cdots \pi_{n-1} \in \mathfrak{S}_{n-1}$ et à tout $x \in [0, n-1]$, fait correspondre :

$$\Psi_{\mathrm{val}}(\pi, x) = \pi_1 \pi_2 \cdots \pi_x n \pi_{x+1} \cdots \pi_n \in \mathfrak{S}_n.$$

(iii) *L'insertion par position* encore sur les groupes symétriques $\mathfrak{S}_n$, définie par :

$$\Psi_{\mathrm{pos}}(\pi, x) = \pi'(x+1) \in \mathfrak{S}_n,$$

où π' est la permutation sur $[n] \setminus \{x+1\}$ dont la *réduction* $\Omega(\pi')$ est égale à π. (Pour la réduction, *cf.* [Ha3].) Par exemple, $\Psi_{\mathrm{pos}}(71548326, 3) = 816593274$.

(iv) *L'insertion cyclique.* Si $\pi = \pi_1 \pi_2 \cdots \pi_{n-1} \in \mathfrak{S}_{n-1}$ et $x \in [0, n-1]$, on décompose $\pi = \pi' \pi''$ avec $|\pi'| =$ (longueur du facteur π') $= x$ et on pose :

$$\Psi_{\mathrm{ch}}(\pi, x) = \Omega(\pi'' 0 \pi').$$

(v) *La somme cyclique.* Soient σ une permutation à n lettres sur $[0, n-1]$ et $r \in [1, n]$; on note $\tau = \sigma + r$ la permutation sur $[n]$ définie, pour tout $i \in [n]$, par

$$\tau_i = \begin{cases} \sigma_i + r & \text{si } \sigma_i + r \leq n\,; \\ \sigma_i + r - n & \text{si } \sigma_i + r \geq n+1. \end{cases}$$

La M-bijection Ψ_{cyc} est alors définie comme la fonction qui envoie le couple (π, x), où $\pi = \pi_1\pi_2\cdots\pi_{n-1}$, sur

$$\Psi_{\mathrm{cyc}}(\pi, x) = (\pi_1\pi_2\cdots\pi_{n-1}0) + (x+1).$$

Par exemple, $\Psi_{\mathrm{cyc}}(71548326, 3) = (715483260) + 4 = 259837614$.

(vi) Dans [Ha1], nous avons construit une M-bijection Ψ_{den} sur les ensembles U_n des chemins de Motzkin.

(vii) Nous construisons, dans la section 5, une autre M-bijection, appelée Ψ_{mix}, sur les groupes symétriques.

Définition 2.2. — Si Ψ est une M-bijection sur les ensembles E_n, en appliquant Ψ^{-1} itérativement, on obtient une bijection $\overline{\Psi} : E_n \to SE_n$, appelée *codage*. Cette bijection $\overline{\Psi}$ peut être caractérisée par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} E_{n-1}\times[0,n-1] & \xrightarrow{\Psi} & E_n \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \overline{\Psi}\times\mathrm{id}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \overline{\Psi}} \\ SE_{n-1}\times[0,n-1] & \xrightarrow{\Psi_{\mathrm{can}}} & SE_n \end{array}$$

Par exemple, sur $\mathfrak{S}_n$, le codage $\overline{\Psi}_{\mathrm{pos}}$ donne le complément de tableau d'inversion : $\overline{\Psi}_{\mathrm{pos}}(71548326) = 00114115$; le tableau d'inversion est $012345678 - 00114115 = 01120452$; d'où $\mathrm{inv}(71548326) = 15$.

3. Introduction aux statistiques euler-mahoniennes

Définition 3.1. — Soient f, g deux statistiques sur E_n. On dit que f est *eulérienne* (resp. g est *mahonienne*, resp. (f, g) est *euler-mahonienne*), s'il existe une M-bijection $\Psi(\pi, x) = \sigma$ satisfaisant la condition (i) (resp. la condition (ii), resp. les conditions (i) et (ii)) suivantes :

(i) $$f(\sigma) = \begin{cases} f(\pi), & \text{si } 0 \le x \le f(\pi)\,; \\ f(\pi)+1, & \text{si } f(\pi)+1 \le x \le n-1\,; \end{cases}$$

(ii) $$g(\sigma) = g(\pi) + x.$$

Dans les deux derniers cas, le codage $\overline{\Psi}$ associé à la M-bijection Ψ est appelé respectivement *g-codage* et *(f, g)-codage* et on a $g(\sigma) = \mathrm{tot}(\overline{\Psi}(\sigma))$. Notons $\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} t^{f(\sigma)}q^{g(\sigma)} = \sum_{k\ge 0} A_{n,k}(q)t^k$ la fonction génératrice de la statistique euler-mahonienne (f, g). Les polynômes $A_{n,k}(q)$ sont appelés

polynômes q-eulériens. Posant $A_{n,0}(q) = 1$ et $A_{n,k}(q) = 0$ pour $k \geq n$, on voit que les conditions (i) et (ii) précédentes impliquent immédiatement la relation de récurrence de Carlitz (*cf.* [Car]) :

$$[C] \qquad A_{n,k}(q) = [k+1]_q A_{n-1,k}(q) + q^k [n-k]_q A_{n-1,k-1}(q)$$

$(1 \leq k \leq n-1)$, où l'on a posé : $[\,k\,]_q = 1 + q + \cdots + q^{k-1}$ pour $k \geq 1$.

Le tableau 1 donne des valeurs de ces polynômes pour $n \leq 5$. Le coefficient de q^4 dans le polynôme $A_{5,1}$ est égal à 4 ; ceci signifie qu'il y a exactement quatre permutations 12354, 12453, 13452 et 23451, dont le nombre de descentes et l'indice majeur sont respectivement 1 et 4.

$k=$ / $n=$	0	1	2	3	4
1	1	0	0	0	0
2	1	q	0	0	0
3	1	$2q + 2q^2$	q^3	0	0
4	1	$3q + 5q^2 + 3q^3$	$3q^3 + 5q^4 + 3q^5$	q^6	0
5	1	$4q + 9q^2$ $+9q^3 + 4q^4$	$6q^3 + 16q^4$ $+22q^5 + 16q^6 + 6q^7$	$4q^6 + 9q^7$ $+9q^8 + 4q^9$	q^{10}

Tableau 1

Supposons associée à tout élément π de E_{n-1} une permutation $\rho = \rho^\pi$, notée encore $\rho(\pi, *)$ sur $[0, n-1]$. Une telle permutation sera appelée une *renumérotation*. Evidemment, si Ψ est une M-bijection et ρ une renumérotation, la composition $\Psi \circ \rho$ définie par le diagramme commutatif suivant est aussi une M-bijection.

$$\begin{array}{ccc} E_{n-1} \times [0, n-1] & \xrightarrow{\Psi \circ \rho} & E_n \\ (\pi, x) & & \\ \Big\downarrow \rho & \nearrow \Psi & \\ E_{n-1} \times [0, n-1] & & \\ (\pi, \rho^\pi(x)) & & \end{array}$$

Définition 3.2. — Soient g une statistique mahonienne sur E_n et Ψ une M-bijection ; s'il existe une renumérotation ρ telle que $\overline{\Psi \circ \rho}$ est

un g-codage, alors le codage $\overline{\Psi}$ (ou parfois, la M-bijection Ψ) est dit *g-codageable*. Soient (f, g) une statistique euler-mahonienne, le mot *(f, g)-codageable* est défini de la même façon.

Remarque 3.3. — Pour vérifier qu'une statistique g est mahonienne, il suffit de construire une bijection g-codageable. Si g est mahonienne et Ψ est une M-bijection g-codageable, alors il existe une et une seule renumérotation ρ telle que $\overline{\Psi \circ \rho}$ est un g-codage. Pour la statistique euler-mahonienne (f, g), on a la même propriété.

Exemple 3.4

(i) Sur les ensembles SE_n, $\overline{\Psi_{\mathrm{can}}}$ est un $(\mathrm{eul}, \mathrm{tot})$-codage.

(ii) Sur les groupes symétriques $\mathfrak{S}_n$, la M-bijection Ψ_{val} est inv-codageable. Avec la renumérotation $\rho(\pi, x) = (\pi, n-x-1)$, la composition $\overline{\Psi_{\mathrm{val}} \circ \rho}$ est un inv-codage.

(iii) De même, la M-bijection Ψ_{pos} est inv-codageable. Avec la renumérotation $\rho(\pi, x) = (\pi, n - x - 1)$, la composition $\overline{\Psi_{\mathrm{pos}} \circ \rho}$ est un inv-codage.

(iv) Dans la section suivante, on va démontrer que Ψ_{val} est $(\mathrm{des}, \mathrm{maj})$-codageable (*cf.*, par exemple, [Raw]), et que Ψ_{cyc} est maj-codageable (*cf.* Corollaire 4.6).

(v) Soit $\sigma = \sigma_1\sigma' \in \mathfrak{S}_n$, on pose $\pi = \sigma'\sigma_1$. Alors, on a $\mathrm{ch}\,\pi = \mathrm{ch}\,\sigma + 1$ si $\sigma_1 \neq 1$ et $\mathrm{ch}\,\pi = \mathrm{ch}\,\sigma + 1 - n$ si $\sigma_1 = 1$. D'où $\mathrm{ch}(\Psi_{\mathrm{ch}}\sigma) = \mathrm{ch}\,\sigma + x$. Autrement dit, Ψ_{ch} est un ch-codage. (*cf.* [L-S])

(vi) Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on définit le *nombre de filières* de cette permutation par $\mathrm{fil}\,\sigma = \mathrm{ch}\,n$, où $\mathrm{ch}\,n$ est la charge de la lettre n (*cf.* définition 1.1 (vi)). Alors, par la bijection qui envoie une permutation σ sur le retournement de son inverse : $\sigma \mapsto (\sigma^{-1})^r$, on vérifie facilement que (fil, ch) est euler-mahonienne.

4. Insertion de Rawlings et sa généralisation

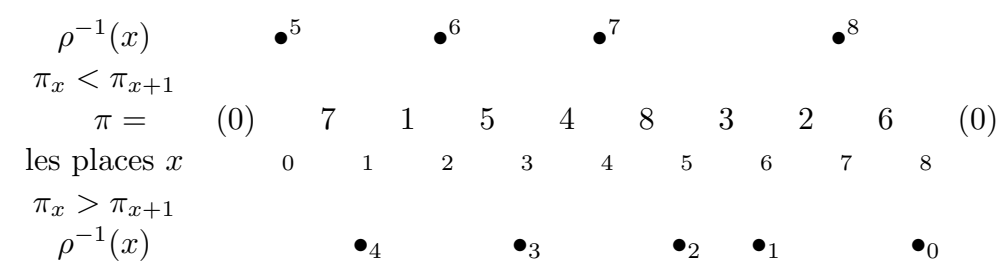
En considérant la M-bijection Ψ_{val} et les statistiques des et maj, on a immédiatement :

Lemme 4.1. — *Soit $\pi = \pi_1\pi_2\cdots\pi_{n-1} \in \mathfrak{S}_{n-1}$ une permutation. Par convention, on pose $\pi_0 = \pi_n = 0$. Alors le changement du nombre de descentes après application de la M-bijection Ψ_{val} se calcule par :*

$$\mathrm{des}(\Psi_{\mathrm{val}}(\pi, x)) - \mathrm{des}\,\pi = \begin{cases} 0, & \textit{si } \pi_x > \pi_{x+1}\,; \\ 1, & \textit{si } \pi_x < \pi_{x+1}. \end{cases}$$

Pour une place $x \in [0, n-1]$, on insère n à cette place pour former la permutation $\Psi_{\mathrm{val}}(\pi, x) = \cdots \pi_x n \pi_{x+1} \cdots$. Si $\pi_x > \pi_{x+1}$, le nombre de descentes ne change pas, on met un point *au-dessous* de cette place ; sinon, le nombre de descentes augmente d'une unité, on met dans ce cas un point *au-dessus* de cette place. On renumérote les points $0, 1, 2, \ldots, n-1$ en commençant de droite à gauche pour les points du bas ; puis de gauche à droite pour ceux du haut. On construit ainsi l'inverse ρ^{-1} de la renumérotation ρ.

Par exemple, pour la permutation $\pi = 71548326$, on a $\rho^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 0&1&2&3&4&5&6&7&8 \\ 5&4&6&3&7&2&1&8&0 \end{smallmatrix}\right)$:



En examinant les changements de l'indice majeur, on obtient immédiatement le lemme suivant :

LEMME 4.2. — *La M-bijection Ψ_{val} est* $(\mathrm{des}, \mathrm{maj})$*-codageable et a ρ pour renumérotation* (*cf.*, par exemple, [Raw]). □

Dans le tableau 2, on a illustré le résultat de ce lemme à l'aide de la permutation $\pi = 71548326$.

x	$\Psi_{\mathrm{val}}(\pi, x)$	des	maj	$\rho^{-1}(\pi, x)$
0	9 7 1 5 4 8 3 2 6	5	20	5
1	7 9 1 5 4 8 3 2 6	4	19	4
2	7 1 9 5 4 8 3 2 6	5	21	6
3	7 1 5 9 4 8 3 2 6	4	18	3
4	7 1 5 4 9 8 3 2 6	5	22	7
5	7 1 5 4 8 9 3 2 6	4	17	2
6	7 1 5 4 8 3 9 2 6	4	16	1
7	7 1 5 4 8 3 2 9 6	5	23	8
8	7 1 5 4 8 3 2 6 9	4	15	0

Tableau 2

Cette insertion par valeur peut se généraliser comme suit : soient k un entier et $\overline{k}$ une lettre dont la grandeur est comprise entre $k-1$ et k (i.e., $k-1<\overline{k}<k$). On définit une M-bijection Ψ_k, appelée k-insertion, par

$$[D1] \qquad \Psi_k(\pi_1\pi_2\cdots\pi_{n-1},x)=\Omega(\pi_1\pi_2\cdots\pi_x\overline{k}\pi_{x+1}\cdots\pi_n)\in\mathfrak{S}_n,$$

où Ω est encore la réduction. Comme la réduction est une opération simple à faire, on note également Ψ_k la M-bijection opérant sur les permutations (non-réduites) de $[n-1]\cup\overline{k}$.

On a besoin aussi de la notation suivante :

Définition 4.3. — Soient x,y et z trois nombres réels. On dit que le triplet (x,y,z) est un *triplant*, noté $x\geq_y z$, si ou bien $x\geq z$ avec y *à l'extérieur* de l'intervalle $[z,x]$, ou bien $x<z$ avec y *à l'intérieur* de $]x,z[$; en d'autres termes, si l'une des conditions suivantes est satisfaite : $y<z\leq x$, $z\leq x<y$, ou $x<y<z$. On utilise les autres écritures dérivées : $x>_y z$ signifie $x\geq_y z$ et $x\neq z$. On écrit encore $x\leq_y z$, si $x>_y z$ n'est pas vrai.

Définition 4.4. — Soit $\pi\in\mathfrak{S}_n$ [par convention, on pose $\pi_0=\pi_{n+1}=0$] ; on dit qu'il y a une *k-descente* à la place i, ou que i est une *place de k-descente*, si $\pi_i>_{\overline{k}}\pi_{i+1}$, c'est-à-dire si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

$$\pi_i>\pi_{i+1}>\overline{k}, \qquad \overline{k}>\pi_i>\pi_{i+1}, \qquad \pi_i<\overline{k}<\pi_{i+1}.$$

Le nombre de *k-descentes* et l'indice *k-majeur* sont définis par

$$\mathrm{des}_k(\pi)=\#\{i\mid \pi_i>_{\overline{k}}\pi_{i+1}\}-1;$$

et

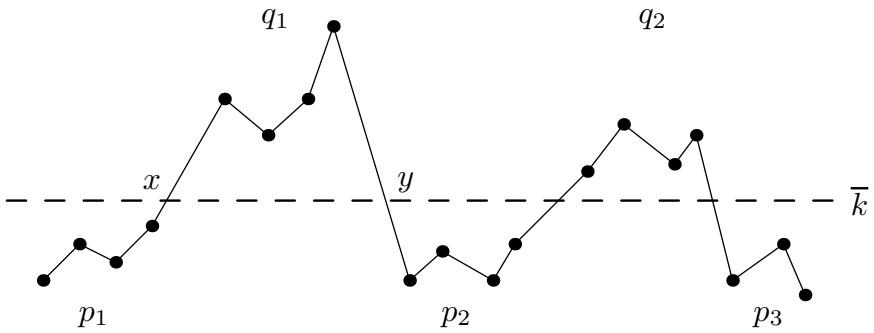
$$\mathrm{maj}_k(\pi)=\sum\{i\mid \pi_i>_{\overline{k}}\pi_{i+1}\}-n.$$

Lemme 4.5. — *On a en fait* $\mathrm{des}_k=\mathrm{des}$ *et* $\mathrm{maj}=\mathrm{maj}_k+n-k+1$.

Démonstration. — Soit $\pi=(\pi_0=0)\pi_1\pi_2\cdots\pi_n(\pi_{n+1}=0)$ une permutation. On peut décomposer le mot π de façon unique comme suit :

$$\pi=p_1q_1p_2q_2\cdots p_rq_rp_{r+1},$$

où les p_i sont des mots dont toutes les lettres sont plus petites que $\overline{k}$ et où les q_i sont des mots dont toutes les lettres sont plus grandes que $\overline{k}$.



Soit x une place de descente ordinaire de π ($\pi_x > \pi_{x+1}$). Si π_x n'est pas la dernière lettre d'un facteur q_i ($1 \leq i \leq r$), alors x est aussi une place pour une k-descente; si π_x est la dernière lettre de q_i, alors x est une place de descente ordinaire, mais non de k-descente. Si π_y est la dernière lettre du mot p_i ($1 \leq i \leq r$), on voit que y est une place de k-descente, mais non de descente ordinaire. Ainsi, il y a autant de descentes que de k-descentes, d'où $\operatorname{des}+1 = \operatorname{des}_k+1$. De plus, $\operatorname{maj}\pi - \operatorname{maj}_k\pi = (|p_1|+|q_1|+\cdots+|p_r|+|q_r|) - (|p_1|+\cdots+|p_r|) = n-k+1$. □

Par exemple, pour $\pi = \left(\begin{smallmatrix}0&1&2&3&4&5&6&7&8&9\\0&7&1&5&4&8&3&2&6&0\end{smallmatrix}\right)$ et $k=5$, la décomposition est $\pi = 0\cdot 7\cdot 1\cdot 5\cdot 4\cdot 8\cdot 32\cdot 6\cdot 0$. Les places de descente et de k-descente sont respectivement $\{1,3,5,6,8\}$ et $\{0,2,4,6,7\}$, d'où $\operatorname{maj}\pi = 1+3+5+6+8-8 = 15$ et $\operatorname{maj}_k\pi = 0+2+4+6+7-8 = 11 = \operatorname{maj}\pi-(n-k+1)$.

Corollaire 4.6. — *La M-bijection Ψ_{cyc} est* maj*-codageable. Avec la renumérotation $\rho(\pi,x) = (\pi, n-x-1)$, la composition $\overline{\Psi_{\mathrm{cyc}}\circ\rho}$ est un* maj*-codage.*

Démonstration. — Soit $\Psi_{\mathrm{cyc}}(\pi,x) = \sigma$, alors i est une place de descente pour σ, si et seulement si elle est une place de k-descente de π avec $k = n-x$ (voir le graphe précédent). D'où $\operatorname{maj}\sigma = \operatorname{maj}_k\pi+(n-1) = \operatorname{maj}\pi+(n-x-1)$. □

On a, pour les k-descentes, les mêmes résultats que pour les descentes ordinaires :

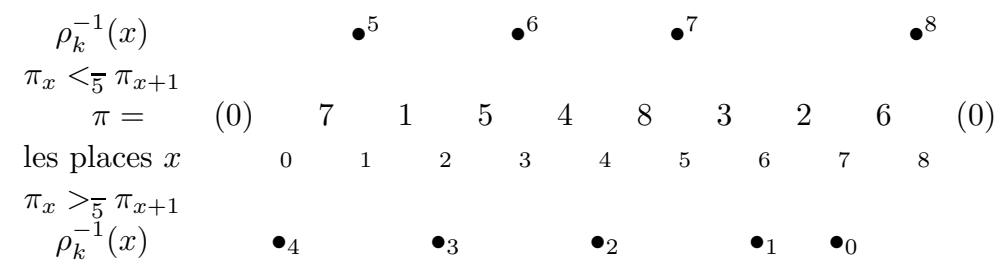
Lemme 4.7. — *Le changement du nombre de descentes après application de la M-bijection Ψ_k se calcule par* :

$$\operatorname{des}(\Psi_k(\pi,x)) - \operatorname{des}\pi = \begin{cases} 0, & \text{si } \pi_x >_{\overline{k}} \pi_{x+1}\,; \\ 1, & \text{si } \pi_x <_{\overline{k}} \pi_{x+1}. \end{cases}$$

On insère $\overline{k}$ à la place $x \in [0,n-1]$ pour former la permutation $\Psi_k(\pi,x) = \cdots\pi_x\overline{k}\pi_{x+1}\cdots$. Si l'on a $\pi_x >_{\overline{k}} \pi_{x+1}$, le nombre de descentes

ne change pas ; on met alors un point *au-dessous* de cette place ; sinon, le nombre de descentes augmente d'une unité ; on met, dans ce cas, un point *au-dessus* de cette place. On renumérote les points $0, 1, 2, \cdots, n-1$ en commençant de droite à gauche pour les points en bas ; puis de gauche à droite pour ceux du haut. On construit ainsi l'inverse de la renumérotation associée. On la notera ρ_k^{-1}.

Par exemple, si on prend $k = 5$ et $\pi = 71548326$, on a $\rho_k^{-1} = \binom{0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8}{4\ 5\ 3\ 6\ 2\ 7\ 1\ 0\ 8}$:



D'après les deux lemmes précédents, en examinant les changements de l'indice majeur, on peut vérifier le théorème suivant :

THÉORÈME 4.8. — *La M-bijection Ψ_k est* $(\mathrm{des}, \mathrm{maj})$*-codageable et a pour renumérotation ρ_k.* □

On prend la permutation $\pi = 71548326$ et $k = 5$; les exemples du tableau 3 vérifient ce théorème :

x	$\Psi_5(\pi, x)$	des	maj	$\rho_k^{-1}(\pi, x)$
0	$\overline{5}\ 7\ 1\ 5\ 4\ 8\ 3\ 2\ 6$	4	19	4
1	$7\ \overline{5}\ 1\ 5\ 4\ 8\ 3\ 2\ 6$	5	20	5
2	$7\ 1\ \overline{5}\ 5\ 4\ 8\ 3\ 2\ 6$	4	18	3
3	$7\ 1\ 5\ \overline{5}\ 4\ 8\ 3\ 2\ 6$	5	21	6
4	$7\ 1\ 5\ 4\ \overline{5}\ 8\ 3\ 2\ 6$	4	17	2
5	$7\ 1\ 5\ 4\ 8\ \overline{5}\ 3\ 2\ 6$	5	22	7
6	$7\ 1\ 5\ 4\ 8\ 3\ \overline{5}\ 2\ 6$	4	16	1
7	$7\ 1\ 5\ 4\ 8\ 3\ 2\ \overline{5}\ 6$	4	15	0
8	$7\ 1\ 5\ 4\ 8\ 3\ 2\ 6\ \overline{5}$	5	23	8

Tableau 3

5. Insertion par lettres différentes

Cette section contient le premier résultat principal de cet article. D'après la section précédente, l'insertion de la lettre $\overline{k}$ dans une permutation π fournit une M-bijection Ψ_k qui est $(\mathrm{des}, \mathrm{maj})$-codageable. Nous allons construire maintenant une M-bijection $(\mathrm{des}, \mathrm{maj})$-codageable obtenue par insertion de lettres différentes à des places bien déterminées, insertion suivie de quelques déplacements de lettres. Le plus remarquable est que cette nouvelle insertion fait apparaître les quatre statistiques $\mathrm{des}, \mathrm{maj}, \mathrm{exc}$ et den *à la fois*. Le résultat général est donné dans les théorèmes 5.4 et 5.5.

D'après la section précédente, à tout nombre $\overline{k}$ compris entre $(k-1)$ et k sont associées une M-bijection Ψ_k et une renumérotation ρ_k. Par exemple, si l'on prend la permutation $\pi = 71548326$, on peut donner les inverses des renumérotations ρ_k^{-1} pour $k = 9, 8, 7, 5$. Celles-ci sont calculées dans le tableau 4. La dernière ligne fait apparaître une renumérotation ρ_{mix}^{-1} qui sera définie plus loin (lemme 5.3).

Lemme 5.1. — *Soient k et $k+1$ deux entiers consécutifs. Alors, les deux renumérotations ρ_k^{-1} et ρ_{k+1}^{-1} ne diffèrent que par une transposition. Plus précisément, si $j = \pi^{-1}(k)$, on a*

$$\rho_k^{-1} = \rho_{k+1}^{-1} \circ (j-1, j) \ . \quad \square$$

Soient $k < l$ deux entiers. Si i est une place telle que $\pi(i) < k$ ou $\pi(i) > l-1$, alors, pour passer de ρ_l^{-1} à ρ_k^{-1}, on ne permute pas les deux places $(i-1)$ et i. Conservons ces mêmes notations dans l'énoncé suivant.

Lemme 5.2. — *Le mot $\rho_l^{-1}(0, 1, \cdots, i-1)$ est un réarrangement du mot $\rho_k^{-1}(0, 1, \cdots, i-1)$.* $\square$

π	=		7	1	5	4	8	3	2	6	
places x	=	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\rho_9^{-1}(x)$	=	5	4	6	3	7	2	1	8	**0**
$\rho_8^{-1}(x)$	=	5	4	6	3	2	7	1	**8**	0
$\rho_7^{-1}(x)$	=	4	5	6	3	2	**7**	**1**	8	0
$\rho_5^{-1}(x)$	=	**4**	**5**	**3**	**6**	**2**	7	1	0	8
$\rho_{\mathrm{mix}}^{-1}(x)$	=	**4**	**5**	**3**	**6**	**2**	**7**	**1**	**8**	**0**

Tableau 4

Notre but maintenant est de fabriquer à l'aide des ρ_k^{-1} une renumérotation permettant la construction d'une M-bijection qui soit à la fois

(des, maj)- et (exc, den)-codageable. Pour l'exemple ci-dessus on voit que la nouvelle application définie par

$$\begin{aligned}\rho_{\mathrm{mix}}^{-1}(0,1,2,3,4,5,6,7,8) &= \big(\rho_5^{-1}(0,1,2,3,4), \rho_7^{-1}(5,6), \rho_8^{-1}(7), \rho_9^{-1}(8)\big)\\ &= (4,5,3,6,2,7,1,8,0)\end{aligned}$$

est encore une permutation (renumérotation) sur $[0,8]$. (Voir les lettres grasses dans le tableau précédent.)

Quelle est la règle du choix pour les lettres 9, 8, 7 et 5 ? Ici, pour la première fois, les descentes et les excédances apparaissent dans une même construction. Soit $\pi \in \mathfrak{S}_{n-1}$ une permutation dont le nombre d'excédances $\operatorname{exc}\pi$ est égal à h. Les valeurs $v = \pi(i)$ telles que $\pi(i) > i$ ont été appelées *valeurs excédantes*; on note $\overline{\operatorname{Exc}}\,\pi = (v_1 < v_2 < \cdots < v_h)$ la suite croissante des *valeurs* excédantes ou, si l'on veut, le *réarrangement croissant* du mot $\operatorname{Exc}\pi$.

Dans l'exemple que nous traitons, $\overline{\operatorname{Exc}}(71548326) = 578$. Les lettres de ce mot sont justement les lettres qu'on a choisies pour les insertions dans le tableau précédent. De façon générale, posons :

[*D*2]
$$\rho_{\mathrm{mix}}^{-1}(x) = \begin{cases} \rho_{v_1}^{-1}(x)\ , & \text{si } 0 \le x < v_1\,;\\ \rho_{v_2}^{-1}(x)\ , & \text{si } v_1 \le x < v_2\,;\\ \cdots\cdots & \\ \rho_{v_h}^{-1}(x)\ , & \text{si } v_{h-1} \le x < v_h\,;\\ \rho_{n}^{-1}(x)\ , & \text{si } v_h \le x < n. \end{cases}$$

Lemme 5.3. — *L'application ρ_{mix} définie ci-dessus est une permutation sur $[0, n-1]$.*

Démonstration. — Soient $k < l$ deux *valeurs excédantes consécutives* de la permutation π. On a donc nécessairement : ou bien $\pi(k) < k$, ou bien $\pi(k) > l-1$. Pour démontrer le lemme, il suffit de vérifier que le mot $\rho_l^{-1}(0,1,\cdots,k-1)$ est un réarrangement du mot $\rho_k^{-1}(0,1,\cdots,k-1)$. Ceci est vrai d'après le lemme 5.2, puisque l'entier k satisfait les conditions de ce lemme. □

On définit la nouvelle M-bijection $\Psi_{\mathrm{mix}} : \mathfrak{S}_{n-1} \times [n-1] \to \mathfrak{S}_n$ de la façon suivante : soit $\overline{\operatorname{Exc}}\,\pi = v_1 v_2 \cdots v_h$ la suite *croissante* des valeurs excédantes de la permutation π. Par convention, on pose $v_0 = 0$ et $v_{h+1} = n$. Soient x une place et j l'entier tel que $v_{j-1} \le x < v_j$. On définit (voir [D2] et [D1]) :

$$\Psi'_{\mathrm{mix}}(\pi, x) = \cdots \pi_x \overline{v_j} \pi_{x+1} \cdots.$$

Reprenant toujours le même exemple de la permutation $\pi = 71548326$, on a consigné dans la partie gauche du tableau 5 la construction de Ψ'. Il faut faire attention qu'on ne peut pas faire la réduction tout de suite. En effet, l'application $(\pi, x) \mapsto \Omega\big(\Psi'_{\mathrm{mix}}(\pi, x)\big) \in \mathfrak{S}_n$ n'est pas *bijective*. La bonne façon est de ne faire la "réduction" que sur les valeurs excédantes. Plus précisément, dans le mot $\Psi'_{\mathrm{mix}}(\pi, x)$, obtenu par une insertion de la lettre $\overline{v_j}$, en remplaçant les lettres $\overline{v_j}$ par v_j, v_j par v_{j+1}, ..., v_h par $v_{h+1} = n$, on trouve une permutation de $\mathfrak{S}_n$, notée $\Psi_{\mathrm{mix}}(\pi, x)$. La place $x + 1$ est appelée *place d'insertion* de la permutation $\Psi_{\mathrm{mix}}(\pi, x)$.

Par exemple, pour $\pi = 71548326$ et $x = 5$, $\Psi'_{\mathrm{mix}}(\pi, 5) = 71548\overline{7}326$, d'où la suite de remplacement est $8 \hookleftarrow 9$, $7 \hookleftarrow 8$, $\overline{7} \hookleftarrow 7$, on a donc $\Psi_{\mathrm{mix}}(\pi, 5) = 815497326$. La place d'insertion est 6. On a consigné dans la partie droite du tableau 5 la construction de Ψ.

Théorème 5.4. — *L'application* Ψ_{mix} *définie ci-dessus est bien une bijection.*

Théorème 5.5. — *La M-bijection* Ψ_{mix} *est à la fois* $(\mathrm{des}, \mathrm{maj})$*-codageable et* $(\mathrm{exc}, \mathrm{den})$*-codageable.*

Ces deux théorèmes vont être démontrés dans la section suivante.

x	$\Psi'_{\mathrm{mix}}(\pi, x)$	des maj	ρ^{-1}_{mix}	$\Psi_{\mathrm{mix}}(\pi, x)$	exc den	μ^{-1}_{mix}
0	$\overline{5}\ 7\ 1\ 5\ 4\ 8\ 3\ 2\ 6$	4 19	4	5 8 1 7 4 9 3 2 6	4 17	4
1	$7\ \overline{5}\ 1\ 5\ 4\ 8\ 3\ 2\ 6$	5 20	5	8 5 1 7 4 9 3 2 6	4 18	5
2	$7\ 1\ \overline{5}\ 5\ 4\ 8\ 3\ 2\ 6$	4 18	3	8 1 5 7 4 9 3 2 6	4 19	6
3	$7\ 1\ 5\ \overline{5}\ 4\ 8\ 3\ 2\ 6$	5 21	6	8 1 7 5 4 9 3 2 6	4 20	7
4	$7\ 1\ 5\ 4\ \overline{5}\ 8\ 3\ 2\ 6$	4 17	2	8 1 7 4 5 9 3 2 6	3 16	3
5	$7\ 1\ 5\ 4\ 8\ \overline{7}\ 3\ 2\ 6$	5 22	7	8 1 5 4 9 7 3 2 6	4 21	8
6	$7\ 1\ 5\ 4\ 8\ 3\ \overline{7}\ 2\ 6$	4 16	1	8 1 5 4 9 3 7 2 6	3 15	2
7	$7\ 1\ 5\ 4\ 8\ 3\ 2\ \overline{8}\ 6$	5 23	8	7 1 5 4 9 3 2 8 6	3 14	1
8	$7\ 1\ 5\ 4\ 8\ 3\ 2\ 6\ \overline{9}$	4 15	0	7 1 5 4 8 3 2 6 9	3 13	0

Tableau 5

6. Démonstrations des théorèmes principaux 5.4 et 5.5

On va d'abord introduire quelques notations.

Définition 6.1. — Soit n un entier. Pour deux entiers $x, y \in [n]$, les

intervalles cycliques sont définis par

$$[\![x,y]\!] = \begin{cases} [x,y] & \text{si } x \le y, \\ [1,y]+[x,n] & \text{si } x > y\,; \end{cases}$$

$$[\![x,y[\![= \begin{cases} [x,y[& \text{si } x \le y, \\ [1,y[+[x,n] & \text{si } x > y\,; \end{cases}$$

$$]\![x,y]\!] = \begin{cases}]x,y] & \text{si } x \le y, \\ [1,y]+]x,n] & \text{si } x > y\,; \end{cases}$$

$$]\![x,y[\![= \begin{cases}]x,y[& \text{si } x \le y, \\ [1,y[+]x,n] & \text{si } x > y. \end{cases}$$

D'après cette définition, on remarque que $[\![x,x]\!] = \{x\}$ et $[\![x,x[\![=]\![x,x]\!] =]\![x,x[\![= \emptyset$. Soient $x,y,z \in [n]$. En comparant avec la définition 4.3, on voit que x,y,z est un triplant, si et seulement si $z \in]\![y,x]\!]$.

Définition 6.2. — Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ une permutation. Le *contenu* de la place $i \in [n]$ est le nombre de valeurs excédantes dans l'intervalle cyclique $[\![i,\sigma_i[\![$. Autrement dit :

$$[D3] \qquad \operatorname{ctn} i = \#\{\operatorname{Exc}\sigma\} \cap [\![i,\sigma_i[\![\ .$$

Une place est dite *grande-fixe* pour la permutation σ si son contenu est vide. L'ensemble des places grandes-fixes de σ est noté $\operatorname{Gf}(\sigma)$.

Par exemple, pour la permutation $\sigma = 815497326$, on a $\{\operatorname{Exc}\sigma\} = \{5,7,8,9\}$ (les lettres soulignées) et le tableau 6 :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
σ_i	<u>8</u>	1	<u>5</u>	4	<u>9</u>	<u>7</u>	3	2	6
$\operatorname{ctn} i$	2	4	0	0	3	0	3	2	2

Tableau 6

d'où $\operatorname{Gf}(\sigma) = \{3,4,6\}$.

Lemme 6.3. — *Soient σ une permutation quelconque, alors* :

(i) *Les places fixes sont des places grandes-fixes.*

(ii) *Il y a au moins une place grande-fixe* : $\operatorname{Gf}(\sigma) \neq \emptyset$.

(iii) *Les places grandes-fixes non fixes sont toujours excédantes.*

Si $\sigma = \Psi_{\mathrm{mix}}(\pi,x)$, alors :

(iv) *La place d'insertion $x+1$ est une place grande-fixe.*

(v) *Toute place $i > x+1$ n'est pas une place grande-fixe.*

Démonstration.

(i) Soit i une place fixe, puisque $i = \sigma_i$, on a $[\![i, \sigma_i[\![= \emptyset$; d'où $\operatorname{ctn} i = 0$.

(ii) Si $\sigma = \mathrm{id}$, alors, toutes les places sont grandes-fixes ; sinon, on a $\{\operatorname{Exc}\sigma\} \neq \emptyset$. On note i la place telle que $\sigma_i = \min\{\operatorname{Exc}\sigma\}$. Il n'y a alors aucune valeur excédante dans l'intervalle $[\![i, \sigma_i[\![$. D'où $\operatorname{ctn} i = 0$.

(iii) Soit i une place ni fixe, ni excédante. Parmi les valeurs $i, i+1, \ldots, n-1, n$, il y a au moins une valeur excédante et celle-ci appartient à l'intervalle cyclique $[\![i, \sigma_i[\![$. Donc i n'est pas grande-fixe.

(iv) Considérons les constructions de Ψ'_{mix} et Ψ_{mix}, telles qu'elles ont été décrites à la fin du paragraphe 5, et posons $\overline{\operatorname{Exc}}\,\pi = (v_1, v_2, \cdots, v_h)$. S'il existe un entier i tel que $x+1 = v_i$ ($i \in [1, h+1]$; par convention $v_{h+1} = n$), la place d'insertion de σ est une place fixe, d'où grande-fixe. Sinon, soit $\Psi'_{\mathrm{mix}}(\pi, x) = \left(\begin{smallmatrix} \cdots & x & x+1 & x+2 & \cdots \\ \cdots & * & \overline{v_j} & * & \cdots \end{smallmatrix}\right)$; on a $\Psi_{\mathrm{mix}}(\pi, x) = \left(\begin{smallmatrix} \cdots & x & x+1 & x+2 & \cdots \\ \cdots & * & v_j & * & \cdots \end{smallmatrix}\right)$. Puisque $v_{j-1} \leq x < v_j$ et $x \neq v_j - 1$, il vient $[\![x+1, v_j[\![= [x+1, v_j[$. Remarquons que les valeurs excédantes de σ sont celles de π avec en plus la valeur excédante n. La relation $v_{j-1} \leq x < v_j$ implique qu'aucune valeur excédante n'appartient à $[x+1, v_j[$. D'où $\operatorname{ctn}(x+1) = 0$.

(v) A cause de (i) et (iii), il suffit de considérer les places i qui sont excédantes. Soit $\sigma = \Psi_{\mathrm{mix}}(\pi, x) = \left(\begin{smallmatrix} \cdots & x+1 & \cdots & i & \cdots \\ \cdots & v_j & \cdots & v_l & \cdots \end{smallmatrix}\right)$ avec $v_j < x+1 < i < v_l$. Par construction, $\Psi'_{\mathrm{mix}}(\pi, x) = \left(\begin{smallmatrix} \cdots & x+1 & \cdots & i & \cdots \\ \cdots & \overline{v_j} & \cdots & v_{l-1} & \cdots \end{smallmatrix}\right)$. Alors i est encore une place excédante. D'où $v_{l-1} \in [i, v_l[$. □

Avec la construction de l'inverse de l'application Ψ_{mix} que nous donnons maintenant s'achève la démonstration du théorème 5.4.

Construction de $\Psi^{-1}_{\mathrm{mix}}(\sigma) = (\pi, x)$. — Pour une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, soit p la plus grande place grande-fixe, i.e., $p = \max \mathrm{Gf}(\sigma)$, on pose $x = p-1$. Si n est une place grande-fixe, on pose $\pi = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{n-1}$; sinon, soient $\overline{\operatorname{Exc}}\,\sigma = (v_1 v_2 \cdots v_h)$ la suite croissante des valeurs excédantes de σ et j un entier tel que $v_{j-1} \leq \sigma_p < v_j$. Alors, on remplace v_j par σ_p, v_{j+1} par v_j, v_{j+2} par v_{j+1}, ... , $v_h = n$ par v_{h-1} et on obtient bien la permutation $\pi \in \mathfrak{S}_{n-1}$. □

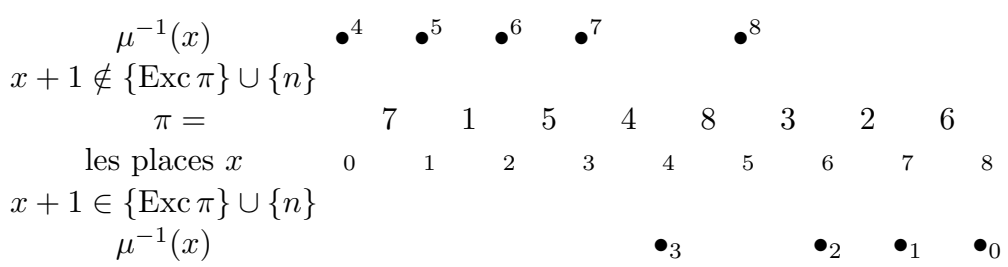
Pour le théorème 5.5, on sait tout d'abord, d'après la construction de Ψ_{mix} et le lemme 5.3, que $\Psi_{\mathrm{mix}} \circ \rho^{-1}_{\mathrm{mix}}$ est un $(\mathrm{des}, \mathrm{maj})$-codage. Par conséquent, Ψ_{mix} est une M-bijection $(\mathrm{des}, \mathrm{maj})$-codageable. D'autre part, la M-bijection Ψ_{mix} est en fait la bijection déjà décrite dans [Ha2], où

l'on peut trouver la démonstration du fait que Ψ_{mix} est une M-bijection (exc, den)-codageable.

Ici, on ne donne que la description de la renumérotation μ_{mix}^{-1} telle que $\Psi_{\text{mix}} \circ \mu_{\text{mix}}^{-1}$ est un (exc, den)-codage.

Pour la permutation $\pi \in \mathfrak{S}_{n-1}$ et les places $x \in [0, n-1]$, si $x+1$ est une valeur excédante de π ou si $x+1 = n$, on met un point au-dessous de cette place x ; sinon au-dessus. On renumérote les points $0, 1, 2, \ldots, n-1$ en commençant de droite à gauche pour les points en bas, puis de gauche à droite pour ceux en haut. La renumérotation μ_{mix}^{-1} est la permutation sur $[0, n-1]$ qui envoie la place x sur la numérotation de ce point.

Par exemple, pour $n = 9$ et $\pi = 71548326$, $\{\operatorname{Exc}\pi\} = \{5, 7, 8\}$, on a $\mu_{\text{mix}}^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 3 & 8 & 2 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$:



7. Une définiton "universelle" pour les statistiques sur $\mathfrak{S}_n$

Les types de définition pour les statistiques sur le groupe symétrique données dans la première section sont tous très différents. Le but de cette partie est d'imaginer une définition générale en utilisant la notion d'intervalle cyclique.

Définition 7.1. — Pour $1 \leq j \leq n$ le *facteur* (gauche) de longueur $(j-1)$ de la permutation $\sigma = \sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n$ est noté :

$$\operatorname{Fact}_j \sigma = \sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_{j-1}.$$

Le lemme suivant montre que beaucoup de statistiques peuvent s'écrire sous une même forme. Par abus de langage, on notera, dans la suite, $\#\operatorname{Fact}_j(\sigma) \cap]\!]x, y]\!]$ le nombre d'*occurrences* de lettres $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{j-1}$ qui appartiennent à l'intervalle cyclique $]\!]x, y]\!]$.

Lemme 7.2. — *Avec la convention* $\sigma_{n+1} = \infty$, *on a* :

(i) $$\operatorname{inv}\sigma = \sum_{j=1}^{n} \#\operatorname{Fact}_j(\sigma) \cap]\!]\sigma_j, \infty]\!] \ ;$$

(ii) $$\operatorname{maj}\sigma = \sum_{j=1}^{n} \#\operatorname{Fact}_j(\sigma) \cap]\!]\sigma_j, \sigma_{j+1}]\!] \ ;$$

(iii) $$\operatorname{den}\sigma = \sum_{j=1}^{n} \#\operatorname{Fact}_j(\sigma) \cap]\!]\sigma_j, j]\!] \ .$$

Démonstration. — L'égalité (i) est triviale et (iii) est une conséquence du théorème A6 démontré dans l'annexe [A6] (*cf.* [F-Z] ou [Cla] pour d'autres démonstrations). On ne démontre que (ii). Soit $s(\sigma) = s_1 s_2 \cdots s_n$ le mot sous-excédant associé à σ défini par

$$s_j = \#\operatorname{Fact}_j(\sigma) \cap]\!]\sigma_j, \sigma_{j+1}]\!] \ ,$$

on peut vérifier que $s(\sigma) = \overline{\Psi_{\mathrm{cyc}} \circ \rho}(\sigma)$, où ρ est la renumérotation telle que $\rho(\pi, x) = (\pi, n - x - 1)$. D'après le corollaire 4.6 et la définition 3.1, on sait que s est un maj-codage et $\operatorname{maj}\sigma = \operatorname{tot} s$. □

Par exemple, pour $\sigma = 71548326$, on a $s(\sigma) = 00221532$ et $\overline{\Psi_{\mathrm{cyc}}}(\sigma) = 01013035$ qui est bien le "complément" de $s(\sigma)$. Ce lemme suggère une extension naturelle de ces statistiques. On introduit d'abord la définition suivante.

Définition 7.3. — Une application a définie par

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_n \times [n] & \xrightarrow{a} & [n] \\ (\sigma \ , \ i) & \longmapsto & a^\sigma(i) \end{array}$$

est appelée *future-suite*, si la valeur $a^\sigma(i)$ ne dépend que des valeurs $\sigma_{i+1}, \sigma_{i+2}, \cdots, \sigma_n$. Autrement dit, si a est une future-suite et si σ et π sont deux permutations telles que $\sigma_{i+1} = \pi_{i+1}$, $\sigma_{i+2} = \pi_{i+2}$, $\ldots$, $\sigma_n = \pi_n$, alors $a^\sigma(i) = a^\pi(i)$. En particulier, la valeur $a^\sigma(n)$ est toujours indépendante de la permutation σ.

Par exemple, toute suite ou permutation $a = a_1 a_2 \cdots a_n$ peut être vue comme une *future-suite* indépendante du premier argument. Pour tout σ on peut, en effet, poser : $a^\sigma(i) = a_i$.

Définition 7.4. — Soit a une future-suite, les deux statistiques $\operatorname{exc}^a, \operatorname{den}^a$ indexées par a sont définies par

$$\operatorname{exc}^a \sigma = \#\{i \mid \sigma_i > a^\sigma(i)\} \ ;$$

et $$\operatorname{den}^a \sigma = \sum_{j=1}^{n} \#\operatorname{Fact}_j(\sigma) \cap]\!]\sigma_j, a^\sigma(j)]\!] \ .$$

Exemple 7.5.

(i) On prend $a = \mathrm{id}$. Par le lemme 7.2(iii), on a : $\mathrm{exc}^{\mathrm{id}} = \mathrm{exc}$ et $\mathrm{den}^{\mathrm{id}} = \mathrm{den}$.

(ii) On prend $a = n$ (i.e., $a_i = n$ pour tout i). Par le lemme 7.2 (i), on a : $\mathrm{exc}^n = 0$ et $\mathrm{den}^n = \mathrm{inv}$.

(iii) On pose $a^\sigma(n) = n$ et $a^\sigma(i) = \sigma_{i+1}$ pour $i \leq n-1$. Alors, par le lemme 7.2 (ii), on a $\mathrm{exc}^a = \mathrm{des}$ et $\mathrm{den}^a = \mathrm{maj}$.

Remarque. — Cette définition est facile à prolonger à l'ensemble des mots quelconques, parce qu'on n'a pas utilisé la propriété "sans répétition" de la permutation σ. Par conséquent, si l'on considère le cas où la future-suite est simplement une suite a, on trouve une définition de la statistique $(\mathrm{exc}, \mathrm{den})$ pour les *bimots* $\mathbf{w} = \binom{a}{\sigma}$ où σ est un mot quelconque. Par exemple, pour le bimot $\mathbf{w} = \binom{551123612547}{312431153434}$, on a $\mathrm{exc}\, w = 5$ et $\mathrm{den}\, w = 27$. Dans cette partie, on va étudier ultérieurement les cas particuliers suivants : (voir l'annexe [A7])

(i) Dans le théorème 7.8, on étudie le cas où a et σ sont toutes les permutations ;

(ii) Dans l'annexe [A6], on étudie le cas où a est une suite croissante et sur-excédante, et σ une permutation ;

(iii) Dans la section 10, on étudie le cas où a est un mot quelconque, et σ un réarrangement de a.

D'après la définition 7.4, si l'on pose $s_j = \#\,\mathrm{Fact}_j(\sigma) \cap [\![\sigma_j, a^\sigma(j)]\!]$, on peut vérifier que $\overline{\Psi^a} : a \mapsto (s = s_1 s_2 \cdots s_n)$ est une bijection de $\mathfrak{S}_n$ sur SE_n.

Lemme 7.6. — *Pour toute future-suite a, la statistique* den^a *est toujours mahonienne. La bijection* $\overline{\Psi^a}$ *définie ci-dessus est un* den^a*-codage.* □

Par exemple, pour $a = 478623915$ et $\sigma = 854396271$, on a $\mathrm{exc}^a(\sigma) = 4$. Le den^a-codage vaut $\overline{\Psi^a} = 002203624$, d'où $\mathrm{den}^a(\sigma) = 19$. Dans ce qui suit, on va fixer les future-suites a comme les suites $a = a_1 a_2 \cdots a_n$ indépendantes de la permutation σ.

Lemme 7.7. — *La statistique* exc^a *est eulérienne, si et seulement si a est une permutation.*

Démonstration. — Si a est une permutation, alors $\mathrm{exc}^a(\sigma \circ a) = \mathrm{exc}\,\sigma$, d'où exc^a et exc sont équidistribuées. Inversement, il n'existe qu'une seule permutation σ telle que $\mathrm{exc}^a(\sigma) = n-1$. De là a est une permutation. □

La question naturelle à se poser maintenant est de savoir dans quelles

conditions la statistique $(\mathrm{exc}^a, \mathrm{den}^a)$ est euler-mahonienne. Notre second théorème principal répond à ce problème.

THÉORÈME 7.8. — *La statistique* $(\mathrm{exc}^a, \mathrm{den}^a)$ *est euler-mahonienne, si et seulement si* a *est une permutation.*

La démonstration est donnée dans la section suivante. On remarque que ce résultat n'est pas immédiat. Alors que $\mathrm{exc}\,\sigma = \mathrm{exc}^a(\sigma \circ a)$ permet de démontrer le lemme 7.7, on n'a pas la même relation pour den^a : en général, $\mathrm{den}\,\sigma \neq \mathrm{den}^a(\sigma \circ a)$. Cependant à l'aide de la statistique ${}^a\mathrm{den}\,\sigma = \mathrm{den}^a(\sigma \circ a)$, on peut démontrer le résultat suivant.

COROLLAIRE 7.9. — *Pour toute permutation* a, *le couple* $(\mathrm{exc}, {}^a\mathrm{den})$ *est euler-mahonien.* □

Ce corollaire veut dire qu'on peut construire beaucoup de statistiques euler-mahoniennes dont le premier argument est simplement la statistique eulérienne "exc". (Plus précisément, pour $n \geq 3$, les ${}^a\mathrm{den}$ sur $\mathfrak{S}_n$ sont tous différents, ce nombre de statistiques est exactement $n!$) Par exemple, pour encore $a = 253648197$ et $\sigma = 675914823$, on peut les écrire comme suit :

$$\begin{pmatrix} i & = & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \sigma_i & = & \underline{6} & \underline{7} & \underline{5} & \underline{9} & 1 & 4 & \underline{8} & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} a_i & = & 2 & 5 & 3 & 6 & 4 & 8 & 1 & 9 & 7 \\ \sigma(a_i) & = & \underline{7} & 1 & \underline{5} & 4 & \underline{9} & 2 & \underline{6} & 3 & \underline{8} \end{pmatrix}$$

d'où $\mathrm{exc}\,\sigma = \mathrm{exc}^a(\sigma \circ a) = 5$ mais ${}^a\mathrm{den}\,\sigma = 24 \neq \mathrm{den}\,\sigma = 22$. Dans l'annexe [A1], on donne les six différentes statistiques ${}^a\mathrm{den}$ sur $\mathfrak{S}_3$. Les statistiques $(\mathrm{exc}^a, \mathrm{den}^a)$ sur $\mathfrak{S}_4$ pour certaines permutations a sont données dans l'annexe [A2].

8. Démonstration du théorème 7.8

Dans cette section, on va démontrer le second théorème principal 7.8 et donner des propriétés de symétrie. On introduit, tout d'abord, une *transposition* pour les mots à deux lettres.

DÉFINITION 8.1. — Soient $x, y, \alpha, \beta \in [n]$. Les deux entiers x et y divisent l'ensemble $[n]$ en deux "segments" *cycliques* $A =]\!]y, x[\![$ et B le complément de A. On dit que α et β sont *voisins* relativement à (x, y) s'ils appartiennent au même segment A ou B ; et qu'ils sont en *face* sinon.

LEMME 8.2a. — *En conservant les notations précédentes, les conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) α *et* β *sont voisins relativement à* (x, y) ;

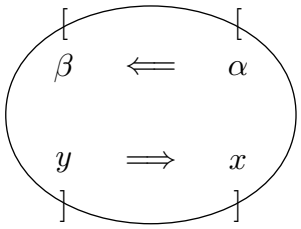
(ii) $\#\{\alpha\} \cap]\!]y, x[\![= \#\{\beta\} \cap]\!]y, x[\![$;

(iii) α *et* β *sont voisins relativement à* (y, x) ;

(iv) $\#\{\alpha\} \cap]\!]\beta, y]\!] = \#\{\alpha\} \cap]\!]\beta, x]\!]$;

(v) $]\!]\alpha, x]\!] \uplus]\!]\beta, y]\!] =]\!]\alpha, y]\!] \uplus]\!]\beta, x]\!]$; *où l'opération* $\uplus$ *est l'union pour les multi-ensembles. Par exemple, on a* $\{1, 1, 2\} \uplus \{2, 3\} = \{1, 1, 2, 2, 3\}$.

Démonstration. — On vérifie le lemme en considérant les soixante-quinze (!) ordres mutuels possibles des grandeurs x, y, α et β. (*cf.* le graphe suivant). □



Lemme 8.2b. — *En conservant les notations précédentes, les conditions suivantes sont équivalentes* :

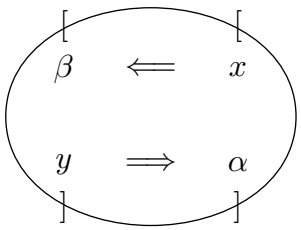
(i) α *et* β *sont en face relativement à* (x, y) ;

(ii) $\#\{\alpha\} \cap]\!]y, x]\!] = 1 - \#\{\beta\} \cap]\!]y, x]\!]$;

(iii) α *et* β *sont en face relativement à* (y, x) ;

(iv) $\#\{\alpha\} \cap]\!]\beta, y]\!] = \#\{\beta\} \cap]\!]\alpha, x]\!]$;

Démonstration. — Comme pour le lemme 8.2a, on considère les soixante-quinze cas possibles. □



Définition 8.3. — Soit $\tau = \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ \alpha & \beta \end{smallmatrix}\right) \in [n]^4$. La *h-transposée* de τ est définie par ${}^t\tau = \left(\begin{smallmatrix} y & x \\ \beta' & \alpha' \end{smallmatrix}\right)$, où l'on a posé $\beta'\alpha' = \alpha\beta$ si α et β sont voisins ; et $\beta'\alpha' = \beta\alpha$ s'ils sont en face.

Par exemple, pour $n = 8$, $x = 6$ et $y = 4$, on a $A = \{5, 6\}$ et $B = \{7, 8, 1, 2, 3, 4\}$, d'où ${}^t\left(\begin{smallmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 8 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 4 & 6 \\ 4 & 8 \end{smallmatrix}\right)$ et ${}^t\left(\begin{smallmatrix} 6 & 4 \\ 6 & 4 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 4 & 6 \\ 4 & 6 \end{smallmatrix}\right)$.

Le lemme suivant est une conséquence du lemme 8.2a(i), a(iii), b(i) et b(iii).

LEMME 8.4. — *La h-transposition est involutive. Autrement dit, on a* ${}^t({}^t\tau) = \tau$.

On peut faire cette transposition entre deux lettres consécutives dans les mots à plusieurs lettres.

DÉFINITION 8.5. — Notons $M_n = \{a = a_1 a_2 \cdots a_n \mid a_i \in [n]\}$ l'ensemble des mots de longueur n. Soient a, σ, b, $\pi \in M_n$ et $r \in [n-1]$. La *h-transposée* T_r entre les deux places r et $r+1$ est définie par :

$$\begin{array}{ccc} M_n \times M_n & \xrightarrow{\quad T_r \quad} & M_n \times M_n \\ \binom{a}{\sigma} & \longmapsto & \binom{b}{\pi} \end{array}$$

avec $b_i = a_i, \pi_i = \sigma_i$ pour $i \neq r$ et $r+1$; et ${}^t\binom{a_r\ a_{r+1}}{\sigma_r\ \sigma_{r+1}} = \binom{b_r\ b_{r+1}}{\pi_r\ \pi_{r+1}}$.

LEMME 8.6. — *Soient* $a, b \in M_n$, $\sigma, \pi \in \mathfrak{S}_n$ *et* $r \in [n-1]$. *Si* $(b, \pi) = T_r(a, \sigma)$, *alors on a* :

(i) $$\operatorname{exc}^a \sigma = \operatorname{exc}^b \pi$$

(ii) $$\operatorname{den}^a \sigma = \operatorname{den}^b \pi$$

DÉMONSTRATION. — Notons $\binom{x\ y}{\alpha\ \beta} = \binom{a_r\ a_{r+1}}{\sigma_r\ \sigma_{r+1}}$. On distingue deux cas suivant que α et β sont voisins ou en face :

• Supposons α et β voisins relativement à (x, y). Dans ce cas, $b_r = y, b_{r+1} = x$ et $\pi = \sigma$. Il existe au moins un couple (α, β) ou (x, y) dont ses deux éléments sont des *vrais voisins* (sans cycle) relativemment à l'autre. Alors $\chi(\alpha > x) + \chi(\beta > y)$ reste invariant si l'on permute les deux éléments de ce couple. D'où : $\chi(\alpha > x) + \chi(\beta > y) = \chi(\alpha > y) + \chi(\beta > x)$, ceci démontre (i).

Rappelons que $\operatorname{den}^a \sigma = \sum_{j=1}^n s_j$ avec $s_j = \#\operatorname{Fact}_j(\sigma) \cap]\!]\sigma_j, a_j]\!]$ et $\operatorname{den}^b \pi = \sum_{j=1}^n t_j$ avec $t_j = \#\operatorname{Fact}_j(\pi) \cap]\!]\pi_j, b_j]\!]$. On a immédiatement $s_j = t_j$ pour $j \neq r$ et $r+1$. Ainsi, il suffit de montrer que $s_r + s_{r+1} = t_r + t_{r+1}$. Ceci est vrai par les calculs suivants :

$$\begin{aligned} s_r + s_{r+1} &= \#\operatorname{Fact}_r(\sigma) \cap]\!]\alpha, x]\!] + \#\operatorname{Fact}_{r+1}(\sigma) \cap]\!]\beta, y]\!] \\ &= \#\operatorname{Fact}_r(\sigma) \cap]\!]\alpha, x]\!] + \#\operatorname{Fact}_r(\sigma) \cap]\!]\beta, y]\!] + \#\{\alpha\} \cap]\!]\beta, y]\!] \\ &= \#\operatorname{Fact}_r(\pi) \cap]\!]\alpha, y]\!] + \#\operatorname{Fact}_r(\pi) \cap]\!]\beta, x]\!] + \#\{\alpha\} \cap]\!]\beta, x]\!] \\ &= \#\operatorname{Fact}_r(\pi) \cap]\!]\alpha, y]\!] + \#\operatorname{Fact}_{r+1}(\pi) \cap]\!]\beta, x]\!] \\ &= t_r + t_{r+1}. \end{aligned}$$

• Supposons α et β en face relativement à (x, y). Dans ce cas, ${}^t\binom{x\ y}{\alpha\ \beta} = \binom{y\ x}{\beta\ \alpha} = \binom{b_r\ b_{r+1}}{\pi_r\ \pi_{r+1}}$ et (i) est trivial. Pour (ii), avec la même méthode, les calculs suivants fournissent la démonstration complète :

$$\begin{aligned} s_r + s_{r+1} &= \#\operatorname{Fact}_r(\sigma) \cap]\!]\alpha, x]\!] + \#\operatorname{Fact}_{r+1}(\sigma) \cap]\!]\beta, y]\!] \\ &= \#\operatorname{Fact}_r(\pi) \cap]\!]\alpha, x]\!] + \#\operatorname{Fact}_r(\pi) \cap]\!]\beta, y]\!] + \#\{\alpha\} \cap]\!]\beta, y]\!] \\ &= \#\operatorname{Fact}_r(\pi) \cap]\!]\beta, y]\!] + \#\operatorname{Fact}_r(\pi) \cap]\!]\alpha, x]\!] + \#\{\beta\} \cap]\!]\alpha, x]\!] \\ &= t_r + t_{r+1}. \quad \square \end{aligned}$$

Dans l'annexe [A3], on donne des propriétés plus complètes sur les quatre types de transposition. Le plus curieux est qu'on peut avoir (*cf.* annexe [A4]) des propriétés analogues pour les statistiques $(\mathrm{des}, \mathrm{maj})$. L'avantage de faire l'étude sur $(\mathrm{exc}, \mathrm{den})$ est qu'on peut permuter deux lettres consécutives sur les positions $(r, r+1)$ et sur les valeurs (σ_r, σ_{r+1}) indépendamment. On obtient ainsi des statistiques invariées.

Définition 8.7. — Soit $a \in \mathfrak{S}_n$. Une *route* de a est définie comme une suite $\zeta = r_1 r_2 \cdots r_l$ où $1 \leq r_i \leq n-1$ telle que la composition $T_\zeta = T_{r_1} \circ T_{r_2} \circ \cdots \circ T_{r_l}$ envoie (a, a) sur $(\mathrm{id}, \mathrm{id})$.

Ainsi, pour a et ζ fixés, on construit une bijection $\sigma \mapsto \pi$ sur $\mathfrak{S}_n$ en posant :

$$(a, \sigma) \xmapsto{T_\zeta} (\mathrm{id}, \pi)\ .$$

De plus, cette correspondance admet les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \operatorname{exc}^a \sigma = \operatorname{exc}^{\mathrm{id}} \pi \quad &= \operatorname{exc} \pi\ ; \\ \operatorname{den}^a \sigma = \operatorname{den}^{\mathrm{id}} \pi \quad &= \operatorname{den} \pi\ . \end{aligned}$$

Ceci fournit une démonstration pour le théorème 7.8. $\square$

Par exemple, pour $a = 253648197$, on vérifie que $\zeta = 12343572468$ est une route de a. Le tableau suivant montre que cette bijection envoie $\sigma = 715492638$ sur $\pi = 754129863$. On peut vérifier alors que $\operatorname{exc}^a \sigma =$

$\operatorname{exc}\pi = 5$ et $\operatorname{den}^a\sigma = \operatorname{den}\pi = 24$.

$$\begin{aligned}
\binom{a}{\sigma} &= \left(\begin{smallmatrix} 2 & \underline{5} & 3 & \underline{6} & \underline{4} & \underline{\underline{8}} & \underline{1} & \underline{\underline{9}} & \underline{7} \\ 7 & 1 & 5 & \underline{\underline{4}} & \underline{9} & \underline{\underline{2}} & \underline{6} & 3 & 8 \end{smallmatrix}\right) \\
&\xrightarrow{T_2T_4T_6T_8} \left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 & \underline{5} & \underline{\underline{4}} & \underline{6} & \underline{1} & \underline{\underline{8}} & \underline{7} & 9 \\ 7 & 5 & \underline{\underline{1}} & \underline{4} & 9 & 2 & 6 & 8 & 3 \end{smallmatrix}\right) \\
&\xrightarrow{T_3T_5T_7} \left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 & 4 & \underline{5} & \underline{\underline{1}} & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 5 & 1 & \underline{\underline{4}} & \underline{2} & 9 & 6 & 8 & 3 \end{smallmatrix}\right) \\
&\xrightarrow{T_4} \left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 & \underline{4} & \underline{1} & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 5 & \underline{\underline{1}} & \underline{4} & 2 & 9 & 6 & 8 & 3 \end{smallmatrix}\right) \\
&\xrightarrow{T_3} \left(\begin{smallmatrix} 2 & \underline{3} & \underline{\underline{1}} & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & \underline{\underline{5}} & \underline{4} & 1 & 2 & 9 & 6 & 8 & 3 \end{smallmatrix}\right) \\
&\xrightarrow{T_2} \left(\begin{smallmatrix} \underline{2} & \underline{\underline{1}} & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \underline{\underline{7}} & \underline{5} & 4 & 1 & 2 & 9 & 6 & 8 & 3 \end{smallmatrix}\right) \\
&\xrightarrow{T_1} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 5 & 4 & 1 & 2 & 9 & 6 & 8 & 3 \end{smallmatrix}\right) \\
&= \binom{\mathrm{id}}{\pi}\ ,
\end{aligned}$$

où $\dfrac{\underline{x}\ \underline{y}}{\underline{\underline{\alpha}}\ \underline{\underline{\beta}}}$ (resp. $\dfrac{\underline{x}\ \underline{y}}{\underline{\alpha}\ \underline{\beta}}$) signifie que α et β sont voisins (resp. en face) relativement à (x, y). Dans l'annexe [A5], on donne cette bijection $\sigma \mapsto \pi$ en fixant $a = 4213$ et deux routes $\zeta = T_3T_2T_1T_2$ et $\zeta = T_1T_3T_2T_1$.

9. Les symétries

Il est bien connu que la statistique (des, maj) admet plusieurs propriétés de symétrie(*cf.* [FS3]). Alors on peut se demander si ces mêmes propriétés se conservent pour (exc,den). Trivialement, par la bijection Ψ_{mix} établie dans la section 5, on a une correspondance entre ces deux couples de statistiques. Cependant cette correspondance a peu d'intérêt à cause de la complexité de la construction. On se contentera d'établir quelques extensions des bijections classiques servant à démontrer ces symétries. Rappelons d'abord les transformations utilisées dans le cas classique.

Soit $\sigma = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n \in \mathfrak{S}_n$ une permutation, on note $\sigma^r = \sigma_n\cdots\sigma_2\sigma_1$ le *retournement* et $\sigma^c = (n{+}1{-}\sigma_1)(n{+}1{-}\sigma_2)\cdots(n{+}1{-}\sigma_n)$ le *complément à* $(n+1)$ de σ. Il est clair que $\sigma \mapsto \sigma^c$ et $\sigma \mapsto \sigma^r$ sont deux bijections sur $\mathfrak{S}_n$. De plus, on a

(i) $$\operatorname{des}\sigma + \operatorname{des}\sigma^r = n - 1;$$

(ii) $$\operatorname{maj}\sigma + \operatorname{maj}\sigma^r = n(n-1)/2;$$

(iii) $$\operatorname{des}\sigma = \operatorname{des}(\sigma^c)^r;$$

(iv) $$\operatorname{maj}\sigma + \operatorname{maj}(\sigma^c)^r = n \cdot \operatorname{des}\sigma.$$

permutation	des	maj
$\sigma = 71548326$	4	15
$\sigma^c = 28451673$	3	13
$(\sigma^c)^r = 37615482$	4	17

Tableau 7

Par exemple, par $\sigma = 71548326$, on a le tableau 7 :

Soit id^r le retournement de la permutation id, on fixe une route ζ de id^r, par exemple, la plus petite route $\zeta = 1213214321 \cdots (n-1)(n-2) \cdots 4321$.

Définition 9.1. — Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, le *$\zeta$-retournement* $[\sigma]^r$ et le *ζ-complément* $[\sigma]^c$ de σ sont définis par

$$\binom{\mathrm{id}}{\sigma} \xmapsto{\text{retournement}} \binom{\mathrm{id}^r}{\sigma^r} \xmapsto{T_\zeta} \binom{\mathrm{id}}{[\sigma]^r}$$

et

$$\binom{\mathrm{id}}{\sigma} \xmapsto{\text{complément}} \binom{\mathrm{id}^c}{\sigma^c+1} \xmapsto{T_\zeta} \binom{\mathrm{id}}{[\sigma]^c}\ .$$

On vérifie que les deux applications $\sigma \mapsto [\sigma]^c$ et $\sigma \mapsto [\sigma]^r$ sont bijectives.

Lemme 9.2. — *Avec les notations précédentes, on a*

$$(i) \qquad \operatorname{exc}\sigma = \operatorname{exc}[\sigma]^r;$$

$$(ii) \qquad \operatorname{den}\sigma + \operatorname{den}[\sigma]^r = n \cdot \operatorname{exc}\sigma;$$

$$(iii) \qquad \operatorname{exc}\sigma + \operatorname{exc}[\sigma]^c = n - 1;$$

$$(iv) \qquad \operatorname{den}\sigma + \operatorname{den}[\sigma]^c = n(n-1)/2.$$

Par exemple, pour $\sigma = 71548326$, les tableaux 8 et 9 suivants montrent que $[\sigma]^r = 68273154$, $[\sigma]^c = 35714682$ et vérifient ce lemme.

	permutation	exc	den-codage	den
	$\binom{\mathrm{id}}{\sigma} = \binom{12345678}{\underline{7}1\underline{5}4\underline{8}326}$	3	00203242	13
r	$\binom{\mathrm{id}^r}{\sigma^r} = \binom{87654321}{623\underline{8}4\underline{5}1\underline{7}}$	3	01120412	11
T_ζ	$\binom{\mathrm{id}}{[\sigma]^r} = \binom{12345678}{68273154}$	3		11

Tableau 8

	permutation	exc	den-codage	den
	$\binom{\mathrm{id}}{\sigma} = \binom{12345678}{\underline{7}1\underline{5}\underline{4}8\underline{3}26}$	3	00203242	13
c	$\binom{\mathrm{id}^c}{\sigma^c+1} = \binom{87654321}{31\underline{5}\underline{6}2\underline{7}\underline{8}4}$	4	01031325	15
T_ζ	$\binom{\mathrm{id}}{[\sigma]^c} = \binom{12345678}{35714682}$	4		15

Tableau 9

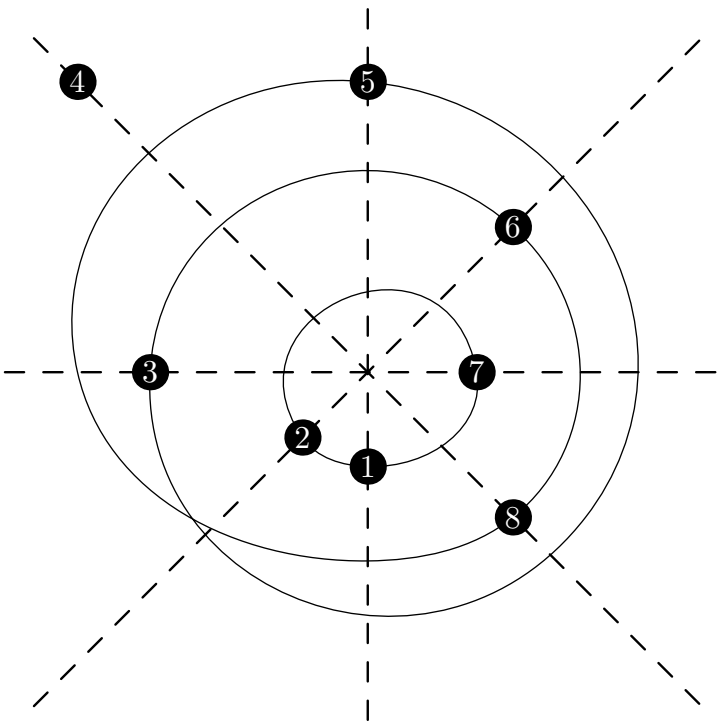
Démonstration. — Les relations (i) et (iii) sont triviales par le lemme 8.6. Quand à (iv), puisque pour tout j, on a

$$\#\operatorname{Fact}_j(\sigma) \cap [\![\sigma_j, j]\!] + \#\operatorname{Fact}_j(\sigma^c+1) \cap [\![(\sigma^c+1)_j, (\mathrm{id}^c)_j]\!] = j-1,$$

on en déduit $\operatorname{den}\sigma + \operatorname{den}^{\mathrm{id}^r}(\sigma^c+1) = n(n-1)/2$. Et pour (ii), si l'on décompose la permutation σ en cycles, on voit que l'ensemble $\sum \#[\![\sigma_j, j]\!]$, où la somme est faite pour toutes lettres j appartenant à un même cycle, contient exactement un nombre entier de fois de $[n]$. On a donc

$$\operatorname{den}\sigma + \operatorname{den}^{\mathrm{id}^r}(\sigma^r) = \sum_j \#[\![\sigma_j, j]\!] = n \cdot \operatorname{exc}\sigma. \quad \square$$

Prenons la permutation $\sigma = \binom{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8}{\underline{7}\ 1\ \underline{5}\ 4\ \underline{8}\ 3\ 2\ 6} = (172)(3586)(4)$, le graphe suivant montre que $\sum_j \#[\![\sigma_j, j]\!] = 8 \times 3 = 24$.



10. Généralisation du monoïde libre ordonné

10.1. *Préliminaires.* — Le but de cette section est de prolonger les résultats précédents à des classes de mots quelconques et donc de fournir une démonstration du théorème principal 1.4. Il reste à vérifier également que les polynômes $f^{\eta}(q)$ introduit par Denert dans [Den] sont les fonctions génératrices de la statistique bivariée $(\mathrm{exc}, \mathrm{den})$ sur la classe des mots associés à la partition η. Ceci fera l'objet d'une publication ultérieure. Les techniques développées précédemment nous amènent très naturellement à cette extension.

Dans les deux premiers paragraphes, on introduit la notion de *bimot* et une *multiplication* sur les bimots, distincte du produit usuel de juxtaposition. Ceci nous conduit tout naturellement à définir des *circuits* et une décomposition des circuits en *cycles*. Ces outils permettent ensuite de construire une *transformation fondamentale* sur les mots, qui peut être considérée comme un q-analogue de la première transformation fondamentale obtenue par Foata [Fo1].

Pour démontrer le théorème 1.4, il faut encore généraliser la statistique $(\mathrm{exc}, \mathrm{den})$ au cas des bimots. La troisième transformation fondamentale est alors la composée d'une bijection des mots sur les bimots envoyant la statistique $(\mathrm{exc}, \mathrm{den})$ sur la statistique bivariée définie sur les bimots, et d'une bijection des bimots sur les mots envoyant cette statistique bivariée sur $(\mathrm{des}, \mathrm{maj})$.

10.2. *Bimots et h-multiplication.* — Soient A un alphabet totalement ordonné et A^* le monoïde libre engendré par A. Les éléments w de A^* sont appelés *mots*. La *longueur* du mot w est noté $|w|$. Un *réarrangement* du mot $w = x_1 x_2 \dots x_m$ est un mot $u = x_{\sigma_1} x_{\sigma_2} \dots x_{\sigma_m}$, où σ est une permutation appartenant à $\mathfrak{S}_m$. En réarrangeant les lettres d'un mot w en ordre croissant, on obtient le mot *croissant* $\overline{w}$ *associé à* w. On note $R(w)$ l'ensemble de tous les réarrangements du mot w.

Soit w un mot de longueur m. Pour $1 \leq r \leq m-1$, on définit la *transposition* $T_r : R(w) \to R(w)$ comme étant la transformation envoyant le mot $w = x_1 x_2 \dots x_m$ sur le mot

$$T_r(w) = x_1 \dots x_{r-1} x_{r+1} x_r x_{r+2} \dots x_m.$$

On appelle *route* allant d'un mot w à un mot $u \in R(w)$ le mot $\zeta = r_1 r_2 \dots r_l$ appartenant à $\{1, 2, \dots, m-1\}^*$ satisfaisant la condition :

$$T_\zeta(w) = T_{r_1} T_{r_2} \dots T_{r_l}(w) = u.$$

On définit la *plus petite route* (allant de w à u) comme étant la plus courte route $\zeta = r_1 r_2 \dots r_l$ dont le retournement $r_l r_{l-1} \dots r_2 r_1$ est le plus petit mot possible pour l'ordre lexicographique. L'algorithme suivant donne une construction directe de la plus petite route pour aller de w à $\overline{w}$.

Algorithme 10.2.1 [Plus Petite Route]

entrer $w \in A^*$ de longueur m ;
sortir ζ la plus petite route allant de w à $\overline{w}$.

$l := 0$;
for $k := 1$ **to** $m - 1$ **do**
  begin
    $i := k$;
    while $(i \geq 1)$ **and** $(w_i > w_{i+1})$ **do**
      begin
        $l := l + 1$; $s_l := i$;
        $i := i - 1$; $w := T_i(w)$;
      end
  end ;
$\zeta := s_l s_{l-1} \dots s_2 s_1$.

Désignons par $M(A)$ le monoïde libre engendré par le produit cartésien $A \times A$. Les éléments $\mathbf{w} = \binom{u}{w} \in M(A)$, où u et w sont deux mots de même longueur, sont appelés *bimots*. Un bimot de longueur 1 est appelé aussi *bilettre*. Dans la définition 8.5, on a introduit la h-transposition sur $M(A)$; elle est notée T_r lorsqu'elle s'applique aux r et $(r+1)$-ièmes bilettres $\binom{x_r}{\alpha_r}$ et $\binom{x_{r+1}}{\alpha_{r+1}}$ du bimot $\mathbf{w}$, comme décrit dans l'algorithme suivant :

Algorithme 10.2.2 [h-transposition $\mathbf{w}' = T_r(\mathbf{w})$]

entrer $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \dots x_m \\ \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m \end{pmatrix}$: bimot de longueur m ;
r : entier de $[1, m-1]$;
sortir $\mathbf{w}' = \begin{pmatrix} y_1 y_2 \dots y_m \\ \beta_1 \beta_2 \dots \beta_m \end{pmatrix}$: bimot.

$\mathbf{w}' := \mathbf{w}$; $y_r := x_{r+1}$; $y_{r+1} := x_r$;
voisin := signe$(\alpha_r - {}^{\#}x_r)(\alpha_r - {}^{\#}x_{r+1})(\alpha_{r+1} - {}^{\#}x_r)(\alpha_{r+1} - {}^{\#}x_{r+1})$;
(* où on pose $a + 1 > {}^{\#}a > a$ *)
if voisin $= -1$ **then**
  begin
    $\beta_r = \alpha_{r+1}$; $\beta_{r+1} = \alpha_r$;
  end.

Désignons par $\overline{M}(A)$ le sous-ensemble de $M(A)$ formé par les bimots dont le premier mot (en haut) est croissant. On définit alors, sur les bimots, une *projection*, appelée *redressement*

$$M(A) \hookrightarrow \overline{M}(A)$$
$$\binom{u}{w} \mapsto \overline{\binom{u}{w}}$$

en posant $\overline{\binom{u}{w}} = T_\zeta\binom{u}{w}$, où ζ est la plus petite route allant de u à $\overline{u}$. Cette route est dite aller de $\binom{u}{w}$ à $\overline{\binom{u}{w}}$. Le redressement d'un bimot peut se calculer par l'algorithme suivant.

Algorithme 10.2.3 [Redressement $\mathbf{w} \mapsto \overline{\mathbf{w}}$]

entrer $\mathbf{w} = \binom{x_1 x_2 \dots x_m}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}$ un bimot ;

sortir $\overline{\mathbf{w}} = \binom{y_1 y_2 \dots y_m}{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_m} \in \overline{M}(A)$, le redressement de $\mathbf{w}$.

$\overline{\mathbf{w}} := \mathbf{w}$;
for $k := 1$ **to** $m - 1$ **do**
  begin
    $i := k$;
    while $(i \geq 1)$ **and** $(y_i > y_{i+1})$ **do**
      begin
        $\overline{\mathbf{w}} := T_i(\overline{\mathbf{w}})$; $i := i - 1$;
      end
  end.

Dans la section 8, on a donné un exemple pour une bipermutation. Ici, on donne encore un exemple pour un bimot (avec répétitions des lettres). Soit $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 2 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & 6 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. On obtient $\overline{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & 4 & 6 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ par les calculs suivants :

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & \mathbf{4} & \mathbf{2} & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & 6 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad (* \; k = 5,\ i = 5 \text{ en face, changer } *)$$
$$\xrightarrow{T_5} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \mathbf{3} & \mathbf{2} & 4 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & 4 & 6 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad (* \; k = 5,\ i = 4 \text{ voisin, inchanger } *)$$
$$\xrightarrow{T_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & \mathbf{4} & \mathbf{2} & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & 4 & 6 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad (* \; k = 6,\ i = 6 \text{ voisin, inchanger } *)$$

$$\xrightarrow{T_6}\begin{pmatrix}1&1&2&2&\mathbf{3}&\mathbf{2}&4&6\\3&1&1&2&4&6&2&2\end{pmatrix}\qquad(*\ k=6,\ i=5\text{ voisin, inchanger }*)$$
$$\xrightarrow{T_5}\begin{pmatrix}1&1&2&2&2&3&4&6\\3&1&1&2&4&6&2&2\end{pmatrix}=\overline{\mathbf{w}}.$$

On note $\mathbf{w}\times\mathbf{u}$ le produit de juxtaposition des bimots $\mathbf{w}$ et $\mathbf{u}$, et définit la *h-multiplication* $\odot$ par

$$\begin{array}{ccc}\overline{M}(A)\times M(A) & \xrightarrow{\ \odot\ } & \overline{M}(A)\\ (\mathbf{w},\mathbf{u}) & \longmapsto & \mathbf{w}\odot\mathbf{u}=\overline{\mathbf{w}\times\mathbf{u}}\end{array}$$

Soient $\mathbf{w}\in\overline{M}(A)$ et $\mathbf{u},\mathbf{v}\in M(A)$; on a évidemment $\mathbf{w}\odot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=\mathbf{w}\odot\mathbf{u}\odot\mathbf{v}=\overline{\mathbf{w}\times\mathbf{u}\times\mathbf{v}}$, où $\mathbf{w}\odot\mathbf{u}\odot\mathbf{v}=(\mathbf{w}\odot\mathbf{u})\odot\mathbf{v}$. D'après cette propriété, si $\mathbf{w}=\binom{x_1x_2\dots x_m}{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m}$, on peut considérer que le redressement de $\mathbf{w}$ est en fait le *h*-produit des bilettres :

$$\overline{\mathbf{w}}=\binom{x_1}{\alpha_1}\odot\binom{x_2}{\alpha_2}\odot\cdots\odot\binom{x_m}{\alpha_m}.$$

Théorème 10.2.4 (Simplification). — *Dans tout ce théorème,* $\mathbf{w}$, $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}'$, … *sont des éléments de* $\overline{M}(A)$, $w,u,v,w',w_1,\dots$ *des mots et* $x,y,\alpha,\beta,x',x_1,\dots$ *des lettres. On a les propriétés d'équivalence suivantes :*

(i) $\binom{x}{\alpha}\odot\binom{y}{\beta}=\binom{x'}{\alpha'}\odot\binom{y}{\beta'}\Longleftrightarrow\binom{x}{\alpha}=\binom{x'}{\alpha'}$ *et* $\beta=\beta'$;

(ii) $\mathbf{w}\odot\binom{y}{\beta}=\mathbf{w}'\odot\binom{y}{\beta'}\Longleftrightarrow\mathbf{w}=\mathbf{w}'$ *et* $\beta=\beta'$;

(iii) $\mathbf{w}\odot\binom{u}{v}=\mathbf{w}'\odot\binom{u}{v'}\Longleftrightarrow\mathbf{w}=\mathbf{w}',\ v=v'$ *et* $|u|=|v|$.

Démonstration. — Les parties "$\Longleftarrow$" sont évidentes; et on démontre donc les parties "$\Longrightarrow$".

(i) On a immédiatement $x=x'$. On vérifie donc cette propriété en distinguant les trois cas : $x\le y$, $x>y$ avec α et β voisins relativement à (x,y), et $x>y$ avec α et β en face.

(ii) D'abord, par (i), la relation est juste si $|\mathbf{w}|=1$. Pour le cas général, soient $\mathbf{w}=\mathbf{w}_1\times\binom{x}{\alpha}$ et $\mathbf{w}'=\mathbf{w}'_1\times\binom{x}{\alpha'}$, on pose

$$\binom{x}{\alpha}\odot\binom{y}{\beta}=\binom{x_1y_1}{\alpha_1\beta_1}\quad\text{et}\quad\binom{x}{\alpha'}\odot\binom{y}{\beta'}=\binom{x_2y_2}{\alpha'_2\beta'_2}.$$

D'après l'algorithme 10.2.3, on a

$$\mathbf{w} \odot \binom{y}{\beta} = \mathbf{w}_1 \odot \left(\binom{x}{\alpha} \odot \binom{y}{\beta} \right) = \left(\mathbf{w}_1 \odot \binom{x_1}{\alpha_1} \right) \times \binom{y_1}{\beta_1}.$$

Par le même calcul pour $\mathbf{w}' \odot \binom{y}{\beta'}$, on obtient :

$$\left(\mathbf{w}_1 \odot \binom{x_1}{\alpha_1} \right) \times \binom{y_1}{\beta_1} = \left(\mathbf{w}'_1 \odot \binom{x_2}{\alpha'_2} \right) \times \binom{y_2}{\beta'_2};$$

on en déduit $y_1 = y_2,\ x_1 = x_2,\ \beta_1 = \beta'_2$ et

$$\mathbf{w}_1 \odot \binom{x_1}{\alpha_1} = \mathbf{w}'_1 \odot \binom{x_2}{\alpha'_2}.$$

D'où la propriété par récurrence sur la longueur de $\mathbf{w}$.

(iii) D'abord, par (ii), la relation est juste si $|u| = 1$. Dans le cas général, soient

$$\binom{u}{v} = \binom{u_1}{v_1} \times \binom{y}{\alpha} \quad \text{et} \quad \binom{u}{v'} = \binom{u_1}{v'_1} \times \binom{y}{\beta},$$

on a $\mathbf{w} \odot \binom{u}{v} = \left(\mathbf{w} \odot \binom{u_1}{v_1} \right) \odot \binom{y}{\alpha}$. Par le même calcul pour $\mathbf{w}' \odot \binom{u}{v'}$, on trouve

$$\left(\mathbf{w} \odot \binom{u_1}{v_1} \right) \odot \binom{y}{\alpha} = \left(\mathbf{w}' \odot \binom{u_1}{v'_1} \right) \odot \binom{y}{\beta}.$$

D'après (ii), on a $\alpha = \beta$ et

$$\mathbf{w} \odot \binom{u_1}{v_1} = \mathbf{w}' \odot \binom{u_1}{v'_1}.$$

D'où la propriété par récurrence sur la longueur de u. □

Corollaire 10.2.5 (bijectivité de redressement). — *Notons $M^w(A)$ l'ensemble des bimots dont le premier mot est égal à w, alors la restriction du redressement à $M^w(A)$ est bijective. Autrement dit, si w, u et v sont trois mots de même longueur, on a :*

$$\overline{\binom{w}{u}} = \overline{\binom{w}{v}} \Longleftrightarrow u = v. \quad \square$$

10.3. *La h-décomposition en cycles.* — Un bimot $\binom{u}{w} \in M(A)$ est appelé *circuit*, si u est un réarrangement de w. L'ensemble des circuits est noté $C(A)$ et on écrit : $\overline{C}(A) = C(A) \cap \overline{M}(A)$. En particulier, un circuit $\binom{u}{w}$ est appelé *cycle*, si u est le cyclage du mot w ; autrement dit, si $u_m = w_1$ et $u_i = w_{i+1}$ pour tout $i \leq m-1$, où m est la longueur de u.

Soient w un mot et $\binom{u}{w}$ un cycle ; on note $\mathrm{pre}(w) = \mathrm{pre}\binom{u}{w} = u_m = w_1$ la première lettre du mot w ; on dit que le mot w ou le cycle $\binom{u}{w}$ est *dominant*, si $\mathrm{pre}(w)$ est la seule plus grande lettre du mot w, c'est-à-dire, si $\mathrm{pre}(w) > w_i$ pour $i \geq 2$. Par exemple, le bimot $\binom{u}{w} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 4 & 5 & 7 \\ 7 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ est un cycle dominant.

THÉORÈME 10.3.1. — *Tout élément* $\mathbf{w} \in \overline{C}(A)$ *admet une factorisation unique de la forme*

$$\text{[F1]} \qquad \mathbf{w} = \emptyset \odot \mathbf{u}^1 \odot \mathbf{u}^2 \odot \cdots \odot \mathbf{u}^r,$$

où les $\mathbf{u}^i$ *sont des cycles dominants avec la condition*

$$\mathrm{pre}(\mathbf{u}^1) \leq \mathrm{pre}(\mathbf{u}^2) \leq \cdots \leq \mathrm{pre}(\mathbf{u}^r).$$

DÉMONSTRATION. — Par récurrence, il suffit de démontrer que, pour tout $\mathbf{w} \in \overline{C}(A)$, il existe exactement une factorisation de la forme $\mathbf{w} = \mathbf{w}' \odot \mathbf{u}$ où $\mathbf{w}' \in \overline{C}(A)$ et $\mathbf{u}$ un cycle dominant telle que $\mathrm{pre}\,\mathbf{u}$ est la plus grande lettre de $\mathbf{w}$ (faiblement). L'existence de cette factorisation est assurée par l'algorithme suivant :

Algorithme 10.3.2 [h-Décomposition $\mathbf{w} = \mathbf{w}' \odot \mathbf{u}$]

entrer $\mathbf{w} = \binom{u}{w} \in \overline{C}(A)$;
sortir $\mathbf{w}' = \binom{u'}{w'} \in \overline{C}(A)$;
$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} y_r y_{r-1} \cdots y_2 y_1 \\ \beta_r \beta_{r-1} \ldots \beta_2 \beta_1 \end{pmatrix}$ un cycle dominant.

$\mathbf{w}' := \mathbf{w}$; $k := |u|$; $r := 1$; maxlettre $:= u_k$;
repeat
  $y_r := u'_k$; $\beta_r := w'_k$;
  $\mathbf{w}' :=$ enlever la dernière bilettre $\begin{pmatrix} u'_k \\ w'_k \end{pmatrix}$ à $\mathbf{w}'$;
  if $\beta_r =$ maxlettre **then exit** ;
  $i := k$;

repeat
  $i := i - 1$; (* aller chercher β_r dans u' *)
until $u'_i = \beta_r$;
if $i < k-1$ **then** $\mathbf{w}' := T_{k-2}T_{k-3}\cdots T_i(\mathbf{w}')$;
$k := k-1$; $r := r+1$;
until $1 = 2$.

Pour l'unicité, supposons qu'il y a deux h-décompositions de la forme : $\mathbf{w} = \mathbf{w}' \odot \mathbf{u} = \mathbf{w}'_1 \odot \mathbf{u}_1$ avec

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x_1x_2\cdots x_{l-1}x_l \\ \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{l-1}\alpha_l \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} y_1y_2\cdots y_{s-1}y_s \\ \beta_1\beta_2\cdots\beta_{s-1}\beta_s \end{pmatrix}.$$

Puisque $\operatorname{pre}\mathbf{u} = \operatorname{pre}(\mathbf{u}_1)$, on a $x_l = y_s = \beta_1 = \alpha_1$. Par le théorème de simplification, on a $\alpha_l = \beta_s$. D'où $x_{l-1} = y_{s-1}$. Itérativement, on a enfin $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1$. Encore par la simplification, on trouve $\mathbf{w}' = \mathbf{w}'_1$. □

Par exemple, associons au mot $w = 31212462656175$ le circuit $\binom{\overline{w}}{w}$. Par l'algorithme de h-décomposition ; on a successivement :

$$\binom{\overline{w}}{w} = \begin{pmatrix} 1&1&1&2&2&2&3&4&5&\mathbf{5}&\mathbf{6}&6&6&7 \\ 3&1&2&1&2&4&6&2&6&5&6&1&7&5 \end{pmatrix}$$
(* $k = 14,\ \beta_1 = 5 \neq$ maxlettre $= 7$ *)
(* $i = 10,$ aller chercher 5 dans u' *)
(* faire $T_{12}T_{11}T_{10}(w')$ *)
$$\xrightarrow{T_{10}} \begin{pmatrix} 1&1&1&2&2&2&3&4&5&6&\mathbf{5}&\mathbf{6}&6&7 \\ 3&1&2&1&2&4&6&2&6&6&5&1&7&5 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{T_{11}} \begin{pmatrix} 1&1&1&2&2&2&3&4&5&6&6&\mathbf{5}&\mathbf{6}&7 \\ 3&1&2&1&2&4&6&2&6&6&5&1&7&5 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{T_{12}} \begin{pmatrix} 1&1&1&2&2&2&3&4&5&6&6&6&5&7 \\ 3&1&2&1&2&4&6&2&6&6&5&1&7&5 \end{pmatrix}$$
(* $k = 13,\ r = 2,\ \beta_2 = 7 =$ maxlettre *)
$$= \begin{pmatrix} 1&1&1&2&2&2&3&4&5&6&6&6 \\ 3&1&2&1&2&4&6&2&6&6&5&1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 5&7 \\ 7&5 \end{pmatrix}$$
(* continuer! *)
$$= \begin{pmatrix} 1&1&2&2&2&3&4&6&6 \\ 3&1&1&2&4&6&2&2&6 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 5&1&6 \\ 6&5&1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 5&7 \\ 7&5 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1&1&2&2&2&3&4&6 \\ 3&1&1&2&4&6&2&2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 5&1&6 \\ 6&5&1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 5&7 \\ 7&5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 6 \\ 6 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

10.4. *La troisième transformation fondamentale pour les mots quelconques.* — A tout mot $w \in A^*$, on associe d'abord le circuit $\binom{\overline{w}}{w}$ de $\overline{C}(A)$, puis, par le théorème 10.3.1, on écrit la décomposition unique de la forme [F1]

$$\binom{\overline{w}}{w} = \emptyset \odot \mathbf{u}^1 \odot \mathbf{u}^2 \odot \cdots \odot \mathbf{u}^r.$$

On note enfin $\widetilde{w}$ le second mot (en bas) du produit de juxtaposition $\mathbf{u}^1 \times \mathbf{u}^2 \times \ldots \times \mathbf{u}^r$.

Théorème 10.4.1. — *L'application $w \mapsto \widetilde{w}$ définie sur A^* est bijective et envoie chaque classe de réarrangements sur elle-même.*

Démonstration. — On donne l'inverse de cette application $\widetilde{w} \mapsto w$. D'abord, il est bien connu que tout mot admet une factorisation unique de la forme

$$\widetilde{w} = u^1 \times u^2 \times \cdots \times u^r, \qquad [F2]$$

où les u^i sont des mots dominants avec la condition

$$\mathrm{pre}(u^1) \leq \mathrm{pre}(u^2) \leq \cdots \leq \mathrm{pre}(u^r)$$

(*cf.* [Fo1], lemme 10.2.1.)

A chaque mot dominant $v = x_1 x_2 \cdots x_m (x_1 > x_2, \cdots, x_m)$ on associe le cycle dominant $\mathbf{s}(v) = \binom{x_2 x_3 \cdots \ x_m \ x_1}{x_1 x_2 \cdots x_{m-1} x_m}$. Le mot w est alors le second mot (en bas) du h-produit

$$\emptyset \odot \mathbf{s}(u^1) \odot \mathbf{s}(u^2) \odot \cdots \odot \mathbf{s}(u^r). \quad \square$$

Par exemple, pour $w = 3\,1\,2\,1\,2\,4\,6\,2\,6\,5\,6\,1\,7\,5$, on obtient, d'après le paragraphe précédent $\widetilde{w} = 3\,1\,1\,2\,6\,4\,2\,2\,6\,6\,5\,1\,7\,5$.

Inversement, on peut factoriser le mot $\widetilde{w}$ par [F2]

$$\widetilde{w} = 3\,1\,1\,2 \times 6\,4\,2\,2 \times 6 \times 6\,5\,1 \times 7\,5,$$

puis former les cycles dominants et calculer le h-produit suivant :

$$\emptyset \odot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 6 \\ 6 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 4 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 2 & 4 & 6 & 2 & 6 & 5 & 6 & 1 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Le second mot est bien le mot w.

10.5. *Calculs statistiques sur le monoïde libre ordonné.* — La plupart des propriétés qu'on a établies pour les permutations sont aussi valables pour les mots quelconques. Leurs démonstrations sont certainement plus compliquées à exprimer (même si parfois ce sont les mêmes idées sous-jacentes). La difficulté supplémentaire qui reste à dominer est de transformer les problèmes sur les mots quelconques en des problèmes sur des mots standard (les mots sans répétition de lettres). On est ainsi amené à introduire deux sortes de standardisation, comme décrit dans ce qui suit.

Comme il est bien connu, les statistiques "des" et "maj" sont aussi définies sur les mots quelconques $w \in A^*$ par :

$$\operatorname{des} w = \#\{i \mid w_i > w_{i+1}\} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{maj} w = \sum\{i \mid w_i >_{i+1}\}.$$

On va tout d'abord trouver une autre définition équivalente pour "maj" qui généralise le lemme 7.2(ii). Si un mot w a la lettre x répétée q fois, on numérote $x_1, x_2, \ldots, x_q$, de la gauche vers la droite, les occurrences de x et on effectue une telle numérotation pour chaque lettre distincte du mot w. Par convention, $x_1 < x_2 < \cdots < x_q$. Les lettres de w peuvent alors êtres identifiées aux éléments de $A \times \mathbb{N}$, ensemble devenant ainsi totalement ordonné. On définit la *maj-standardisation* Υ_{maj} par

$$\begin{aligned} A^* &\overset{\Upsilon_{\mathrm{maj}}}{\longhookrightarrow} (A \times \mathbb{N})^* \\ w &\longmapsto w^* \end{aligned}$$

Par cette définition, il est clair que $\operatorname{des} w = \operatorname{des} w^*$ et $\operatorname{maj} w = \operatorname{maj} w^*$. On peut aussi vérifier l'identité suivante :

$$\sum_{j=1}^{n} \#\mathrm{Fact}_j\, w \cap [\![w_j, w_{j+1}]\!] = \sum_{j=1}^{n} \#\mathrm{Fact}_j\, w^* \cap [\![w_j^*, w_{j+1}^*]\!].$$

D'après le lemme 7.2(ii), on en déduit le théorème suivant.

Théorème 10.5.1. — *Pour tout $w \in A^*$, on a :*

$$\operatorname{maj} w = \sum_{j=1}^{n} \#\,\mathrm{Fact}_j\ w \cap [\![w_j, w_{j+1}]\!],$$

avec la convention $w_{n+1} = \infty$. □

La suite $(s_j)_{1\leq j\leq n}$ où $s_j = \#\operatorname{Fact}_j\, w \cap]\!]w_j, w_{j+1}]\!]$, est appelée aussi le *maj-codage* du mot w. Par exemple, pour $w = 31126422665175$, alors, le maj-codage est le vecteur (00014403075994), et la somme de tous ses éléments est exactement $\operatorname{maj} w = 46$. On généralise maintenant la statistique $(\operatorname{exc}, \operatorname{den})$ aux bimots et établit quelques relations concernant le couple $(\operatorname{des}, \operatorname{maj})$. Comme on a déjà donné les notations et constructions dans les paragraphes précédents, il nous suffit de rassembler ici les résultats.

Définition 10.5.2. — Soit $\binom{u}{w} \in C(A)$; on pose

$$\operatorname{exc}\binom{u}{w} = \#\{i \mid 1 \leq i \leq n,\ w_i > u_i\};$$

et

$$\operatorname{den}\binom{u}{w} = \sum_{j=1}^{n} \#\operatorname{Fact}_j\, w \cap]\!]w_j, u_j]\!].$$

On introduit par ailleurs une *den-standardisation* $\Upsilon_{\operatorname{den}}$. Dans la définition 1.3, on a défini deux sous-mots $\operatorname{Exc} w$ et $\operatorname{Nexc} w$ d'un mot (quelconque) w. Soient p et q le nombre d'occurrences d'une lettre x dans $\operatorname{Exc} w$ et $\operatorname{Nexc} w$, respectivement. Numérotons $x_1, x_2, \ldots, x_q$ les q occurrences de x dans $\operatorname{Nexc} w$, de la *gauche vers la droite*, puis $x_{q+1}, x_{q+2}, \ldots, x_{q+p}$ les occurrences de x dans $\operatorname{Exc} w$, mais cette fois de la *droite vers la gauche*. Effectuons cette numérotation pour chaque lettre distincte dans le mot w et notons w^s le mot ainsi obtenu. En s'imposant l'ordre $x_1 < x_2 < \cdots$, les lettres de w^s peuvent être identifiées aux éléments de $A \times \mathbb{N}$, ensemble qui est ainsi totalement ordonné. Le mot w^s peut aussi être considéré comme une permutation σ. La *den-standardisation* $\Upsilon_{\operatorname{den}}$ est alors définie par :

$$\begin{aligned} A^* &\overset{\Upsilon_{\operatorname{den}}}{\longmapsto} (A \times \mathbb{N})^* \\ w &\longmapsto w^s \end{aligned}$$

Dans ce cas ainsi généralisé, on a encore un résultat analogue au lemme 7.2(iii).

Théorème 10.5.3. — *Soient $w \in A^*$ et $\sigma = \Upsilon_{\operatorname{den}}(w) \in (A \times \mathbb{N})^*$. Alors*

(i) $(\operatorname{exc}, \operatorname{den})(w) = (\operatorname{exc}, \operatorname{den})(\sigma)$;

(ii) $(\operatorname{exc}, \operatorname{den})\binom{\overline{w}}{w} = (\operatorname{exc}, \operatorname{den})\binom{\overline{\sigma}}{\sigma}$;

(iii) $(\operatorname{exc}, \operatorname{den})\binom{\overline{w}}{w} = (\operatorname{exc}, \operatorname{den})(w)$.

Démonstration.

(i) On vérifie que les deux mots w et σ admettent les mêmes places d'excédance et que $\operatorname{inv}\operatorname{Exc} w = \operatorname{inv}\operatorname{Exc}\sigma$, $\operatorname{inv}\operatorname{Nexc} w = \operatorname{inv}\operatorname{Nexc}\sigma$.

(ii) On pose $c_j = \#\{m < k \mid \sigma_l > \sigma_j,\ w_l = w_j\}$. On peut alors vérifier l'identité suivante sur les *den-codages* généralisés :

$$\#\operatorname{Fact}_j w \cap]\!]w_j, \overline{w}_j]\!] + c_j = \#\operatorname{Fact}_j \sigma \cap]\!]\sigma_j, \overline{\sigma}_j]\!] + c_{j'},$$

où $j' = \sigma^{-1}(j)$ est une lettre telle que $\sigma_{j'} = \overline{\sigma}_j$.

(iii) C'est immédiat d'après le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} (\mathrm{exc},\mathrm{den})\binom{\overline{w}}{w} & \overset{\text{(iii)}}{=\!=} & (\mathrm{exc},\mathrm{den})(w) \\ \Big\|{\scriptstyle\text{(ii)}} & & \Big\|{\scriptstyle\text{(i)}} \\ (\mathrm{exc},\mathrm{den})\binom{\overline{\sigma}}{\sigma} & \overset{\text{Lemme 7.2(iii)}}{=\!=} & (\mathrm{exc},\mathrm{den})(\sigma) \end{array}$$

Ce théorème veut dire que la restriction de la définition 10.5.2 à l'ensemble $\overline{C}(A)$ est équivalente à la définition 1.3. La suite $(s_j)_{1\le j\le n}$ où $s_j = \#\operatorname{Fact}_j\ w \cap]\!]w_j, u_j]\!]$, est appelée aussi le *den-codage* du bimot $\binom{u}{w}$. Par exemple, pour le bimot $\binom{\overline{w}}{w}$ où $w = 35334513512531$, alors, le den-codage est le vecteur $(0,0,1,1,4,3,3,0,5,5,8,0,5,11)$, et la somme de tous ses éléments est exactement $\operatorname{den} w = 46$ (*cf.* l'exemple décrit après la définition 1.3). On généralise aussi le lemme 8.6 aux bimots avec la même démonstration :

Lemme 10.5.4. — *La statistique* $(\mathrm{exc},\mathrm{den})$ *est invariante par la h-transposition. Autrement dit, soient* $\mathbf{w} \in M(A)$, $r \in [n-1]$ *et* $\mathbf{u} = T_r(\mathbf{w})$ *la h-transposition, alors on a :*

$$(\mathrm{exc},\mathrm{den})\mathbf{w} = (\mathrm{exc},\mathrm{den})\mathbf{u}. \quad \square$$

Corollaire 10.5.5. — *Pour tout* $\mathbf{w} \in \overline{M}(A)$ *et* $\mathbf{u} \in M(A)$, *on a :*

(i) $$(\mathrm{exc},\mathrm{den})\mathbf{u} = (\mathrm{exc},\mathrm{den})\overline{\mathbf{u}}$$

(ii) $$(\mathrm{exc},\mathrm{den})(\mathbf{w} \times \mathbf{u}) = (\mathrm{exc},\mathrm{den})(\mathbf{w} \odot \mathbf{u}). \quad \square$$

Lemme 10.5.6. — *Soit* $\binom{u}{w}$ *un cycle dominant. On a :*

$$(\mathrm{des},\mathrm{maj})w = (\mathrm{exc},\mathrm{den})\binom{u}{w}.$$

Démonstration. — Par la définition 10.5.2, puisque $\binom{u}{w}$ est un cycle, on a

$$\begin{aligned}\operatorname{exc}\binom{u}{w} &= \#\{i \mid w_i > u_i\}\\ &= \#\{i \mid 1 \le i \le n-1,\, w_i > w_{i+1}\} + \chi(w_n > u_n = w_1)\\ &= \operatorname{des}(w)\,;\end{aligned}$$

et par le lemme 10.5.1, on a :

$$\begin{aligned}\operatorname{den}\binom{u}{w} &= \sum_{j=1}^{n} \#\mathrm{Fact}_j\, w \cap]\!]w_j, u_j]\!]\\ &= \sum_{j=1}^{n} \#\mathrm{Fact}_j\, w \cap]\!]w_j, w_{j+1}]\!] + \#\mathrm{Fact}_j\, w \cap]\!]w_n, w_1]\!]\\ &= \operatorname{den} w \qquad (\text{car } w \text{ est dominant}). \quad \square\end{aligned}$$

Par convention, pour $\mathbf{w} = \binom{u}{w} \in M(A)$, on note aussi

$$(\mathrm{des}, \mathrm{maj})\mathbf{w} = (\mathrm{des}, \mathrm{maj})w.$$

Lemme 10.5.7. — *Soient* $\mathbf{w} \in \overline{C}(A)$ *et* $\mathbf{w} = \emptyset \odot \mathbf{u}^1 \odot \mathbf{u}^2 \odot \cdots \odot \mathbf{u}^r$, *la h-décomposition de la forme* [F1]. *Alors on a* :

$$(\mathrm{des}, \mathrm{maj})(\mathbf{u}^1 \times \mathbf{u}^2 \times \cdots \times \mathbf{u}^r) = (\mathrm{exc}, \mathrm{den})(\mathbf{u}^1 \odot \mathbf{u}^2 \odot \cdots \odot \mathbf{u}^r).$$

Démonstration. — Notons $\mathbf{w}^j = \mathbf{u}^1 \times \mathbf{u}^2 \times \cdots \times \mathbf{u}^j$. On calcule :

$$\begin{aligned}\operatorname{des} \mathbf{w}^r &= \operatorname{des} \mathbf{w}^{r-1} + \operatorname{des} \mathbf{u}^r\\ \operatorname{maj} \mathbf{w}^r &= \operatorname{maj} \mathbf{w}^{r-1} + \operatorname{maj} \mathbf{u}^r + k \operatorname{des} \mathbf{u}^r\\ \operatorname{exc} \mathbf{w}^r &= \operatorname{exc} \mathbf{w}^{r-1} + \operatorname{exc} \mathbf{u}^r\\ \operatorname{den} \mathbf{w}^r &= \operatorname{den} \mathbf{w}^{r-1} + \operatorname{den} \mathbf{u}^r + k \operatorname{exc} \mathbf{u}^r\end{aligned}$$

où $k = \left|\mathbf{w}^{r-1}\right|$. Pour la dernière identité, voir la démonstration du lemme 9.2. On obtient le résultat désiré par récurrence et en faisant usage du lemme précédent. $\square$

Le théorème suivant vient compléter le résultat du théorème 1.4

Théorème 10.5.8. — *La troisième transformation fondamentale envoie la statistique* $(\mathrm{exc}, \mathrm{den})$ *sur la statistique* $(\mathrm{des}, \mathrm{maj})$.

DÉMONSTRATION. — Soient $w \in A^*$ et $\widetilde{w}$ l'image de w par cette transformation. Le schéma suivant fournit la démonstration :

$$\begin{aligned}
(\mathrm{exc},\mathrm{den})(w) &\overset{\text{lemme 10.5.3}}{=\!=} (\mathrm{exc},\mathrm{den})\binom{\overline{w}}{w} \\
&\overset{\text{[F1]}}{=\!=} (\mathrm{exc},\mathrm{den})(\emptyset \odot \mathbf{u}^1 \odot \mathbf{u}^2 \odot \cdots \odot \mathbf{u}^r) \\
&\overset{\text{corollaire 10.5.5}}{=\!=} (\mathrm{exc},\mathrm{den})(\mathbf{u}^1 \times \mathbf{u}^2 \times \cdots \times \mathbf{u}^r) \\
&\overset{\text{lemme 10.5.7}}{=\!=} (\mathrm{des},\mathrm{maj})(\mathbf{u}^1 \times \mathbf{u}^2 \times \cdots \times \mathbf{u}^r) \\
&\overset{\text{définition de } \widetilde{w}}{=\!=} (\mathrm{des},\mathrm{maj})(\widetilde{w}). \quad \square
\end{aligned}$$

[A1]. Les six statistiques $(\mathrm{exc}, {}^{a}\mathrm{den})$ **euler-mahoniennes sur le groupe symétrique** $\mathfrak{S}_3$

		${}^{a}\mathrm{den}\,\sigma$ pour a =					
σ	$\mathrm{exc}\,\sigma$	213	231	321	123	132	312
123	0	0	0	0	0	0	0
132	1	1	1	1	2	2	2
213	1	1	2	2	1	1	2
312	1	2	1	2	1	2	1
321	1	2	2	1	2	1	1
231	2	3	3	3	3	3	3

[A2]. Les statistiques $(\mathrm{exc}^a, \mathrm{den}^a)$ **dans le cas où** a **est une permutation**

	$(\mathrm{exc}^a, \mathrm{den}^a)$ pour a =		
σ	1234	1324	2143
1234	00	12	24
1243	13	13	11
1324	12	00	25
1342	25	13	12
1423	12	12	12
1432	13	25	13
2134	11	23	13
2143	24	24	00
2314	23	11	25
2341	36	24	12
2413	23	23	12
2431	24	36	13

	$(\mathrm{exc}^a, \mathrm{den}^a)$ pour a =		
σ	1234	1324	2143
3124	11	11	24
3142	24	24	11
3214	12	12	36
3241	25	25	23
3412	23	23	23
3421	24	24	24
4123	11	11	11
4132	12	24	12
4213	12	12	23
4231	13	25	24
4312	24	12	24
4321	25	13	25

[A3]. Les quatres types de transposition et les changements de statistique (exc, den) correspondants

Soient $a \in M_n$ et x, y deux lettres, si $a_r a_{r+1} = xy$, on décompose $a = a'xya''$ où a' est un mot de longueur $r-1$; et on pose $b = a'yxa'' \in M_n$. De même, soit $\sigma = \sigma'\alpha\beta\sigma'' \in \mathfrak{S}_n$, on pose $\pi = \sigma'\beta\alpha\sigma'' \in \mathfrak{S}_n$ où σ' est un mot de longueur $r-1$. Autrement dit, $\sigma = \begin{pmatrix} \cdots & r-1 & r & r+1 & r+2 & \cdots \\ \cdots & a & b & c & d & \cdots \end{pmatrix}$ et $\pi = \begin{pmatrix} \cdots & r-1 & r & r+1 & r+2 & \cdots \\ \cdots & a & c & b & d & \cdots \end{pmatrix}$.

Notons $\operatorname{exc}^a \sigma = E$ et $\operatorname{den}^a \sigma = D$. Alors les valeurs des autres statistiques sont données dans le tableau suivant :

cas	$\operatorname{exc}^a \sigma$ $\operatorname{den}^a \sigma$	$\operatorname{exc}^b \sigma$ $\operatorname{den}^b \sigma$	$\operatorname{exc}^a \pi$ $\operatorname{den}^a \pi$	$\operatorname{exc}^b \pi$ $\operatorname{den}^b \pi$
$(x,y) \in]\!]\alpha,\beta]\!]$	E D	E D	E $D-1$	E $D-1$
$(x,y) \in]\!]\beta,\alpha]\!]$	E D	E D	E $D+1$	E $D+1$
$y \in]\!]\alpha,\beta]\!], x \in]\!]\beta,\alpha]\!]$	E D	$E-1$ $D-r$	$E-1$ $D-r$	E D
$y \in]\!]\beta,\alpha]\!], x \in]\!]\alpha,\beta]\!]$	E D	$E+1$ $D+r$	$E+1$ $D+r$	E D

Par le lemme 8.6 et plusieur symétries, il suffit de démontre les trois relations suivantes :

(i) $\operatorname{den}^a \pi = D-1$, si $x, y \in]\!]\alpha,\beta]\!]$;

(ii) $\operatorname{exc}^a \pi = E-1$, si $y \in]\!]\alpha,\beta]\!]$ et $x \in]\!]\beta,\alpha]\!]$;

(iii) $\operatorname{den}^a \pi = D-r$, si $y \in]\!]\alpha,\beta]\!]$ et $x \in]\!]\beta,\alpha]\!]$.

[A4]. La transposition et le changement de statistique (des, maj) correspondante

Soient σ une permutation de $[n]$ et π la composition de σ et de la transposition $\big(r \circ (r+1)\big)$ où r est un entier tel que $1 \leq r \leq n-1$. On va trouver les relations de la statistique (des, maj) pour les deux permutaitons σ et π.

Supposons $\sigma = \begin{pmatrix} \cdots & r-1 & r & r+1 & r+2 & \cdots \\ \cdots & a & b & c & d & \cdots \end{pmatrix}$ et $\pi = \begin{pmatrix} \cdots & r-1 & r & r+1 & r+2 & \cdots \\ \cdots & a & c & b & d & \cdots \end{pmatrix}$. Si $\operatorname{des}\sigma = D$ et $\operatorname{maj}\sigma = M$, alors les valeurs de la statistique (des, maj) pour les deux permutaions σ et π sont données dans tableau suivant :

cas	$\operatorname{des}\sigma$ $\operatorname{maj}\sigma$	$\operatorname{des}\pi$ $\operatorname{maj}\pi$
$a \in]\!]b, c]\!],\ d \in]\!]c, b]\!]$	D M	D $M+1$
$a \in]\!]c, b]\!],\ d \in]\!]b, c]\!]$	D M	D $M-1$
$a, d \in]\!]c, b]\!]$	D M	$D+1$ $M+r$
$a, d \in]\!]b, c]\!]$	D M	$D-1$ $M-r$

[A5]. La bijection $\sigma \mapsto \pi$ pour $a = 4213$

	π pour la route ζ =	
σ	$T_3T_2T_1T_2$	$T_1T_3T_2T_1$
1234	3142	2143
1243	4123	2134
1324	2341	2341
1342	3412	3412
1423	2413	2413
1432	4312	4312
2134	1342	3241
2143	1423	4213
2314	2143	3142
2341	2314	2314
2413	2134	4123
2431	2431	2431

	π pour la route ζ =	
σ	$T_3T_2T_1T_2$	$T_1T_3T_2T_1$
3124	3241	1342
3142	1324	1324
3214	1243	1243
3241	3214	3214
3412	3124	3124
3421	3421	3421
4123	4213	1423
4132	1432	1432
4213	1234	1234
4231	4231	4231
4312	4132	4132
4321	4321	4321

Nous remarquons que les trois dernières permutations dans le même ligne ont la même statistique $(\mathrm{exc}, \mathrm{den})$. Par exemple, on a $\mathrm{exc}(3241) = \mathrm{exc}(1342) = 2$ et $\mathrm{den}(3241) = \mathrm{den}(1342) = 5$.

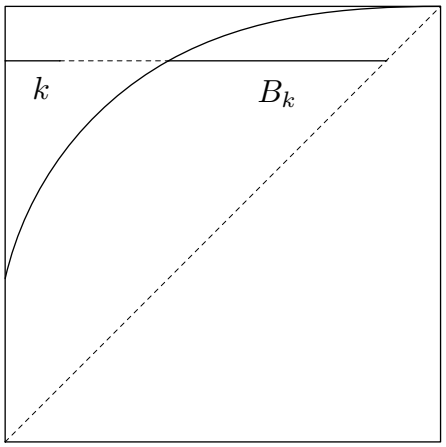
[A6]. Une autre définition équivalente de la statistique den^a

Soient $a \in M_n$ et σ une permutation de $[n]$, on note EP l'ensemble des places a-excédantes, i.e., $\mathrm{EP} = \mathrm{EP}^a\,\sigma = \{1 \le i \le n \mid \sigma_i > a_i\}$. Alors on a le théorème suivant qui peut être considéré comme une autre définition équivalente de la statistique den^a.

Théorème A6. — *Si a est une suite croissante et sur-excédante*; *on a*

$$\mathrm{den}^a\,\sigma = \sum_{k\in\mathrm{EP}} (k + B_k) + \mathrm{inv}\,\mathrm{Exc}^a(\sigma) + \mathrm{inv}\,\mathrm{Nexc}^a(\sigma).$$

où $B_k = B_k^a(\sigma) = \#\{l \mid a_l \ge \sigma_k > l \ge 1\}$ (*voir la figure suivante*).



Par exemple, pour la deux-ligne $\binom{a}{\sigma} = \left(\begin{smallmatrix}3&3&4&4&9&9&10&10&11&11&11\\6&1&9&4&11&2&5&3&8&10&7\end{smallmatrix}\right)$, le den^a-codage est le vecteur $(0,0,1,0,4,3,2,4,2,1,4)$, d'où $\mathrm{den}^a\,\sigma = 21$. D'autre part, on a $\mathrm{EP} = \{1,3,5\}$ et $B_1 = \#\{l \mid a_l \ge 6 > l \ge 1\} = 1$, $B_3 = 4$ et $B_5 = 2$; d'où

$$\sum_{k\in\mathrm{EP}} (k + B_k) + \mathrm{inv}\,\mathrm{Exc}^a(\sigma) + \mathrm{inv}\,\mathrm{Nexc}^a(\sigma) = (1+1) + (3+4) + (5+2) + \mathrm{inv}(6\ 9\ 11) + \mathrm{inv}(1\ 4\ 2\ 5\ 3\ 8\ 10\ 7) = 21\ .$$

Démonstration.

On va démontrer ce théorème par récurrence sur la somme de toutes les lettres de a. Dans le cas où $a = nn\ldots n$, puisque $\mathrm{EP} = \emptyset$, le théorème est vrai. Notons $D^a(\sigma)$ le membre droite et a, b deux suites croissantes et sur-excédantes telles que $a_r = b_r + 1$ pour r fixé et $a_i = b_i$ si $i \ne r$. Il nous suffit de montrer que $\mathrm{den}^a\,\sigma - \mathrm{den}^b\,\sigma = D^a(\sigma) - D^b(\sigma)$.

Posons $s = \sigma^{-1}(a_r)$, on a

$$\begin{aligned}\operatorname{den}^a \sigma - \operatorname{den}^b \sigma &= \sum_j \#\operatorname{Fact}_j \cap]\!]\sigma_j, a_j]\!] - \sum_j \#\operatorname{Fact}_j \cap]\!]\sigma_j, b_j]\!] \\ &= \#\operatorname{Fact}_r \cap]\!]\sigma_r, a_r]\!] - \#\operatorname{Fact}_r \cap]\!]\sigma_r, b_r]\!] \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } s > r\,; \\ 0-(r-1) & \text{si } s = r\,; \\ 1 & \text{si } s < r. \end{cases}\end{aligned}$$

Pour $s \neq r$, on a immédiatement $\operatorname{Exc}^a(\sigma) = \operatorname{Exc}^b(\sigma)$, $\operatorname{Nexc}^a(\sigma) = \operatorname{Nexc}^b(\sigma)$ et $B^a_k = B^b_k$ si $k \neq s$. D'où

$$D^a(\sigma) - D^b(\sigma) = B^a_s - B^b_s = \begin{cases} 0 & \text{si } s > r\,; \\ 1 & \text{si } s < r. \end{cases}$$

Si $s = r$, on a $\mathrm{EP}^b = \mathrm{EP}^a + \{r\}$, et $B^a_k = B^b_k$ si $k \neq s$, d'où

$$\sum_{k \in \mathrm{EP}^a} (k + B^a_k) - \sum_{k \in \mathrm{EP}^b} (k + B^b_k) = -(r + B^b_r) = -b_r.$$

D'autre part,

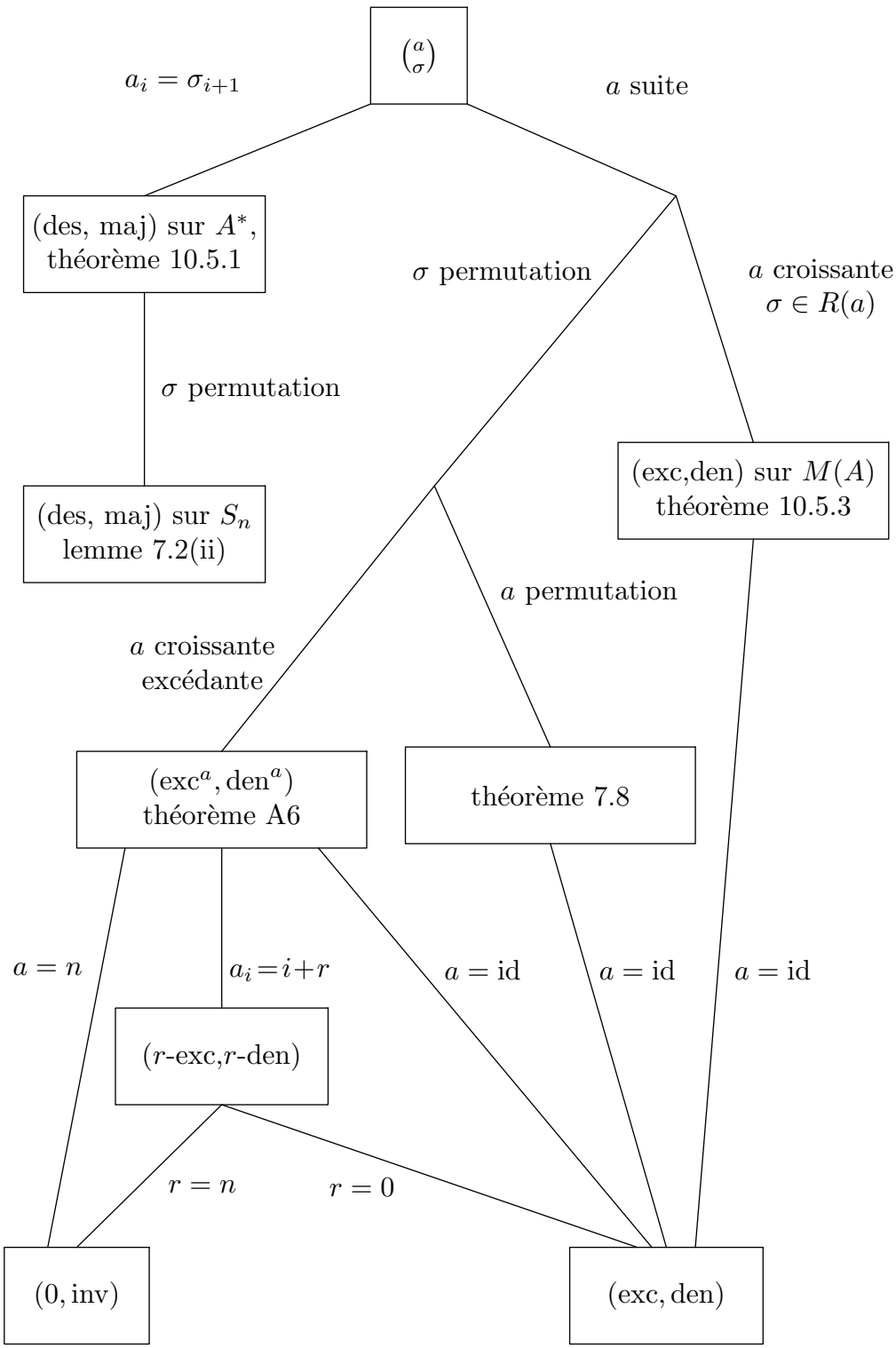
$$\begin{aligned}&\operatorname{inv}\operatorname{Exc}^a(\sigma) + \operatorname{inv}\operatorname{Nexc}^a(\sigma) - \operatorname{inv}\operatorname{Exc}^b(\sigma) + \operatorname{inv}\operatorname{Nexc}^b(\sigma) \\ =&\#\{l > r \mid \sigma_l < a_r\} - \#\{l < r \mid \sigma_l > a_r\} \\ =&\#\{l \mid \sigma_l < a_r\} - \#\{l < r\} \\ =&b_r - (r-1);\end{aligned}$$

on a donc dans tous les cas

$$\operatorname{den}^a \sigma - \operatorname{den}^b \sigma = D^a(\sigma) - D^b(\sigma). \quad \square$$

Nous remarquons que ce resultat fournit aussi une courte démonstration du lemme 7.2 (iii). (le resultat de Foata-Zeilberger, *cf.* [F-Z] et [Cla])

[A7]. Les cas particuliers de (exc, den) généralisé



BIBLIOGRAPHIE

[Car] L. Carlitz. — q-Bernoulli and Eulerian numbers, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **76**, 1954, p. 332-350.

[Cla] R. J. Clarke. — *A short proof of a result of Foata and Zeilberger,* preprint.

[Den] M. Denert. — The genus zeta function of hereditary orders in central simple algebras over global fields, *Math. Comp.*, t. **54**, 1990, p. 449-465.

[Dum] D. Dumont. — Interprétations Combinatoires des nombres de Genocchi, *Duke Math.J.*, t. **41**, 1974, p. 305-317.

[D-F] J. Désarménien et D. Foata. — Fonctions symétriques et séries hypergéométriques basiques multivariées, *Bull. Soc. Math. France*, t. **113**, 1985, p. 3-22.

[FS1] D. Foata et M.-P. Schützenberger. — Major Index and Inversion Number of Permutations, *Math Nachr.*, t. **83**, 1978, p. 143-159.

[FS2] D. Foata et M.-P. Schützenberger. — *Théorie Géométrique des Polynômes Eulériens, Lecture Notes in Math. vol. 138.* — Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[F-Z] D. Foata et D. Zeilberger. — Denert's Permutation Statistic Is Indeed Euler-Mahonian, *Studies in Appl. Math.*, t. **83**, 1990, p. 31-59.

[Fla] P. Flajolet. — Combinatorial Aspects of continued fractions, *Disc. Math.*, t. **32**, 1980, p. 125-161.

[Fo1] D. Foata. — *Rearrangements of Words*, Encyclopedia of mathematics and its applications, vol. **17**, éd. M. Lothaire *Combinatorics on Words*, 1983. p. 184-212.

[Fo2] D. Foata. — On the Netto inversion number of a sequence, *Proc. Amer. Math. Soc*, t. **19**, 1968, p. 236-240.

[Ha1] G.-N. Han. — Distribution Euler-mahonienne : une correspondance, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. **310**, 1990, p. 311-314.

[Ha2] G.-N. Han. — Une nouvelle bijection pour la statistique de Denert, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. **310**, 1990, p. 493-496.

[Ha3] G.-N. Han. — Croissance des polynômes de Kostka, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. **311**, 1990, p. 269-272.

[L-S] A. Lascoux et M.-P. Schützenberger. — Le monoïde plaxique, *Non-commutative structures in Algebra and Geometric Combinatorics* [A. De Luca, éd. Napoli. 1978], p. 129-156.

[Mac] I.-G. Macdonald. — *Symmetric functions and Hall polynomials.* — Oxford,

Clarendon Press, 1979.

[Raw] D. Rawlings. — The r-major index, *J. Combinatorial theory, series A*, t. **31**, 1981, p. 175-183.

[Sta] R. Stanley. — The Fibonacci Lattice, *Fibonacci Quarterly*, t. **13**, 1975, p. 215-232.

[Vie] G. Viennot. — *Une théorie combinatoire des polynômes orthogonaux généraux,* Notes conf. Univ. Québec à Montréal, 1984.

CHAPITRE 2

STATISTIQUES SUR LES TABLEAUX DE YOUNG

Ce chapitre est consacré à une étude combinatoire et analytique des polynômes de Kostka-Foulkes $K_{\nu,\theta}(q)$ (ν, θ étant des partitions et q une variable), définis comme les coefficients de la matrice de passage, dans l'algèbre des fonctions symétriques, de la base des fonctions de Schur à celle formée par les fonctions de Hall-Littlewood. On sait d'après les travaux de LASCOUX et SCHÜTZENGBERGER que ces polynômes sont à coefficients entiers positifs. Ces auteurs ont, en effet, démontré que $K_{\nu,\theta}(q)$ était le polynôme générateur de l'ensemble des tableaux de forme ν et d'évaluation θ par une certaine statistique à valeurs entières appelée *charge*.

Ce chapitre se compose de deux parties : dans la première, nous avons reproduit la Note aux Compte-Rendus, où nous avons démontré l'inégalité $K_{\lambda,\mu}(q) \leq K_{\lambda\cup a,\mu\cup a}(q)$, à savoir répondu à une conjecture proposée par GUPTA-BRYLINSKI.

Dans une seconde partie, nous avons étudié le comportement de $K_{\lambda\cup a^n,\mu\cup a^n}(q)$, lorsque n tend vers l'infini. Sous cette forme, le problème reste trop complexe. Suivant une suggestion de LASCOUX, nous avons cherché à trouver une forme simple pour la somme de la série

$$\sum_{n\geq 0} z^n\, K_{\lambda\cup a^n,\mu\cup a^n}(q).$$

On conjecture que cette somme est une fraction rationnelle en q dépendant naturellement des paramètres λ, μ et a.

Le calcul est explicitement fait dans le cas où $a = 1$, $q = 1$ et $\mu = 11\ldots1$, c'est-à-dire dans le cas des tableaux de Young de forme λ. On trouve, en effet, une fraction rationnelle $P_\lambda(1-z)/(1-z)^{|\lambda|+1}$.

Le calcul nous a amené à introduire des statistiques nouvelles sur les tableaux de Young, notamment la statistique "pre," qui est la première

lettre du numérateur $P_\lambda(z)$. Nous avons ainsi constaté et démontré que $P_\lambda(z)$ était aussi la fonction génératrice de ce même ensemble par une seconde statistique "deu." Le fait inattendu est que la distribution jointe de ces deux statistiques est *symétrique*. Ce que nous établissons par la construction d'un algorithme simple.

Nous terminons ce chapitre par un calcul explicite sur la fonction génératrice de certains q-nombres de Kostka $K_{t1^n}(q)$.

PARTIE 2.1

CROISSANCE DES POLYNÔMES DE KOSTKA (*)

RÉSUMÉ. — Le polynôme de Kostka $K_{I,J}(q)$ est le polynôme générateur de la charge pour les tableaux de Young de forme I et d'évaluation J. Nous démontrons la propriété suivante de croissance pour ces polynômes, conjecturée par GUPTA-BRYLINSKI : pour tout entier positif a, on a $K_{I,J}(q) \leq K_{I \cup a, J \cup a}(q)$.

ABSTRACT. — The Kostka polynomial $K_{I,J}(q)$ is the generating function for the charge over the Young tableaux of shape I and evaluation J. We prove the following growth property for these polynomials conjectued by GUPTA-BRYLINSKI : for any positive integer a we have $K_{I,J}(q) \leq K_{I \cup a, J \cup a}(q)$.

Les fonctions de Schur forment une $\mathbb{Z}[q]$-base de l'anneau $\Lambda[q]$ des fonctions symétriques en un ensemble infini de variables et à coefficients dans les polynômes $\mathbb{Z}[q]$ en une variable supplémentaire q; une autre $\mathbb{Z}[q]$-base est celle de Hall-Littlewood, originellement introduite pour étudier les propriétés combinatoires et énumératives des groupes p-abéliens finis ([Mac], p. 105). La matrice de changement de base a pour coefficients les polynômes de Kostka $K_{I,J}(q) \in \mathbb{Z}[q]$, indicés par les paires de partitions I, J (*cf.* [Mac] p. 125). Les polynômes de Kostka comptent une certaine statistique, appelée *charge*, sur les tableaux de Young de forme I et d'évaluation J. Plus précisément, la charge est une application de l'ensemble des tableaux dans $\mathbb{N}$: $t \mapsto t\nu \in \mathbb{N}$, et le polynôme de Kostka est fourni par le lemme suivant dû à LASCOUX et SCHÜTZENBERGER (*cf.* [Mac], p. 129, [LS3]) :

LEMME 1. — *Soit $\mathbb{T}_{I,J}$ l'ensemble des tableaux de Young de forme I et d'évaluation J. On a*

$$K_{I,J}(q) = \sum_{t \in \mathbb{T}_{I,J}} q^{t\nu}.$$

(*) Note publiée dans *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. **311**, Série I, p. 269–272, 1990.

Soient $A = \{0, 1, 2, ...\}$ un alphabet totalement ordonné et A^* le monoïde libre engendré par A. Les éléments de A^* sont dits *mots*. Le nombre d'occurrences de i dans un mot w est noté $|w|_i$ et la somme de tous ces nombres est le *degré* de w, noté $|w|$. L'*évaluation* d'un mot w est l'image de ce mot par le morphisme naturel de A^* sur le monoïde commutatif libre de même base, i.e., $0^{|w|_0}1^{|w|_1}2^{|w|_2}...$ Un mot w est dit d'*évaluation partitionnelle*, si et seulement si

$$|w|_1 \geq |w|_2 \geq |w|_3 \geq ... \qquad \text{et} \qquad |w|_0 = 0 \ .$$

Les mots croissants au sens large sont appelés *lignes*; plus généralement, un *tableau* est le mot obtenu en lisant l'écriture planaire du tableau de Young de gauche à droite et de haut en bas, ainsi $\begin{smallmatrix} 24 \\ 003 \end{smallmatrix}$ donne le tableau 24003. L'ensemble des tableaux sera noté $\mathbb{T}$. L'algorithme de Schensted [Knu] fournit une projection, que nous appellerons *redressement*, et noterons $w \mapsto wR$, de l'ensemble des mots dans $\mathbb{T}$.

Soit B un intervalle de A. Notons $B^{**} = \{w \in B^* \mid \forall i \in B \Rightarrow |w|_i \geq 1\}$. Pour tout mot w, en remplaçant le plus petit nombre apparaissant dans w par 1, et le nombre suivant par 2, ..., on obtient un mot dans $\{1, 2, ..., m\}^{**}$, noté $w\Omega$. Par exemple, $30053\Omega = 21132$. Soit t un tableau, x la lettre la plus petite figurant dans ce tableau avec la multiplicité r ; t peut factoriser uniquement sous la forme $t = t'x^r u$. Le *Katabolisme* est le morphisme sur l'ensemble des tableaux défini comme suit :

$$t = t'x^r u \longmapsto tK = ut'R\Omega \in \mathbb{T} \ .$$

Dans [LS1] et [LS2], on a défini une action du groupe symétrique $\mathfrak{S}(A)$:

$$w \in A^*, \qquad \sigma \in \mathfrak{S}(A) \longmapsto (w\sigma) \in A^*$$

sur l'algèbre libre, compatible aux tableaux, aux redressements, aux restrictions, et aux permutations circulaires sur les mots, qui possède les propriétés suivantes :

P1. Si w est un tableau, alors $w\sigma$ est un tableau de même forme.

P2. $\forall w \in A^*,\ \sigma \in \mathfrak{S}(A)$, on a $wR\sigma = w\sigma R$.

P3. Pour tout mot w de A^*, pour tout intervalle B tel que $\{B\sigma\} = B$, on a $w\sigma \cap B^* = (w \cap B^*)\sigma$.

P4. Si $(w_1w_2)\sigma = w_1'w_2'$ avec $|w_1| = |w_1'|$ et $|w_2| = |w_2'|$, alors on a $(w_2w_1)\sigma = w_2'w_1'$. De plus, la forme de w_iR est la même que celle de $w_i'R$ pour $i = 1, 2$.

P5. Soit t un tableau, t s'écrit sous la forme $t = t'x^ru$. Si $|t|_i \leq r$ pour tout nombre i figurant dans t, on a : $t\nu = |u| + tK\nu$.

Cette action du groupe symétrique permet de définir une projection de A^* sur l'ensemble des mots d'évaluation partitionnelle : pour tout mot w, l'ensemble des permutations σ tel que $w\sigma$ est d'évaluation partitionnelle n'est pas vide ; le mot $w\sigma$ est indépendant du choix de σ dans cet ensemble et nous noterons $w\zeta$. Evidemment, pour toute permutation σ, on a $\sigma\zeta = \zeta$; en particulier, $\Omega\zeta = \zeta$.

Soit a un entier positif. On définit le morphisme $\theta_a : A^* \to \mathbb{T}$ comme la composition $w \mapsto w\theta_a = w0^aR\zeta$. Par exemple,

$$w = 136116 \mapsto w0^2 = 13611600 \quad \overset{R}{\longmapsto} \quad \begin{array}{llll} 3 & 6 & & \\ 1 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \quad \overset{\zeta}{\longmapsto} \quad \begin{array}{llll} 3 & 3 & & \\ 2 & 2 & & \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array} = w\theta_2$$

Lemme 2. — *Soit σ une permutation dans $\mathfrak{S}(1, 2, ..., m)$. Alors, pour tout tableau $\hat{t}$ dans $\{0, 1, 2, ..., m\}^{**}$, on a $\hat{t}\sigma K = \hat{t}K\sigma$.*

Démonstration. — Le tableau $\hat{t}$ s'écrit sous la forme $\hat{t} = t'0^ru$. Par la propriété P1, $\hat{t}\sigma = s'0^rv$ est un tableau, ainsi, son katabolisme est $vs'R\Omega$. Le diagramme suivant démontre ce lemme :

$$\begin{array}{ccccccccc} \hat{t} = t'0^ru & \longmapsto & 0^rut' & \longmapsto & ut' & \overset{R}{\longmapsto} & ut'R & \overset{\Omega}{\longmapsto} & \hat{t}K \\ \downarrow \sigma & [\text{P4}] & \downarrow \sigma & [\text{P3}] & \downarrow \sigma & [\text{P2}] & \downarrow \sigma & [\Omega = \text{id}] & \downarrow \sigma \\ s'0^rv & \longmapsto & 0^rvs' & \longmapsto & vs' & \overset{R}{\longmapsto} & vs'R & \overset{\Omega}{\longmapsto} & \hat{t}\sigma K \end{array}$$

Proposition 3. — *Soit t un tableau satisfaisant $|t|_0 = 0$, $|t|_1 = r > a$ et $r \geq |t|_i$ pour tout i. Alors on a $t\theta_aK = tK\theta_a$.*

Démonstration. — Notons (0,1) la transposition entre 0 et 1. Le tableau $t\Omega$ s'écrit sous la forme $t\Omega = t'1^ru$. Posons $\hat{t} = t\Omega0^aR(0, 1)$; on vérifie que la première partie [i] du diagramme suivant est commutative :

$$\begin{array}{ccccccc}
t & \xmapsto{\Omega} & t'1^r u & \xmapsto{0^a R(0,1)} & \hat{t} = (t'1^a)R0^r u & \xmapsto{\zeta} & \hat{t}\zeta \\
\Big\downarrow K & & \Big\downarrow K & [\mathrm{i}] & \Big\downarrow K & [\mathrm{ii}] & \Big\downarrow K \\
tK & \xmapsto{\mathrm{id}} & ut'R\Omega & \xmapsto{0^a R\Omega} & \hat{t}K = (ut'1^a)R\Omega & \xmapsto{\zeta} & \hat{t}\zeta K
\end{array}$$

D'après la définition de $\hat{t}$, on sait qu'il existe une permutation σ telle que $\hat{t}\sigma = \hat{t}\zeta$ et $\hat{t}K\sigma = \hat{t}K\zeta$ et que $\hat{t}$, σ satisfont les conditions décrites dans le lemme 2. Par conséquent, la seconde partie [ii] est aussi commutative. La démonstration est terminée par la vérification des deux égalités $\hat{t}\zeta K = t\theta_a K$ et $\hat{t}K\zeta = tK\theta_a$. □

Dans [Gup], Gupta(Brylinski) a conjecturé que pour tout $n \geq 0$, le coefficients de q^n dans $K_{I\cup a, J\cup a}(q)$ est supérieur ou égal à celui dans $K_{I,J}(q)$. Par le lemme 1, notre théorème principal suivant démontrera cette conjecture.

Théorème 4. — *La restriction de θ_a à $\mathbb{T}_{I,J}$ est une injection de $\mathbb{T}_{I,J}$ à $\mathbb{T}_{I\cup a, J\cup a}$ conservant la charge.*

Démonstration. — D'après les propriétés du morphisme ζ, il suffit de démontrer que θ_a conserve la charge. Soient t un tableau dans $\mathbb{T}_{I,J}$ et $|t|_1 = r$. Si $r \leq a$, on a $t\theta_a = t0^a R\Omega$ et on vérifie directement que $t\nu = t0^a\nu$; si $r > a$, en reprenant le diagramme précédent, par la relation P5, on a

$$t\theta_a\nu - t\nu = tK\theta_a\nu - tK\nu \ .$$

Ainsi, le théorème se démontre par récurrence sur le degré. □

Puisque ζ, R et Ω sont des morphismes conservant la charge, le théorème 4 a pour corollaire une propriété intéressante d'invariance de la charge :

Corollaire 5. — *Soit w un mot tel que $|w|_0 = 0$. Alors pour tout entier a positif, on a $w0^a\nu = w\nu$.*

A la fin de cette Note, on donne quelques remarques sur cette injection.

REMARQUE 6. — La construction de θ_a est facile. Si t est un tableau d'évaluation partitionnelle, il existe une permutation circulaire σ tel que $t\sigma = t\zeta$. D'après la section 4.8 de [LS1], on trouve une méthode directe pour cette construction. En voici un exemple. Pour

$$t = \begin{array}{*{7}{c}} 5 & & & & & & \\ 3 & 4 & 4 & 6 & & & \\ 2 & 2 & 2 & 3 & & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

et $a = 2$, on construit d'abord des filières dans $t0^a$:

$$t0^2 = \underline{5}\ \underline{3}\ \underline{\underline{4}}\ \underline{4}\ \underline{6}\ 2\ \underline{\underline{2}}\ \underline{2}\ 3\ 1\ 1\ 1\ \underline{\underline{1}}\ \underline{1}\ 2\ \underline{\underline{3}}\ \underline{\underline{0}}\ \underline{0}$$

et puis, on remplace les éléments soulignés par leurs éléments successifs respectivement ; on obtient

$$t0^2\sigma = \underline{6}\ \underline{4}\ \underline{\underline{5}}\ \underline{5}\ \underline{7}\ 2\ \underline{\underline{3}}\ \underline{3}\ 3\ 1\ 1\ 1\ \underline{\underline{2}}\ \underline{2}\ 2\ \underline{\underline{4}}\ \underline{\underline{1}}\ \underline{1}$$

L'image de t par θ_2 est donc

$$t0^2\sigma R = \begin{array}{*{7}{c}} 6 & & & & & & \\ 4 & 5 & & & & & \\ 3 & 3 & 5 & 7 & & & \\ 2 & 2 & 2 & 3 & & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 4 \end{array}$$

REMARQUE 7. — Evidemment, pour tout partition $L = (l_1, l_2, ..., l_m)$, en appliquant la composition des morphismes $\theta_{l_1}, \theta_{l_2}, ..., \theta_{l_m}$, on a le résultat plus général : $K_{I,J}(q) \leq K_{I\cup L, J\cup L}(q)$. Ce qui n'est pas trivial est que cette composition est indépendante de l'ordre. En effet, soient a, b deux entiers positifs, t un tableau d'évaluation partitionnelle, $\hat{t}$ un tableau dans $\{2, 3, ...\}^*$ tel que $\hat{t}\Omega = t\Omega$, on a

$$t\theta_a\theta_b = (\hat{t}1^aR\zeta)0^bR\zeta = (\hat{t}1^a0^b)R\zeta = (\hat{t}1^b0^a)R\zeta = t\theta_b\theta_a\ .$$

BIBLIOGRAPHIE

[Gup] G. Gupta. — Problem No. 9, in *Combinatorics and Algebra* [C. Greene, éd. 1984], p. 310. — *Contemporary Mathematics*, vol. 34.

[Knu] D.-E. Knuth. — *The Art of Computer Programming, vol.3, Sorting and Searching*. — Don Mills, Ontario, Addison-Wesley, 1972.

[LS1] A. Lascoux et M.-P. Schützenberger. — Le monoïde plaxique, *Non-commutative structures in Algebra and Geometric Combinatorics* [A. De Luca, éd. Napoli. 1978], p. 129-156.

[LS2] A. Lascoux et M.-P. Schützenberger. — Croissance des polynômes de Foulkes-Green, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. **288, série A**, 1979, p. 95-98.

[LS3] M.-P. Schützenberger. — Propriétés nouvelles des tableaux de Young, *Séminaire Delange-Pisot-Poitou*, 19^e année, 1977/1978, n°26.

[Mac] I.-G. Macdonald. — *Symmetric functions and Hall polynomials*. — Oxford, Clarendon Press, 1979.

PARTIE 2.2

POLYNÔMES DE KOSTKA-FOULKES : UNE ÉTUDE STATISTIQUE

RÉSUMÉ. — Le calcul de la somme de la série $\sum_{n\geq 0} z^n\, K_{\lambda\cup a^n,\mu\cup a^n}(q)$, où $K_{\nu,\theta}(q)$ désigne le polynôme de Kostka-Foulkes associé aux tableaux de forme ν et d'évaluation θ est explicitement fait dans le cas $a = 1$, $q = 1$ et $\mu = 11\ldots1$. On trouve une fraction rationnelle $P_\lambda(1-z)/(1-z)^{|\lambda|+1}$, où le numérateur est le polynôme générateur des tableaux de forme λ par leur première lettre "pre". Une autre statistique "deu" est définie sur les tableaux de Young et la distribution du couple (pre,deu) est symétrique sur l'ensemble des tableaux de même forme. Enfin, un calcul explicite est fait pour la somme de la série $\sum_{n\geq 0} K_{t1^n}(q)z^n$ (q quelconque) pour les tableaux qui sont des extensions $t1^n$ d'un même tableau t.

ABSTRACT. — The sum of the series $\sum_{n\geq 0} z^n\, K_{\lambda\cup a^n,\mu\cup a^n}(q)$, where $K_{\nu,\theta}(q)$ denotes the Kostka-Foulkes polynomial associated with tableaux of shape ν and evaluation θ, is explicitly derived in the case $a = 1$, $q = 1$ and $\mu = 11\ldots1$. This sum is a rational function $P_\lambda(1-z)/(1-z)^{|\lambda|+1}$, where the numerator is the generating polynomial for the tableaux of shape λ by their first letter "pre". Another statistic "deu" is defined on the Young tableaux and the distribution of the pair (pre,deu) is symmetric over the set of the tableaux of the same shape. Finally an explicit calculation is made for the sum of the series $\sum_{n\geq 0} K_{t1^n}(q)z^n$ (arbitrary q) for the tableaux that are extensions $t1^n$ of a given tableau t.

1. Introduction

Les polynômes de Kostka-Foulkes $K_{\nu,\theta}(q)$ sont définis comme les coefficients de la matrice de passage, dans l'algèbre des fonctions symétriques, de la base des fonctions de Schur à celle formée par les fonctions de Hall-Littlewood (*cf.* [Mac]). On sait d'après les travaux de LASCOUX et SCHÜTZENGBERGER ([LS1, LS2, LS3]) que ces polynômes sont à coefficients entiers positifs. Ces auteurs ont, en fait, montré que $K_{\nu,\theta}(q)$ était le polynôme générateur de l'ensemble $\mathbb{T}_{\nu,\theta}$ des tableaux de forme ν et d'évaluation θ par une certaine statistique à valeurs entières appelée *charge* et notée "ch" ci-après.

Si $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_l)$ est une partition, la *longueur* de λ et le *poids* de λ seront notées respectivement $l(\lambda)$ et $|\lambda|$. Si μ désigne une seconde partition, on note $\lambda \cup \mu$ la partition obtenue en réarrangeant en ordre décroissant toutes les parts de λ et de μ [Mac]. Si n est un entier positif, on écrit aussi $\lambda 1^n$ au lieu de $\lambda \cup 1^n$.

Le but de cet article est d'étudier la *croissance* des polynômes $K_{\nu,\theta}(a)$ dans le sens suivant. Dans un article précédent [Han], nous avons démontré la propriété suivante conjecturée par Gupta(Brylinski) [Gup] :

Théorème 1.1. — *Pour tout entier positif a, on a*

$$K_{\lambda,\mu}(q) \leq K_{\lambda\cup a,\mu\cup a}(q).$$

Ce résultat implique, pour tout entier n, l'inégalité

$$K_{\lambda,\mu}(q) \leq K_{\lambda\cup a^n,\mu\cup a^n}(q),$$

ce qui a conduit Gupta(Brylinski) à poser le problème du calcul de la limite

$$\lim_{n\to\infty} K_{\lambda\cup a^n,\mu\cup a^n}(q).$$

Sous cette forme générale, le problème reste trop complexe. Suivant une suggestion de Lascoux, il semble plus fructueux de trouver une expression simple pour la somme de la série $\sum_{n\geq 0} z^n\, K_{\lambda\cup a^n,\mu\cup a^n}(q)$. On conjecture que cette somme est une fraction rationnelle en q dépendant naturellement des paramètres λ, μ et a.

La conjecture est, en effet, vraie dans le cas où $a = 1$, $q = 1$ et $\mu = 11\ldots1$, c'est-à-dire dans le cas des tableaux de Young de forme λ. Ce résultat constitue le résultat principal de cet article. On démontre que cette somme vaut $P_\lambda(1-z)/(1-z)^{|\lambda|+1}$, où le numérateur $P_\lambda(z)$ est la fonction génératrice de l'ensemble des tableaux de forme λ par la première lettre (*cf.* théorème 2.1).

Nous donnons deux démonstrations de ce théorème. Au cours de la première, nous sommes amenés à introduire une seconde statistique "deu" sur les tableaux de Young. Le fait inattendu est que la distribution jointe de ces deux statistiques est *symétrique*. Ce que nous établissons par la construction d'un algorithme simple (*cf.* théorème 3.6).

Dans le cas où q est quelconque, nous obtenons le résultat explicite suivant

$$\sum_{n\geq 0} K_{t1^n}(q) z^n = \frac{q^{\operatorname{ch} t}}{(1-zq^c)(1-zq^{c+1})\ldots(1-zq^{c+m-p})}, \tag{1.1}$$

où $K_{t1^n}(q)$ désigne le polynôme générateur de la charge sur l'ensemble de tous les tableaux s se réduisant à t lorsqu'on retire de s tous les éléments non contenus dans la forme de t.

L'article comprend huit sections. On trouve dans la deuxième la définition de la statistique "pre", l'énoncé du théorème 2.1, ainsi que quelques conséquences de celui-ci. La troisième section contient la définition de la statistique "deu", et la démonstration du fait que le couple (pre,deu) a une distribution *symétrique* sur l'ensemble de tous les tableaux de même forme. La fin de la première démonstration du théorème 2.1 apparaît dans la section 4. On trouve dans la section suivante une méthode pratique pour le calcul des polynômes $P_\lambda(z)$. La section 6 donne une seconde démonstration directe du théorème 2.1. Enfin les deux dernières sections sont consacrées à l'étude du cas q quelconque et à la démonstration de (1.1).

2. La statistique "pre**"**

Soit t un tableau (ou un tableau gauche plus généralement) ; on note $\operatorname{pre} t$ la *première* lettre du tableau t au sens de Lascoux-Schützenberger (*cf.* [LS1]), c'est-à-dire, la première lettre du mot obtenu en écrivant tous les éléments du tableau t, lorsque celui-ci est lu de haut en bas et de gauche à droite. On note $P_\lambda(x)$ le polynôme générateur de la statistique "pre" sur l'ensemble $\mathbb{T}_\lambda$ des tableaux standard de forme λ, soit

$$P_\lambda(x) = \sum_t x^{\operatorname{pre} t} \qquad (t \in \mathbb{T}_\lambda).$$

Par exemple, pour $\lambda = (4,2) = 42$, les éléments de $\mathbb{T}_\lambda$ et leurs valeurs respectives $\operatorname{pre} t$ sont donnés dans le tableau suivant :

	2 4	2 5	2 6	3 4	3 5	3 6	4 5	4 6	5 6
t	1 3 5 6	1 3 4 6	1 3 4 5	1 2 5 6	1 2 4 6	1 2 4 5	1 2 3 6	1 2 3 5	1 2 3 4
$\operatorname{pre} t$	2			3			4		5

D'où l'on tire le polynôme $P_{42}(x) = 3x^2 + 3x^3 + 2x^4 + x^5$.

Pour toute partition ν, on note $K_\nu = \#\mathbb{T}_\nu$ le nombre de Kostka-Foulkes de forme ν et d'évaluation standard. Le premier énoncé fondamental de cet article est le suivant :

Théorème 2.1. — *Soit λ une partition ; alors*

$$\sum_{n\geq 0} z^n K_{\lambda 1^n} = \frac{P_\lambda(1-z)}{(1-z)^{|\lambda|+1}},$$

On note que la série ci-dessus est une fraction rationnelle dont le numérateur est un polynôme à coefficients entiers *positifs* en la variable $(1-z)$ et non pas z.

On remarque que le nombre de Kostka-Foulkes $K_{\lambda 1^n}$ peut être calculé par la *formule des crochets*. Si l'on prend la partition particulière $\lambda = (a)$, on a $K_{a1^n} = \frac{(a)_n}{n!}$ par la formule des crochets, où l'on a posé $(a)_0 = 1$ et $(a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1)$ pour $n \geq 1$. D'autre part, il n'y a qu'un seul tableau $12\cdots a$ de forme $\lambda = (a)$, et la première lettre de ce tableau est 1, d'où $P_\lambda(x) = x$. Ainsi, nous retrouvons la formule binomiale :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(a)_n}{n!} z^n = \frac{1}{(1-z)^a}.$$

Pour la partition générale, $\lambda = 42$ par exemple, on trouve une "formule binomiale avec des *trous* " comme suit :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(n+1)(n+3)(n+4)(n+6)}{1\cdot 1\cdot 2\cdot 4} z^n = \frac{P_{42}(1-z)}{(1-z)^7}.$$

3. La statistique "deu**"**

Une partition $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_l)(\lambda_l \geq 1)$ est dite *pointue*, si sa dernière part λ_l est égale à 1; un tableau est dit *pointu*, si sa forme est une partition pointue. Par exemple le tableau :

$$tA = \begin{array}{c} 8 \\ 4\ 7\ 9 \\ 1\ 2\ 3\ 5\ 6 \end{array}$$

est pointu.

Soit t un tableau standard de *poids* n, i.e., un tableau dont le contenu est l'ensemble $[\,n\,]$. Pour tout entier r $(1 \leq r \leq n)$, on note $t|_r$ le sous-tableau standard de poids r obtenu en ne retenant du tableau que les coeffcients du sous-ensemble $[\,r\,]$. On a, par exemple, $tA|_7 = \begin{smallmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2\ 3\ 5\ 6 \end{smallmatrix}$.

La statistique "deu" est définie par :

$$\mathrm{deu}\, t = \#\{r : t|_r \text{ est pointu}\}.$$

Reprenant le même exemple, on voit que les lettres r pour lesquelles $t|_r$ est pointu sont reproduites en gras :

$$tA = \begin{array}{c} \mathbf{8} \\ \mathbf{4}\ 7\ \mathbf{9} \\ \mathbf{1}\ 2\ 3\ \mathbf{5}\ \mathbf{6} \end{array} .$$

D'où $\deu tA = 6$.

Les deux prochaines notions s'avèrent fondamentales pour la construction de notre algorithme. Soit t un tableau standard de poids n. On dit que t est *maximal*, si, ou bien $\pre t = n$, ou bien $t|_{(\pre t+1)}$ est non-pointu. On dit que t est *minimal*, si pour toute lettre $r \neq 1$ appartenant à la première colonne de t, la forme du tableau $t|_r$ est de type $\mu 11$, où μ est une partition.

Supposons que t soit de forme $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l)$ et que ses coefficients $t_{i,j}$ soient donnés sous la forme suivante :

$$(\star) \qquad t = \begin{vmatrix} t_{l,1}\ t_{l,2}\ \ldots\ t_{l,\lambda_l} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ t_{2,1}\ t_{2,2}\ \ldots\ t_{2,\lambda_2} \\ t_{1,1}\ t_{1,2}\ \ldots\ t_{1,\lambda_1} \end{vmatrix}$$

Alors t est *maximal*, si $t_{l,1} = n$, ou si $t_{l,2} = t_{l,1} + 1$; le tableau est *minimal*, si $t_{j,1} < t_{j-1,2}$ pour tout j tel que $t_{j,1}$ et $t_{j-1,2}$ existent.

Le lemme suivant se vérifie immédiatement à l'aide de cette dernière caractérisation.

LEMME 3.1. — *Soit t un tableau, on a :*

(i) *si t est pointu et maximal, alors* $\pre t = n$;

(ii) *si t est pointu et minimal, alors* $\deu t = n$;

(iii) *si t est non-pointu et maximal, alors* $\pre t = t_{l,2} - 1$;

(iv) *si t est non-pointu et minimal, alors* $\deu t = t_{l,2} - 1$. □

Par exemple, on peut vérifier que le tableau

$$tB = \begin{array}{llll} 7 & 11 & & \\ 5 & 10 & 12 & \\ 2 & 6 & 8 & \\ 1 & 3 & 4 & 9 \end{array}$$

est un tableau minimal et non-maximal. On a : $\deu t = t_{l,2} - 1 = 10$.

Soient t un tableau standard de poids n et $(p, p+1)$ $(1 \leq p \leq n-1)$ une transposition. Si $p+1$ apparaît dans t sur une ligne *plus basse* que celle occupée par p, en changeant les coefficients p et $p+1$ du tableau t, on obtient aussi un tableau, noté $u = (p, p+1) \circ t$.

LEMME 3.2. — *Soit t un tableau standard d'ordre n supposé non-maximal. On pose $p = \pre t$ et on désigne par u le tableau $u = (p, p+1) \circ t$.*

Alors u est aussi un tableau standard. De plus, on a, en posant $s = u|_p$,

$$\operatorname{deu} u = \begin{cases} \operatorname{deu} t, & \textit{si } s \textit{ est pointu}; \\ \operatorname{deu} t - 1, & \textit{si } s \textit{ est non-pointu.} \end{cases}$$

Démonstration. — En conservant les mêmes notations que dans ($\star$), on voit que $p = \operatorname{pre} t = t_{l,1} \neq n$ et aussi $t_{l,2} \neq t_{l,1}+1 = p+1$. Le coefficient du tableau t égal à $(p+1)$ se trouve donc sur une ligne plus basse que la ligne d'ordonnée l où se trouve p. Ainsi, u est aussi un tableau standard.

Si s est pointu, alors les quatre tableaux $t|_{(p+1)}$, $t|_p$, $u|_{(p+1)}$ et $u|_p$ sont pointus, de sorte que $\operatorname{deu} u = \operatorname{deu} t$.

Au contraire, si s est non-pointu, $t|_{(p+1)}$, $t|_p$ et $u|_{(p+1)}$ sont pointus, mais non $u|_p$, de sorte que $\operatorname{deu} u = \operatorname{deu} t - 1$. □

Considérons l'algorithme $\phi : t \mapsto t'$ suivant :

entrer t un tableau non-maximal ;
sortir t' un tableau non-minimal ;

begin
s :=t' :=t ;
repeat
$p := \operatorname{pre} s$;
$t' := (p, p+1) \circ t'$;
$s := t'|_p$;
until s est non-pointu ;
end.

Comme le tableau initial t est supposé être non maximal, les instructions (1), (2) et (3) s'appliquent au moins une fois. Notons $t_1 = t$, t_2, ... la suite des tableaux successivement construits. Comme la suite des paramètres p attachés à chacun de ces tableaux est strictement décroissante, la suite est *finie*, disons, t_1, t_2, ... , $t_m = t'$ ($m \geq 2$). On a de plus :

$$1 + \operatorname{pre} t_1 = \operatorname{pre} t_2 = \cdots = \operatorname{pre} t_m$$
$$\operatorname{deu} t_1 = \operatorname{deu} t_2 = \cdots = \operatorname{deu} t_{m-1} = \operatorname{deu} t_m + 1.$$

Notons encore que les tableaux t_i ont au moins deux lignes ($l \geq 2$) (sinon t serait maximal).

LEMME 3.3. — *Soit t' le tableau déduit d'un tableau non-maximal t par l'application de l'algorithme ϕ. Alors on a :*

$$1 + \operatorname{pre} t = \operatorname{pre} t' \qquad et \qquad \operatorname{deu} t = \operatorname{deu} t' + 1. \quad \square$$

Par exemple, appliquons ϕ au tableau tB ci-dessus, qui est non-maximal. Comme $p = 7$, on trouve d'abord :

$$t_2 = (7,8) \circ t = \begin{array}{llll} 8 & 11 & & \\ 5 & 10 & 12 & \\ 2 & 6 & 7 & \\ 1 & 3 & 4 & 9 \end{array}$$

Comme $s = t_2|_7$ est pointu, et que $\operatorname{pre} s = 5$, on prend $p = 5$ et on déduit :

$$t_3 = (5,6) \circ t_2 = \begin{array}{llll} 8 & 11 & & \\ 6 & 10 & 12 & \\ 2 & 5 & 7 & \\ 1 & 3 & 4 & 9 \end{array}$$

Cette fois, $s = t_3|_5$ est non-pointu. Le processus est terminé. Le tableau final est donc $t' = \phi(t) = t_3$.

Réciproquement, désignons par $c = (c_l > c_{l-1} > \cdots > c_1)$ $(c_1 = 1)$ la première colonne d'un tableau t. Notons m le plus petit entier tel que les formes de $t|_{c_l}$, $t|_{c_{l-1}}$, $\ldots$, $t|_{c_{m+1}}$ contiennent toutes au moins deux parts égales à 1 et $t|_{c_m}$ contient une seule part égale à 1. Alors $m = 1$, si et seulement si t est minimal. L'entier $m = m(t)$ sera appelé la *minimalité* de t. Le lemme suivant est immédiat à vérifier.

LEMME 3.4. — *Si t' est un tableau non minimal (i.e., de minimalité $m \geq 2$), si $c' = (c'_l > c'_{l-1} > \cdots > c'_1)$ désigne sa première colonne, alors*

$$t = (c'_1, c'_1 - 1)(c'_2, c'_2 - 1) \ldots (c'_m, c'_m - 1) \circ t'$$

est un tableau standard tel que $\phi(t) = t'$.

Si $c = (c_l > c_{l-1} > \cdots > c_1)$ désigne la première colonne de t, alors

$$(L) \qquad m(t) \leq m(t') \qquad et \text{ si } m(t) = m(t') = m, \text{ alors } c_m < c'_m. \quad \square$$

Le lemme 3.4 donne donc une construction explicite de l'algorithme inverse ϕ^{-1}. De plus, la propriété (L) dit que si l'on itère l'algorithme

ϕ^{-1}, on aboutit nécessairement, en un nombre fini d'étapes, à un tableau *minimal*.

Par exemple, en considérant les éléments de la première colonne $c' = (8, 6, 2, 1)$ de t', on voit que la forme de $t'|_8$ contient deux parts égale à 1, mais non $t'|_6$. On a alors :

$$t = (8, 7)(6, 5) \circ t'.$$

La minimalité de t' est égale à 3 et celle de t à 1, donc t est, dans cet exemple, minimal.

On vérifie également le lemme suivant :

Lemme 3.5.

1) *Il y a autant de tableaux maximaux que de tableaux minimaux*;

2) *Si t est un tableau à la fois minimal et maximal, alors* $\operatorname{pre} t = \operatorname{deu} t$. □

Partons d'un tableau minimal t et appliquons-lui l'algorithme ϕ de façon itérative, jusqu'à obtenir un tableau *maximal*. On obtient ainsi une suite de tableaux $(t_1 = t, t_2, \ldots, t_k)$, tels que $t_i = \phi(t_{i-1})$ $(i = 2, \ldots, k)$ et tels que t_k est maximal. Posons $\phi^*(t) = \{t_1, t_2, \ldots, t_k\}$.

On peut noter que l'algorithme ϕ n'a jamais aucune action sur l'élément situé en position $(l, 2)$ dans les tableaux. Le lemme 3.1 entraîne alors :

$$\operatorname{deu} t_1 = \operatorname{pre} t_k.$$

On a, d'autre part, d'après le lemme 3.3 :

$$1 + \operatorname{pre} t_1 = \operatorname{pre} t_2,\ 1 + \operatorname{pre} t_2 = \operatorname{pre} t_3,\ \ldots\ ,\ 1 + \operatorname{pre} t_{k-1} = \operatorname{pre} t_k\,;$$
$$\operatorname{deu} t_1 = 1 + \operatorname{deu} t_2,\ \operatorname{deu} t_2 = 1 + \operatorname{deu} t_3,\ \ldots\ ,\ \operatorname{deu} t_{k-1} = 1 + \operatorname{deu} t_k.$$

Il en résulte que les deux couples de statistiques $(\operatorname{pre}, \operatorname{deu})$ et $(\operatorname{deu}, \operatorname{pre})$ sont *équidistribués* sur toute orbite $\phi^*(t_1)$.

Enfin, le lemme 3.4 implique qu'on décrit tout $\mathbb{T}_\lambda$ en considérant l'ensemble $\mathbb{T}_\lambda^{\min}$ de tous les tableaux minimaux de forme λ et en leur appliquant l'algorithme ϕ de façon itérative, soit

$$\mathbb{T}_\lambda = \sum_t \phi^*(t) \qquad (t \in \mathbb{T}_\lambda^{\min}).$$

On a ainsi démontré le théorème suivant :

THÉORÈME 3.6. — *Les deux couples de statistiques* $(\mathrm{pre}, \mathrm{deu})$ *et* $(\mathrm{deu}, \mathrm{pre})$ *sont équidistribués sur tout ensemble* $\mathbb{T}_\lambda$. *Autrement dit, la fonction génératrice*

$$\sum_{t\in\mathbb{T}_\lambda} x^{\mathrm{pre}\, t} y^{\mathrm{deu}\, t}$$

est symétrique en les deux variables x *et* y. □

4. Démonstration du théorème 2.1

Soit λ une partition, on note $\lambda\backslash 1$ l'ensemble de toutes les partitions de poids $|\lambda|-1$ dont les diagrammes sont contenus dans celui de λ. Par exemple, si $\lambda = 4331$, on a $\lambda\backslash 1 = \{433, 4321, 3321\}$.

La construction des tableaux implique la relation de récurrence

$$\begin{cases} K_{\lambda 1^n} = \displaystyle\sum_{\mu\in\lambda\backslash 1} K_{\mu 1^n}, & \text{si } \lambda \text{ est pointue ou si } n = 0\,; \\ K_{\lambda 1^n} = \displaystyle\sum_{\mu\in\lambda\backslash 1} K_{\mu 1^n} + K_{\lambda 1^{n-1}}, & \text{si } \lambda \text{ est non-pointue et si } n \geq 1\ . \end{cases}$$

Posons $G_\lambda(z) = \sum_{n\geq 0} z^n K_{\lambda 1^n}$; alors

$$\begin{cases} G_\lambda(z) = \displaystyle\sum_{\mu\in\lambda\backslash 1} G_\mu(z), & \text{si } \lambda \text{ est pointue}\,; \\ G_\lambda(z) = \displaystyle\sum_{\mu\in\lambda\backslash 1} G_\mu(z) + zG_\lambda(z), & \text{si } \lambda \text{ est non-pointue}\ . \end{cases}$$

ou encore,

$$G_\lambda(z) = c_\lambda \sum_{\mu\in\lambda\backslash 1} G_\mu(z),$$

avec

$$c_\lambda = \begin{cases} 1, & \text{si } \lambda \text{ est pointue}\,; \\ \frac{1}{1-z}, & \text{si } \lambda \text{ est non-pointue}\ . \end{cases}$$

En appliquant ce processus itérativement, on obtient

$$(A) \qquad G_\lambda(z) = \sum_{(\mu_0,\mu_1,\cdots,\mu_{|\lambda|})} c_{\mu_0} c_{\mu_1} \cdots c_{\mu_{|\lambda|-1}} G_\emptyset(z),$$

où la somme est faite pour toutes les suites des partitions $(\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_{|\lambda|})$ telles que $\mu_0 = \lambda$, $\mu_{|\lambda|} = \emptyset$ et $\mu_i \in \mu_{i-1} \backslash 1$ pour $1 \leq i \leq |\lambda|$.

Remarquons que

$$G_\emptyset(z) = \sum_{n \geq 0} z^n K_{1^n} = \frac{1}{1-z}$$

et que

$$(B) \qquad \sum_{(\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_{|\lambda|})} c_{\mu_0} c_{\mu_1} \cdots c_{\mu_{|\lambda|-1}} = \sum_{t \in \mathbb{T}_\lambda} c(t),$$

où

$$\begin{aligned} c(t) &= \prod_{1 \leq r \leq n} \left(\frac{1}{1-z}\right)^{\chi(t|_r \text{ est non-pointu})} \\ &= \frac{1}{(1-z)^{|\lambda|}} \prod_{1 \leq r \leq n} (1-z)^{\chi(t|_r \text{ est pointu})} \\ &= \frac{(1-z)^{\operatorname{deu} t}}{(1-z)^{|\lambda|}}. \end{aligned}$$

Par les relations (A) et (B), on en déduit

$$G_\lambda(z) = \frac{1}{(1-z)^{|\lambda|+1}} \sum_{t \in \mathbb{T}_\lambda} (1-z)^{\operatorname{deu} t} = \frac{U_\lambda(1-z)}{(1-z)^{|\lambda|+1}},$$

où $U_\lambda(x)$ est le polynôme générateur de la statistique "deu" sur l'ensemble $\mathbb{T}_\lambda$. D'après le théorème 3.6, on sait que $U_\lambda(x) = P_\lambda(x)$. Ceci achève la démonstration du théorème 2.1. □

5. Méthode pratique pour le calcul de $P_\lambda(x)$.

On définit d'abord un opérateur linéaire D_r sur l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à $r-1$ de la façon suivante : pour $p \leq r-1$, on pose

$$D_r(x^p) = x^{p+1} + x^{p+2} + \cdots + x^r.$$

Soit $c = (c_l > c_{l-1} > \cdots > c_1 = 1)$ la première colonne d'un tableau t. On lui associe le polynôme

$$D(t) = D_{c_l} D_{c_{l-1}} \cdots D_{c_1} * 1 \ .$$

En reprenant l'écriture ($\star$), un tableau t est dit *compact*, si $t|_r$ est maximal pour tout r. Notons $\overline{\mathbb{T}}_\lambda$ l'ensemble de tous les tableaux compacts. Par exemple, il n'y a que deux tableaux compacts de forme 3211 :

$$\overline{\mathbb{T}}_{3211} = \left\{ \begin{array}{cc} 7 & 7 \\ 6 & 6 \\ 3\ 4 & 4\ 5 \\ 1\ 2\ 5 \end{array} \quad , \quad \begin{array}{c} \\ \\ 1\ 2\ 3 \end{array} \right\}.$$

Théorème 5.1. — *On a*

$$P_\lambda(x) = \sum_t D(t) \qquad (t \in \overline{\mathbb{T}}_\lambda).$$

Démonstration. — On démontre ce résultat par récurrence sur le poids des partitions. Il n'y a qu'un seul tableau compact de poids 1 et on a bien $P_1(x) = D_1 * 1 = x$. Supposons que le théorème est vrai pour les partitions de poids inférieur ou égal à $n-1$. On distingue deux cas suivant que la partition est pointue ou non.

(α) *La partition $\lambda = \mu 1$ est pointue de poids n.* On définit d'abord l'*opérateur de réduction* Ω sur l'ensemble des tableaux t dont les contenus sont des entiers différents non nécessairement consécutifs : le tableau $\Omega(t)$ est obtenu à partir de t en remplaçant le $i^{\text{ème}}$ plus petit entier par l'entier i et ceci pour tout i. Par exemple,

$$\Omega\begin{pmatrix} 5\ 9 \\ 2\ 7\ 8 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} 2\ 5 \\ 1\ 3\ 4 \end{array}.$$

Maintenant, soit t un tableau de forme μ (de poids $(n-1)$) dont la première lettre est p. Pour tout r tel que $p+1 \leq r \leq n$, on constate qu'il y a exactement un tableau t^r pouvant s'écrire sous la forme $t^r = r.t'$ (*cf.* [LS1]) où t' est un tableau tel que $\Omega(t') = t$. Par exemple, si l'on prend $tC = \begin{array}{c} 4\ 5\ 7 \\ 1\ 2\ 3\ 6 \end{array}$ de poids $n-1=7$, on a

$$(tC)^5 = \begin{array}{c} 5 \\ 4\ 6\ 8 \\ 1\ 2\ 3\ 7 \end{array}, \quad (tC)^6 = \begin{array}{c} 6 \\ 4\ 5\ 8 \\ 1\ 2\ 3\ 7 \end{array}, \quad (tC)^7 = \begin{array}{c} 7 \\ 4\ 5\ 8 \\ 1\ 2\ 3\ 6 \end{array}, \quad (tC)^8 = \begin{array}{c} 8 \\ 4\ 5\ 7 \\ 1\ 2\ 3\ 6 \end{array}.$$

Notons $\mathbb{T}(t) = \{t^r \mid p+1 \leq r \leq n\}$; on a $\mathbb{T}_\lambda = \sum_t \mathbb{T}(t)$ où la sommation

est faite sur tous les $t \in \mathbb{T}_\mu$. D'où

$$\begin{aligned} P_\lambda(x) &= \sum_{t\in\mathbb{T}_\mu} (x^{\mathrm{pre}\, t+1} + x^{\mathrm{pre}\, t+2} + \cdots + x^n) \\ &= D_n \sum_{t\in\mathbb{T}_\mu} x^{\mathrm{pre}\, t} \\ &= D_n P_\mu(x) \\ &= D_n \sum_{t\in\mathbb{T}_\mu} D(t) \quad \text{(par l'hypothèse de recurrence).} \end{aligned}$$

Puisque $t \mapsto n.t$ est une bijection entre $\overline{\mathbb{T}}_\mu$ et $\overline{\mathbb{T}}_\lambda$, et que $D(nt) = D_n D(t)$, on a enfin

$$P_\lambda(x) = \sum_{t\in\mathbb{T}_\mu} D(nt) = \sum_{t\in\mathbb{T}_\lambda} D(t)\ .$$

(β) *La partition λ est non-pointue de poids n.* Notons $\mathbb{P}(\lambda)$ l'ensemble des partitions pointues $\mu \subset \lambda$ telles que $l(\mu) = l(\lambda)$ et telles que μ a une seule part égale à 1.

Soit $\mu \in \mathbb{P}(\lambda)$; on note $\mathbb{T}_{\lambda\backslash\mu}$ l'ensemble des tous les tableaux gauches de forme $\lambda\backslash\mu$, de contenu $\{|\mu|+1, |\mu|+2, \ldots, n\}$ et de première lettre $|\mu|+1$. Posons $x = t_{l,2}$; alors la bijection $t \mapsto (t|_{x-1}, t|_{[x,n]})$ entraîne les relations suivantes :

$$(C) \qquad \mathbb{T}_\lambda = \sum_{\mu\in\mathbb{P}(\lambda)} \mathbb{T}_\mu \otimes \mathbb{T}_{\lambda\backslash\mu}\ ;$$

$$(D) \qquad \overline{\mathbb{T}}_\lambda = \sum_{\mu\in\mathbb{P}(\lambda)} \overline{\mathbb{T}}_\mu \otimes \mathbb{T}_\lambda\ ;$$

Puisque $\mathrm{pre}(t\otimes s) = \mathrm{pre}\, t$ et $D(t\otimes s) = D(t)$ pour tout $t \in \mathbb{T}_\mu$ et $s \in \mathbb{T}_{\lambda\backslash\mu}$, on a enfin

$$\begin{aligned} P_\lambda(x) &= \sum_{\mu\in\mathbb{P}(\lambda)} P_\mu(x)(\#\mathbb{T}_{\lambda\backslash\mu}) && \text{(par } (C)) \\ &= \sum_{\mu\in\mathbb{P}(\lambda)} \sum_{t\in\overline{\mathbb{T}}_\mu} D(t)(\#\mathbb{T}_{\lambda\backslash\mu}) && \text{(par l'hypothèse de récurrence)} \\ &= \sum_{\mu\in\mathbb{P}(\lambda)} \sum_{t\otimes s\in\overline{\mathbb{T}}_\mu\otimes\mathbb{T}_{\lambda\backslash\mu}} D(t\otimes s) \\ &= \sum_{t\in\overline{\mathbb{T}}_\lambda} D(t) \quad . \ \square && \text{(par } (D)) \end{aligned}$$

Par exemple, le schéma suivant montre le calcul de $P_{3211}(x)$.

$$\begin{array}{lccccccc}
 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 & x^5 & x^6 & x^7 \\
D_1 & 1 & & & & & & \\
 & \searrow & & & & & & \\
D_3{+}D_4 & & 1{+}1 & \to\ 1{+}1 & \to\ 1 & & & \\
 & & \searrow & \searrow & \searrow & & & \\
D_6 & & & 2 & \to\ 4 & \to\ 5 & \to\ 5 & \\
 & & & \searrow & \searrow & \searrow & \searrow & \\
D_7 & & & & 2 & \to\ 6 & \to\ 11 & \to\ 16
\end{array}$$

D'où $P_{3211}(x) = D_7D_6D_3D_1{*}1{+}D_7D_6D_4D_1{*}1 = 2x^4{+}6x^5{+}11x^6{+}16x^7$.

6. Démonstration combinatoire du théorème 2.1

Soient t un tableau de forme λ et $\mu \subset \lambda$ une partition contenue dans λ, on note $t|_\mu$ le tableau standard de forme μ obtenu en enlevant les lettres de t contenues dans la forme gauche $\lambda\backslash\mu$ et en appliquant ensuite la réduction Ω au tableau résultant.

Soient $p = \operatorname{pre} t$ et $m = |\lambda|$; on considère les deux ensembles suivants :

$$\mathbb{T}_{t1^n} = \left\{ s \in \mathbb{T}_{\lambda 1^n} \ : \ s|_\lambda = t \right\}$$

et

$$\mathbb{S}(t;n) = \left\{ \alpha = (\alpha_p, \alpha_{p+1}, \cdots, \alpha_m) \ : \ \alpha_i \geq 0, \ \sum_{p \leq i \leq m} \alpha_i = n \right\} .$$

Lemme 6.1. — *Il existe une bijection ψ entre les deux ensembles* :

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{S}(t;n) & \xrightarrow{\quad\psi\quad} & \mathbb{T}_{t1^n} \\
\alpha = (\alpha_p, \alpha_{p+1}, \cdots, \alpha_m) & \longmapsto & s
\end{array}$$

Construction de ψ. — On considère le mot $w = m+n, m+n-1, \cdots, p+2, p+1$ et à l'élément $\alpha \in \mathbb{S}(t;n)$, on associe la décomposition de w définie par

$$w = w_m x_m w_{m-1} x_{m-1} \ldots x_{p+1} w_p$$

où chaque x_i est une lettre et où chaque w_i est un mot de longueur $|w_i| = \alpha_i$ $(i = m, m-1, \cdots, p)$.

On pose alors

$$s = w_m w_{m-1} \dots w_p . s'$$

où s' est un tableau tel que $\Omega(s') = s|_\lambda = t$. □

Par exemple, si on prend $t = \begin{smallmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \end{smallmatrix}$, on a $p = 3$ et $m = 6$. On peut prendre

$$\alpha = (\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6) = (0, 2, 0, 3) \ ;$$

ainsi, $n = 5, m + n = 11$. La décomposition

$$(11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4) = (11, 10, 9)8()7(6, 5)4()$$

donne le tableau $s = 11.10.9.6.5.s'$. On écrit alors

$$s = \begin{smallmatrix} 11 \\ 10 \\ 9 \\ 6 \\ 5 \\ 3 & 4 \\ 1 & 2 & 7 & 8 \end{smallmatrix}$$

La fonction génératrice

$$G_t(z) = \sum_{n \geq 0} \big(\#\mathbb{T}_{t1^n}\big) z^n$$

se calcule alors comme suit. Par le lemme précédent, on a

$$\begin{aligned} G_t(z) &= \sum_{n \geq 0} \big(\#\mathbb{S}(t; n)\big) z^n \\ &= \sum z^{\alpha_p + \alpha_{p+1} + \dots + \alpha_m} \qquad (\alpha_p, \alpha_{p+1}, \dots, \alpha_m \geq 0) \\ &= \frac{1}{(1-z)^{m-p+1}} = \frac{(1-z)^p}{(1-z)^{m+1}} \ ; \end{aligned}$$

de là

$$G_\lambda(z) = \sum_{t \in \mathbb{T}_\lambda} G_t(z) = \frac{P_\lambda(1-z)}{(1-z)^{m+1}}.$$

Ceci constitue une seconde démonstration du théorème 2.1.

7. Cas où q est général

Rappelons que si t est un tableau standard de forme λ de poids m écrit canoniquement suivant une ligne

$$(\star\star) \qquad t = x_1 x_2 \cdots x_m \quad (= t_{l,1} \cdots t_{1,\lambda_1}) \ ,$$

la *charge* de chaque lettre x_i est définie comme suit : d'abord la charge $\mathrm{ch}(1)$ de la lettre 1 est zéro ; pour $i \geq 1$, la charge $\mathrm{ch}(i+1)$ de la lettre $(i+1)$ est égale à $\mathrm{ch}(i)$, si $(i+1)$ est à la gauche de i, et vaut $\mathrm{ch}(i)+1$, si $(i+1)$ est à la droite de i. La charge $\mathrm{ch}(t)$ du tableau t est alors définie comme la somme de tous les $\mathrm{ch}(i)$: $\mathrm{ch}(t) = \sum_i \mathrm{ch}(i)$. Ainsi le tableau $t = \begin{smallmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \end{smallmatrix}$ s'écrit $t = 246135$. Les charges de ses lettres sont : $\mathrm{ch}(1) = \mathrm{ch}(2) = 0$; $\mathrm{ch}(3) = \mathrm{ch}(4) = 1$; $\mathrm{ch}(5) = \mathrm{ch}(6) = 2$. D'où $\mathrm{ch}(t) = 6$. On note $p = \mathrm{pre}\, t$ la première lettre de t et $c = \mathrm{ch}(p)$ la charge de la première lettre p dans le tableau t. Le polynôme de Kostka-Foulkes pour les tableaux standard est donc

$$K_\lambda(q) = \sum q^{\mathrm{ch}\, t} \quad (t \in \mathbb{T}_\lambda) \ .$$

Soit q une variable, les évaluations naturelles sur les ensembles $\mathbb{T}_{t1^n}$ et $\mathbb{S}(t;n)$ sont données par

$$\mathrm{Ev}\, 1(s) = q^{\mathrm{ch}(s)} z^n \quad (s \in \mathbb{T}_{t1^n}) \, ;$$

et

$$\mathrm{Ev}\, 2(\alpha) = (zq^c)^{\alpha_p} (zq^{c+1})^{\alpha_{p+1}} \cdots (zq^{m+c-p})^{\alpha_m} q^{\mathrm{ch}(t)} \quad (\alpha \in \mathbb{S}(t;n)) \ .$$

Notre problème est évidemment de calculer la fonction génératrice de $\mathbb{T}_{t1^n}$ pour cette évaluation. Bien que la bijection ψ soit naturelle, elle ne conserve malheureusement pas l'évaluation. En général, on a

$$\mathrm{Ev}\, 2(\alpha) \neq \mathrm{Ev}\, 1\big(\psi(\alpha)\big) \ .$$

Il est cependant tout à fait étonnant que les fonctions génératrices de $\mathbb{T}_{t1^n}$ et de $\mathbb{S}(t;n)$ sont identiques, comme décrit dans le théorème suivant :

Théorème 7.1. — *Posont* $K_{t1^n}(q) = \sum_s q^{\mathrm{ch}\, s}$ $(s \in \mathbb{T}_{t1^n})$; *alors*

$$\sum_{n \geq 0} K_{t1^n}(q) z^n = \frac{q^{\mathrm{ch}\, t}}{(1-zq^c)(1-zq^{c+1}) \cdots (1-zq^{m+c-p})} \cdot$$

Ainsi, la fonction génératrice $\sum_{n\geq 0} K_{\lambda 1^n}(q)z^n$ peut être calculée par la relation $K_{\lambda 1^n}(q) = \sum_{t\in\mathbb{T}_\lambda} K_{t1^n}(q)$. Par exemple, pour $\lambda = 33, m = 6$, on a le tableau suivant :

t	$\begin{smallmatrix}2&4&6\\1&3&5\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}2&5&6\\1&3&4\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}3&5&6\\1&2&4\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}3&4&6\\1&2&5\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}4&5&6\\1&2&3\end{smallmatrix}$
p	2	2	3	3	4
c	0	0	1	1	2
$\mathrm{ch}(t)$	6	8	9	10	12

D'où

$$\sum_{n\geq 0} K_{331^n} z^n = \frac{q^{12}}{(1-zq^2)(1-zq^3)(1-zq^4)} + \frac{q^9+q^{10}}{(1-zq)(1-zq^2)(1-zq^3)(1-zq^4)} + \frac{q^6+q^8}{(1-z)(1-zq)(1-zq^2)(1-zq^3)(1-zq^4)}.$$

La démonstrastion de ce théorème est basée sur une bijection θ sur l'ensemble $\mathbb{S}(t;n)$ telle que $\mathrm{Ev}\,2\big(\theta(\alpha)\big) = \mathrm{Ev}\,1\big(\psi(\alpha)\big)$; ainsi, les fonctions génératrices sont identiques. Pour la facilité de la déscription de l'algorithme et de l'exemple, on préfère cependant travailler dans un autre modèle décrit ci-après.

Soient p et m deux entiers tels que $p \leq m$. Une *R-suite* est définie comme une suite $(p, p+1, \cdots, m-1, m)$ dans laquelle *certains* entiers consécutifs sont dits en relation. On écrira $i \sim (i+1)$, si la relation existe et $i \;\; (i+1)$ (ou $i \not\sim (i+1)$) si la relation n'existe pas. Cette R-suite peut être réprésentée par $A = [p..m; R(A)]$ où $R(A)$ est un sous-ensemble de $[p..(m-1)]$ et $i \in R(A)$ si $i \sim i+1$. Par exemple, $A_e = (1 \sim 2 \sim 3 \sim 4 \;\; 5 \;\; 6 \sim 7 \sim 8) = [1..8; \{1,2,3,6,7\}]$ est une R-suite.

Pour un entier c, on définit une fonction appelée *charge* pour chaque lettre de toute R-suite $A = [p..m; R(A)]$ par :

1) $\mathrm{ch}^c p = c$;

2) pour $p \leq i \leq m-1$,

$$\mathrm{ch}^c(i+1) = \begin{cases} \mathrm{ch}^c i & \text{si } i \sim i+1\,; \\ \mathrm{ch}^c i + 1 & \text{si } i \not\sim i+1\,. \end{cases}$$

et on pose

$$\mathrm{ch}^c A = \sum_{i=p}^{m} \mathrm{ch}^c i \ .$$

Par exemple, pour $c = 0$, on a

A_e	$=1$	$\sim$	2	$\sim$	3	$\sim$	4	5	6	$\sim$	7	$\sim$	8
$\mathrm{ch}^c i$	$=0$		0		0		0	1	2		2		2

et on a $\mathrm{ch}^c(A_e) = (4,1,3) * {}^t(0,1,2) = 7$.

On définit ensuite la *charge avec multiplicités* de la façon suivante. Soit $\alpha = (\alpha_p, \alpha_{p+1}, \cdots, \alpha_m)$ une suite d'entiers positifs ; on pose :

1) $\mathrm{ch}^c(p;\alpha) = c$;

2) pour $p \le i \le m-1$,

$$\mathrm{ch}^c(i+1;\alpha) = \begin{cases} \mathrm{ch}^c(i;\alpha) & \text{si } i \sim i+1 \text{ et } \alpha_i = 0\,; \\ \mathrm{ch}^c(i;\alpha)+1 & \text{sinon .} \end{cases}$$

et on pose

$$\mathrm{ch}^c(A;\alpha) = \sum_{i=p}^{m} (1+\alpha_i)\mathrm{ch}^c(i;\alpha) \ .$$

Par exemple, avec $c = 0$, on a

A_e	$=1$	$\sim$	2	$\sim$	3	$\sim$	4	5	6	$\sim$	7	$\sim$	8
α_e	$=2$		0		0		3	0	2		1		2
$\mathrm{ch}^c i$	$=0$		1		1		1	2	3		4		5

et on a $\mathrm{ch}^c(A_e;\alpha_e) = (3,6,1,3,2,3) * {}^t(0,1,2,3,4,5) = 40$.

La relation entre les tableaux et les R-suites sont comme suit : soit t un tableau de poids m. Si $p = \mathrm{pre}\, t$ et $c = \mathrm{ch}\, p$, on lui associe une R-suite définie par

$$A(t) = [p..m; R(A(t))]$$

où $i \sim i+1$ si $i+1$ est à la droite de i sous l'écriture $(\star\star)$. Evidemment, on a

$$\mathrm{ch}(t) = \sum_{i \le p-1} \mathrm{ch}(i) + \mathrm{ch}^c(A(t)).$$

De plus, soient $s \in \mathbb{T}_{t1^n}$ un tableau et $\psi^{-1}(s) = \alpha$, alors on a

$$\mathrm{ch}(s) = \sum_{i \leq p-1} \mathrm{ch}(i) + \mathrm{ch}^c(A(t); \alpha).$$

Ainsi, le théorème 7.1 est garanti par le théorème suivant :

THÉORÈME 7.1′. — *Pour toute R-suite A, on a*

$$\sum_{\alpha} q^{\mathrm{ch}^c(A;\alpha)} z^{|\alpha|} = \frac{q^{\mathrm{ch}^c A}}{(1 - zq^c)(1 - zq^{c+1}) \cdots (1 - zq^{c+m-p})}.$$

DÉMONSTRATION. — Comme le membre de droite vaut

$$\sum_{\beta} q^{\mathrm{ch}^c A + \sum_{i=p}^{m} (c+i-p)\beta_i} z^{|\beta|} \ ,$$

il nous suffit de construire une bijection θ sur l'ensemble des suites étant donné la R-suite A :

$$\theta \ : \ (A, \alpha) \longmapsto (A, \beta)$$

satisfaisant la condition suivante :

$$(R) \qquad \mathrm{ch}^c(A; \alpha) = \mathrm{ch}^c A + \sum_{i=p}^{m} (c + i - p)\beta_i \ .$$

CONSTRUCTION DE θ. — Pour obtenir cette suite β, on construit une chaîne de suite

$$(\beta^m, \beta^{m-1}, \cdots, \beta^{p+1}, \beta^p)$$

de la façon suivante :

1) $l(\beta_i) = m + 1 - j$;

2) $\beta^m = (\alpha_m)$, $\beta = \beta^p$;

3) Si $\beta^{i+1} = (x_{i+1}, x_{i+2}, \cdots, x_{m-1}, x_m)$, on pose

$$\beta^i = \begin{cases} (\alpha_i - 1, x_{i+1}, x_{i+2}, \cdots, x_{m-1}, x_m + 1), & \text{si } i \sim i+1 \text{ et } \alpha_i \geq 1 ; \\ (\beta^{i+1}, 0), & \text{si } i \sim i+1 \text{ et } \alpha_i = 0 ; \\ (\alpha_i, \beta^{i+1}), & \text{si } i \not\sim i+1 \ . \end{cases}$$

On peut vérifier, par récurrence sur le poids de α, que cela définit bien une bijection et que la relation (R) est satisfaite . Par exemple :

A_e	=	1	$\sim$	2	$\sim$	3	$\sim$	4	5	6	$\sim$	7	$\sim$	8
α_e	=	2		0		0		3	0	2		1		2
β^8	=													2
β^7	=											0		3
β^6	=									1		0		4
β^5	=								0	1		0		4
β^4	=							3	0	1		0		4
β^3	=					3		0	1	0		4		0
β^2	=			3		0		1	0	4		0		0
β^1	=	1		3		0		1	0	4		0		1
β	=	1		3		0		1	0	4		0		1

et on a

$$\begin{aligned}\sum(i-1)\beta_i &= (1,3,0,1,0,4,0,1) * {}^t(0,1,2,3,4,5,6,7) = 33\\ &= \mathrm{ch}^c(A_e;\alpha_e) - \mathrm{ch}^c(A_e)\ .\end{aligned}$$

8. La limite de Gupta

On écrit le théorème 7.1. sous la forme :

$$\sum_{n\geq 0} K_{t1^n}(q)z^n = \frac{q^{\mathrm{ch}\,t}}{(zq^c;q)_{m-p+1}} = q^{\mathrm{ch}\,t}\frac{(zaq^c;q)_\infty}{(zq^c;q)_\infty},$$

où $(u,q)_n = (1-u)(1-uq)(1-uq^2)\cdots(1-uq^{n-1})$ pour $n \geq 1$ et $a = q^{m-p+1}$.

Par le théorème q-binomial, on a

$$K_{t1^n}(q) = q^{\mathrm{ch}\,t}q^{cn}\frac{(a;q)_n}{(q;q)_n}.$$

Remarquons que si t est un tableau telle que $c = \mathrm{ch}\,p \geq 1$, on obtient la limite $\lim_{n\to\infty} K_{t1^n}(q) = 0$. On considère donc $\mathbb{T}^0_\lambda$ l'ensemble des tableaux t de forme λ telle que $c = \mathrm{ch}\,p = 0$ $\big($ou bien la première colonne de t est la suite $(l(\lambda), l(\lambda)-1, \cdots, 3, 2, 1)$ $\big)$. Soit t un tel tableau, on a

$$\lim_{n\to\infty} K_{t1^n}(q) = \lim_{n\to\infty} q^{\mathrm{ch}\,t}\frac{(a;q)_n}{(q;q)_n} = \frac{q^{\mathrm{ch}\,t}}{(q;q)_{m-p}}.$$

D'où

$$\lim_{n\to\infty} K_{t1^n}(q) = \frac{1}{(q;q)_{|\lambda|-l(\lambda)}} \sum_{t\in\mathbb{T}_\lambda^0} q^{\mathrm{ch}\, t}.$$

Ainsi, on a démontré le corollaire suivant :

Corollaire 8.1. — *On a*

$$\lim_{n\to\infty} K_{\lambda 1^n}(q) = \frac{q^{|\lambda^-|}}{(q;q)_{|\lambda^-|}} K_{\lambda^-}(q)\ .$$

où la partition λ^- est obtenue par supression de la première colonne de la partition λ, autrement dit : $\lambda^- = (\lambda_1 - 1, \lambda_2 - 1, \cdots, \lambda_l - 1)$. □

Par exemple, pour $\lambda = 33$, alors $\lambda^- = 22$, et on a donc

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} K_{\lambda 1^n}(q) &= \frac{q^4}{(q;q)_4} K_{22}(q) = \frac{q^4}{(q;q)_4}(q^2+q^4)\\ &= q^6 + q^7 + 3q^8 + 4q^9 + 7q^{10} + 9q^{11} + 14q^{12} + \cdots\ .\end{aligned}$$

Voici les premières polynômes de $K_{\lambda 1^n}(q)$ qui vérifient cette limite :

$$\begin{aligned}K_{33}(q) &= q^6 + q^8 + q^9 + q^{10} + q^{12},\\ K_{331}(q) &= q^6 + q^7 + 2q^8 + 2q^9 + 3q^{10} + 3q^{11} + 3q^{12} + \cdots,\\ K_{331^2}(q) &= q^6 + q^7 + 3q^8 + 3q^9 + 5q^{10} + 5q^{11} + 7q^{12} + \cdots,\\ K_{331^3}(q) &= q^6 + q^7 + 3q^8 + 4q^9 + 6q^{10} + 7q^{11} + 10q^{12} + \cdots,\\ K_{331^4}(q) &= q^6 + q^7 + 3q^8 + 4q^9 + 7q^{10} + 8q^{11} + 12q^{12} + \cdots,\\ K_{331^5}(q) &= q^6 + q^7 + 3q^8 + 4q^9 + 7q^{10} + 9q^{11} + 13q^{12} + \cdots,\\ K_{331^6}(q) &= q^6 + q^7 + 3q^8 + 4q^9 + 7q^{10} + 9q^{11} + 14q^{12} + \cdots.\end{aligned}$$

BIBLIOGRAPHIE

[Gup] G. Gupta. — Problem No. 9, in *Combinatorics and Algebra* [C. Greene, éd. 1984], p. 310. — *Contemporary Mathematics*, vol. 34.

[Han] G.-N. Han. — Croissance des polynômes de Kostka, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. **311, série I**, 1990, p. 269-272.

[Knu] D.-E. Knuth. — *The Art of Computer Programming, vol.3, Sorting and Searching*. — Don Mills, Ontario, Addison-Wesley, 1972.

[LS1] A. Lascoux et M.-P. Schützenberger. — Le monoïde plaxique, *Non-commutative structures in Algebra and Geometric Combinatorics* [A. De Luca, éd. Napoli. 1978], p. 129-156.

[LS2] A. Lascoux et M.-P. Schützenberger. — Croissance des polynômes de Foulkes-Green, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. **288, série A**, 1979, p. 95-98.

[LS3] M.-P. Schützenberger. — Propriétés nouvelles des tableaux de Young, *Séminaire Delange-Pisot-Poitou*, 19^e année, 1977/1978, n°26.

[Mac] I.-G. Macdonald. — *Symmetric functions and Hall polynomials*. — Oxford, Clarendon Press, 1979.

CHAPITRE 3

SYMÉTRIES TRIVARIÉES SUR LES NOMBRES DE GENOCCHI

RÉSUMÉ. — Dumont [Dum] a donné une interprétation des nombres de Genocchi en termes de comptages d'applications excédantes et surjectives de l'intervalle $[2n]$ sur le sous-ensemble des entiers pairs $2[n]$. Dans cet article, on propose une méthode nouvelle pour bâtir une famille plus étendue d'interprétations combinatoires de ces mêmes nombres contenant en particulier la précédente. Les nouvelles interprétations ont toutes la propriété de symétrie qu'avaient établie pour la première fois Dumont et Foata [DumFoa]. Enfin, une propriété de symétrie pour la statistique trivariée nombres de points "maximaux", "fixes" et "surfixes" est établie pour la première fois.

ABSTRACT. — Dumont [Dum] has given an interpretation of the Genocchi numbers by showing that they counted the excedent and surjective mappings of the interval $[2n]$ onto the subset $2[n]$ of the even integers. In the present paper a new method is proposed that yields a larger family of combinatorial interpretations of those numbers. The symmetry property of Dumont's interpretation also holds for that new family. Finally another symmetry property is derived for the trivariate statistic number of "maxima", "fixed" and so-called "surfixed" points.

1. Introduction et Notations

Les nombres de Genocchi $(G_{2n})_{n\geq 1}$ peuvent être définis par la fonction génératrice exponentielle :

$$G(t) = \frac{2t}{e^t + 1} = t + \sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} G_{2n},$$

les premières valeurs étant reproduites dans le tableau suivant :

n	1	2	3	4	5	6	7
G_{2n}	1	1	3	17	155	2073	38227

Depuis Dumont[Dum], on connaît plusieurs interprétations combinatoires de ces nombres, reposant sur le théorème suivant :

THÉORÈME 1.1 (DUMONT). — *Notons A_n l'ensemble de toutes les applications excédantes (i.e. pour tout i, $f(i) \geq i$) définies sur $[2n]$ et surjectives sur $2[n]$. Alors, $|A_n| = G_{2n+2}$.* □

Dumont et Foata [DumFoa] ont donné un raffinement de ce théorème. Soient f une application appartenant à A_n et i un élément de $[2n-2]$, on dit que i est un *point saillant* de f, si

$$1 \leq k < i \quad \text{implique} \quad f(k) < f(i) < 2n;$$

un *point fixe* si $f(i) = i$; et un *point maximal* si $f(i) = 2n$. On désigne par $\mathrm{sai}(f)$ (resp. $\mathrm{fix}(f)$, $\max(f)$) le nombre de points saillants (resp. fixes et maximaux) de l'application f.

THÉORÈME 1.2 (DUMONT-FOATA). — *Pour tout entier $n \geq 1$, soit $F_n(x, y, z)$ la fonction génératrice du vecteur* $(\max, \mathrm{fix}, \mathrm{sai})$ *sur A_n, c'est-à-dire,*

$$\sum_{f \in A_n} x^{\max(f)} y^{\mathrm{fix}(f)} z^{\mathrm{sai}(f)} = F_n(x, y, z).$$

Alors la suite des polynômes $(F_n(x, y, z))_{n \geq 0}$ est caractérisée par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 1; \\ F_n(x, y, z) = (x + y)(x + z)F_{n-1}(x + 1, y, z) - x^2 F_{n-1}(x, y, z) \ (n \geq 2). \end{cases}$$

D'après le théorème 1.1, on a, en particulier,

$$F_n(1, 1, 1) = |A_n| = G_{2n+2}. \tag{1.1}$$

Les premières valeurs des polynômes $F_n(x, y, z)$ sont données par :

$$\begin{aligned} F_1(x, y, z) =& 1; \\ F_2(x, y, z) =& xy + xz + yz; \\ F_3(x, y, z) =& x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 + 2x^2yz + 2xy^2z + 2xyz^2 \\ & + x^2y + x^2z + xy^2 + y^2z + xz^2 + yz^2 + 2xyz. \end{aligned}$$

On peut vérifier que pour tout $n \geq 1$, le polynôme $F_n(x, y, z)$ est *symétrique* en les trois variables x, y, z ; ou encore, que la distribution des *statistiques* "max", "fix", et "sai" est symétrique. Pour expliquer cette symétrie, Dumont et Foata [DumFoa] avaient construit des involutions

sur A_n qui mettaient en évidence cette propriété. Leur construction était cependant indirecte. Le problème qui reste ouvert est de trouver un modèle dans lequel cette symétrie apparaît de façon immédiate.

Notre but ici n'est pas de fournir ce modèle symétrique, mais de montrer qu'en réalité le modèle des applications excédantes surjectives recèle plusieurs autres symétries, dont l'une d'entre elles est fournie par le résultat de Dumont-Foata. Il est commode de visualiser les applications excédantes de $[2n]$ dans $2[n]$ comme étant des parties de l'ensemble $\{(i, 2j) \mid 1 \leq i \leq 2j \leq 2n\}$ qu'on appellera *escalier (ordinaire) pair* d'ordre $2n$. Dumont et Foata considéraient les seules applications *surjectives* contenues dans cet escalier. On peut, en fait, introduire d'autres familles de configurations qui ont les mêmes propriétés. On aboutit ainsi au théorème 2.1, qui constitue le résultat principal de cet article. Chaque famille est indicée par un vecteur $U = (U_1, U_2, \cdots, U_{n-1})$ dont les éléments sont pris dans un alphabet à trois lettres $\{\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}\}$. Lorsqu'on spécialise la suite U à une $(n-1)$-suite dont tous les termes sont égaux à X, la famille correspondante est simplement A_n. On est amené à introduire une nouvelle statistique sur les éléments f de A_n, qui compte les points *surfixes*, c'est-à-dire les points i tels que $1 \leq i \leq 2n-2$ et $f(i) = i+1$. On établit alors (cf. section 3).

Théorème 1.3. — *La statistique* $(\max, \mathrm{fix}, \mathrm{sur})$ *a pour fonction génératrice sur* A_n *le polynôme* $F_n(x, y, z)$.

Lorsque $U = (Y, Y, \cdots, Y)$, la famille de configurations est toujours A_n, mais le triplet de statistique devient $(\mathrm{sur}, \max, \mathrm{fix})$ (dans cet ordre). Comme la symétrie entre "sur" et "fix" est simple (voir section 4), on obtient la propriété de symétrie du triplet $(\max, \mathrm{fix}, \mathrm{sur})$ sur A_n.

En comparant les énoncés des théorèmes 1.2 et 1.3, on voit qu'il doit exister une bijection de A_n sur A_n envoyant le triplet (max, fix, sai) sur (max, fix, sur). En fait, on construit ici (cf. théorème 4.2) une *involution* $f \mapsto \hat{f}$ sur A_n ayant ces mêmes propriétés.

2. Les applications exédantes U-surjectives

Une application V définie sur l'escalier pair d'ordre $2n$, dans l'ensemble $\{0, 1, x, y, z\}$ est appelée *évaluation*. Les lettres x, y, z sont des variables commutatives et il sera commode de dire par la suite que y (resp. z, x) est le *successeur* de x (resp. y, z). On écrit, par exemple, $y = \mathrm{succ}\, x$ et aussi $z = \mathrm{succ} * \mathrm{succ}\, x$. Soit alors $U = (U_1, U_2, \cdots, U_{n-1})$ une suite dont les termes sont pris dans l'ensemble $\{\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}\}$. On lui associe une évaluation, notée V^U, de l'escalier pair défini par les relations suivantes :

1) $V^U(2n-1,2n) = V^U(2n,2n) = 1$;
2) $V^U(2i-1,2n) = V^U(2i,2n) = U_i$ pour $1 \leq i \leq n-1$;
3) $V^U(2i,2i) = \mathrm{succ}(U_i)$, $V^U(2i-1,2i) = \mathrm{succ} * \mathrm{succ}(U_i)$ pour $1 \leq i \leq n-1$;
4) pour $1 \leq i \leq n-1$ et $i+1 \leq j \leq n-1$,

$$V^U(i,2j) = \begin{cases} 1, & \text{si l'ensemble formé par la ligne } \textit{et} \\ & \text{la colonne passant par le point } (i,2j) \\ & \text{contient les trois lettres } x,y,z\,; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par exemple, pour $n = 7$ et $U = (\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{X},\mathrm{X},\mathrm{Z},\mathrm{Y})$, l'évaluation V^U peut être représentée par le diagramme suivant (les lettres représentant l'évaluation s'écrivent en minuscules) :

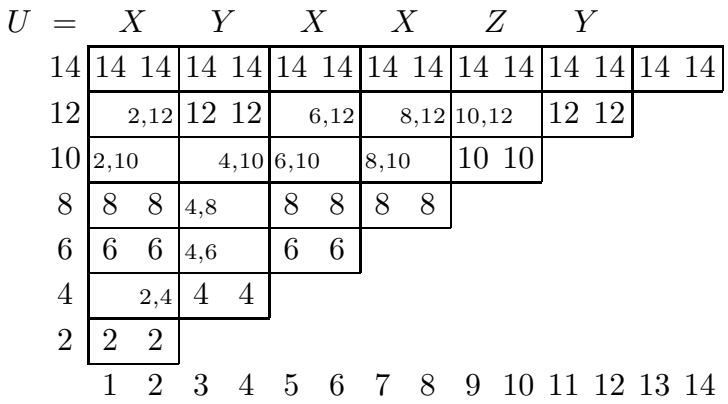
$U =$	X		Y		X		X		Z		Y			
14	x	x	y	y	x	x	x	x	z	z	y	y	1	1
12	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	x	z		
10	1	0	0	1	1	0	1	0	y	x				
8	1	1	1	0	1	1	z	y						
6	1	1	1	0	z	y								
4	0	1	x	z										
2	z	y												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Escalier pair d'ordre 14 U-évalué

Les conditions 3) et 4) ci-dessus entraînent que les double-cases $\big((2i-1,2j),(2i,2j)\big)$ $(2 \leq i+1 \leq j \leq n-1)$ ne sont jamais d'évaluation $(0,0)$. Elles sont forcément d'évaluation $(0,1),(1,0)$ ou $(1,1)$.

Pour chaque $i = 1,2,\cdots,n$, il est commode de désigner par B^U_{2i} le sous-ensemble de l'escalier pair d'ordre $2n$ constitué par les points de la *ligne* $2i$ d'évaluation *non nulle*, ainsi que par les points $(2i-1,2j)$ (resp. $(2i,2j)$) de la colonne $(2i-1)$ (resp. $2i$), dont la case adjacente $(2i,2j)$ (resp. $(2i-1,2j)$) est nulle $(2 \leq i+1 \leq j \leq n-1)$.

Par exemple, en reprenant la suite U précédente, les ensembles B_{2i}^U sont les cases de l'escalier ci-dessous portant le numéro $2i$. (Noter que certaines cases ont deux numéros, les bandes B_{2i}^U n'étant pas nécessairement disjointes deux à deux.)



Escalier pair d'ordre 14 U-numéroté

Pour ne pas confondre avec la notion d'escalier pair évalué, on dit qu'un tel escalier pair est *U-numéroté*.

Soit $\overline{A}_n$ l'ensemble des applications f excédantes de $[2n]$ sur $2[n]$ (non nécessairement surjectives), ou encore l'ensemble des configurations de $2n$ points contenues dans l'escalier pair d'ordre $2n$ ayant exactement un point dans chaque colonne.

L'escalier pair *U-évalué* sert à donner une *évaluation* $V^U(f)$ à chaque f. On pose en effet

$$V^U(f) = \prod_{i\in[2n]} V^U(i, f(i)).$$

L'escalier pair *U-numéroté* sert à définir la notion de *U-surjectivité*. On dit, en effet, qu'une application f appartenant à $\overline{A}_n$ est *U-surjective*, si pour tout i $(1 \leq i \leq n)$, il existe au moins un point $k \in [2n]$ tel que $(k, f(k)) \in B_{2i}^U$. Autrement dit, f est U-surjective, si, lorsqu'on superpose son graphe sur l'escalier pair U-numéroté, on trouve au moins une fois les numéros $2, 4, \cdots, 2n$ sur les cases occupées par les points du graphe de f. On note A_n^U l'ensemble de toutes les applications f U-surjectives d'évaluation $V^U(f)$ *non nulle*. Soit $i \in [2n]$; on dit que i est un point *U-maximal*, si $V^U\big(i, f(i)\big) = x$, que c'est un point *U-fixe*, si $V^U\big(i, f(i)\big) = y$ et

qu'enfin c'est un point *U-surfixe*, si $V^U\big(i, f(i)\big) = z$. On note $\max^U f, \mathrm{fix}^U f$ et $\mathrm{sur}^U f$, respectivement, le nombre de points U-maximaux, U-fixes et U-surfixes de f. Si $V^U(f) \neq 0$, on a naturellement

$$V^U(f) = x^{\max^U(f)} y^{\mathrm{fix}^U(f)} z^{\mathrm{sur}^U(f)}.$$

On peut alors énoncer notre théorème principal :

THÉORÈME 2.1. — *Pour toute suite* $U = (U_1, U_2, \cdots, U_{n-1})$, *la fonction génératrice du vecteur* $(\max^U,\ \mathrm{fix}^U,\ \mathrm{sur}^U)$ *sur* A_n^U *est indépendante de* U *et égale à*

$$\sum_{f \in A_n^U} V^U(f) = F_n(x, y, z).$$

En particulier,

$$|A_n^U| = F_n(1, 1, 1) = G_{2n+2}. \tag{2.1}$$

La figure suivante représente, par exemple, deux escaliers pairs d'ordre 6, U-évalués et U-numérotés comme indiqué.

U =	X		Y			
6	x	x	y	y	1	1
4	0	1	x	z		
2	z	y				
	1	2	3	4	5	6

U =	X		Y			
6	6	6	6	6	6	6
4		2,4	4	4		
2	2	2				
	1	2	3	4	5	6

D'après (2.1) il y a donc $G_8 = 17$ applications appartenant à A_3^U. Leurs U-évaluations sont représentées dans ce qui suit. On vérifie bien que leur fonction génératrice est $F_3(x, y, z)$.

Application	:	224466	224666	226466	244466	244666	246466
Evaluation	:	$zyxz11$	$zyxy11$	$zyyz11$	$z1xz11$	$z1xy11$	$z1yz11$
Application	:	246666	264466	264666	266466	624466	624666
Evaluation	:	$z1yy11$	$zxxz11$	$zxxy11$	$zxyz11$	$xyxz11$	$xyxy11$
Application	:	626466	644466	644666	646466	646666	
Evaluation	:	$xyyz11$	$x1xz11$	$x1xy11$	$x1yz11$	$x1yy11$	

Noter que les applications $f = 644666$ et $g = 246666$ sont bien U-surjectives, puisque le point $(2, 4) \in B_2 \cap B_4$.

3. Démonstration du théorème 2.1

Un *escalier gauche* E d'ordre $2n$ est défini comme une suite d'entiers positifs $(E_1, E_2, \cdots, E_{2n})$ telle que

i) $E_{2i-1} = E_{2i}$ pour $1 \leq i \leq n$;

ii) $E_i - E_{i+1} = 0$ ou 1 pour $1 \leq i \leq 2n-1$;

iii) $E_{2n} = 1$.

On représente un tel escalier gauche comme un tableau de Young (à l'anglo-saxonne) ayant une profondeur égale à E_i à l'abscisse i. (Voir diagramme ci-dessous.) Par convention, les cases du tableau ainsi constitué sont repérées par les couples $(i, 2j)$ où $1 \leq i \leq 2n$ et $n - E_i + 1 \leq j \leq n$. Avec cette convention, un escalier gauche d'ordre $2n$ n'est donc rien d'autre qu'un *sous-ensemble* d'un escalier pair $\{(i, 2j) \mid 1 \leq i \leq 2j \leq 2n\}$ d'ordre $2n$, où les cases $(i, 2j)$ satisfont les inégalités $1 \leq i \leq 2n$ et $n - E_i + 1 \leq j \leq n$. En particulier, un escalier gauche d'ordre $2n$ contient toujours la *première ligne* $\{(i, 2n) \mid 1 \leq i \leq 2n\}$ de l'escalier pair.

On associe une *évaluation* V à l'escalier gauche E en donnant à chaque case $(i, 2j)$ une valeur prise dans l'alphabet $\{1, x, y, z\}$ selon les règles suivantes :

i) $(x, x, \cdots, x, x, 1, 1)$ pour la première ligne $\{(i, 2n) \mid 1 \leq i \leq 2n\}$;

ii) $(1, 1, \cdots, 1, 1, z, y)$ pour les autres lignes.

Notons que l'escalier gauche $(n, n, n-1, n-1, \cdots, 1, 1)$ n'est rien d'autre que l'escalier pair d'ordre $2n$ et que son évaluation V coïncide alors avec l'évaluation V^U de l'escalier pair U-évalué à l'aide de la suite $U = (X, X, \cdots, X)$.

On définit enfin la *signature* de E comme étant :

$$\operatorname{sgn}(E) = (-1)^{n-E_1}.$$

Par exemple, $E = (3, 3, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1)$ est un escalier gauche d'ordre 10; sa signature est $(-1)^2 = 1$. L'évaluation associée V peut être représentée par

$V =$

10	x	x	x	x	x	x	x	x	1	1
8	1	1	1	1	z	y				
6	z	y								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Notons $\mathcal{F}_E$ l'ensemble de toutes les applications f de $\overline{A}_n$ telles que

$f(i) \geq 2n - 2E_i + 2$, (i.e., telles que tous les points $(i, f(i))$ soient dans le diagramme de E). L'évaluation V de E induit alors une évaluation de f définie par

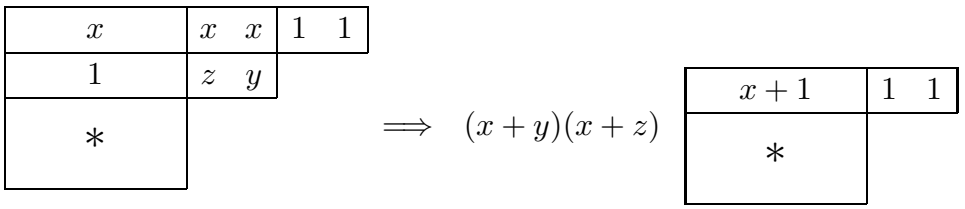
$$V(E; f) = \mathrm{sgn}(E) \prod_{i \in [2n]} V(i, f(i)).$$

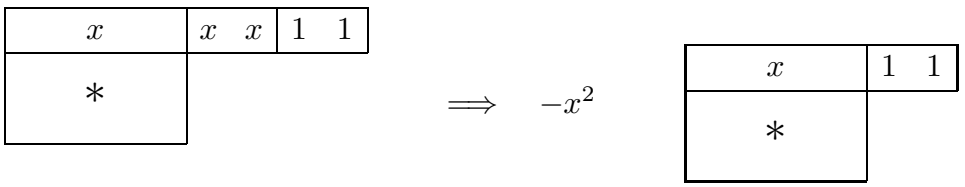
Lemme 3.1. — *On a*

$$F_n(x, y, z) = \sum_E \sum_{f \in \mathcal{F}_E} V(E; f),$$

où la première somme est sur l'ensemble de tous les escaliers gauches d'ordre $2n$.

Démonstration. — Le seul escalier gauche possible d'ordre 2 est $(1, 1)$; le lemme est donc vrai pour $n = 1$. Pour $n \geq 2$, on décompose l'ensemble $\mathcal{E}_{2n}$ des escaliers gauches en deux sous-classes $\mathcal{E}^1_{2n}$ et $\mathcal{E}^2_{2n}$ distinctes : on pose $E \in \mathcal{E}^1_{2n}$, si $E_{2n-2} = 2$ et $E \in \mathcal{E}^2_{2n}$, si $E_{2n-2} = 1$. Les diagrammes suivants donnent la clé de la démonstration du lemme.





Le premier diagramme, par exemple, montre que tout escalier gauche E d'ordre $2n$ tel que $E_{2n-2} = 2$ est envoyé sur un escalier gauche E' d'ordre $(2n - 2)$ donné par $E' = (E_1 - 1, E_2 - 1, \cdots, E_{2n-5} - 1, E_{2n-4} - 1, E_{2n-1}, E_{2n})$.

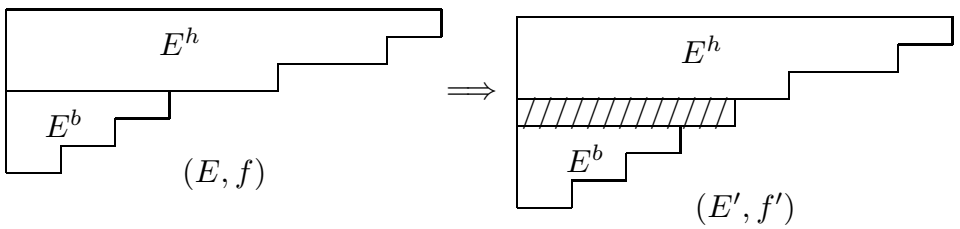
En imposant la valeur $(x+1, x+1, \cdots, x+1, x+1, 1, 1)$ à la première ligne de E' et $(1, 1, \cdots, 1, 1, z, y)$ aux autres lignes, on obtient une nouvelle évaluation V' pour E', d'où une évaluation $V'(E'; g)$ pour toute application g de $\overline{A}_{n-1}$ appartenant à $\mathcal{F}_{E'}$. Comme $\operatorname{sgn} E' = (-1)^{n-1-(E_1-1)} = (-1)^{n-E_1} = \operatorname{sgn} E$, on a bien

$$\sum_{f \in \mathcal{F}_E} V(E; f) = (x+y)(x+z) \sum_{g \in \mathcal{F}_{E'}} V'(E'; g). \quad \square$$

Un escalier gauche E d'ordre $2n$ peut se décomposer en deux parties E^b et E^h : on prend pour E^b le plus grand escalier ordinaire pair dans le coin inférieur gauche de E. Autrement dit, ou bien $E_2 = E_3$ et $E^b = \emptyset$, ou bien, dans le cas contraire, $E^b = (E_1, E_2, \cdots, E_{2m})$, où m est le plus petit entier satisfaisant $1 \leq m \leq n-1$ et $E_{2m+2} = E_{2m+3}$. Naturellement E^h est la partie haute restante : $E^h = E \setminus E^b$.

On décompose alors l'ensemble des couples (E, f), où E est un escalier gauche d'ordre $2n$ et f un élément de $\mathcal{F}_E$ en trois classes $\mathcal{F}^1_{2n}$, $\mathcal{F}^2_{2n}$ et $\mathcal{F}^0_{2n}$. Dans la première, nous rangeons tous les couples (E, f) tels que $E^h \neq \emptyset$ et f est surjective sur E^b ; dans la seconde, ceux des couples où f n'est pas surjective sur E^b ; et dans la troisième, E est l'escalier ordinaire pair et f une application appartenant à A_n.

On définit une bijection de $\mathcal{F}^1_{2n}$ sur $\mathcal{F}^2_{2n}$ indiquée par le diagramme suivant :



L'escalier gauche E' est obtenu en incluant une ligne vide dont la longueur est égale à l'ordre de E^b plus 2 entre E^b et E^h. On obtient bien encore un escalier gauche d'ordre $2n$, puisque la longueur de la dernière ligne de E^h surpasse au moins de quatre unités la longueur de la première ligne de E^b. De la même façon, on obtient le graphe de l'application f' en incluant une ligne vide dans le graphe de f. De plus $(E')^b$ contient strictement E^b et donc (au moins) une ligne vide. L'application f' n'est

donc pas surjective sur $(E')^b$, de sorte que le nouveau couple (E', f') appartient à $\mathcal{F}^2_{2n}$.

On passe, réciproquement, de (E', f') à (E, f) par une définition évidente. On a enfin

$$V(E'; f') = -V(E; f),$$

puisque E' a une ligne de plus que E.

Dans la somme (3.1) il ne reste donc plus que les couples (E, f) où E est l'escalier pair et f une application surjective sur E. On a donc démontré le lemme suivant :

LEMME 3.2. — *On a*

$$F_n(x, y, z) = \sum_{f \in A_n} V^U(f),$$

où $U = (X, X, \cdots, X)$. □

LEMME 3.3. — *Le changement de la première lettre dans une suite ne change pas la fonction génératrice associée à cette suite.*

Nous donnons ci-après la démonstration seulement dans le cas où $U = (X, U_2, U_3, \cdots, U_{n-1})$ et $W = (Y, U_2, U_3, \cdots, U_{n-1})$. Les autres cas comme $U = (Z, U_2, U_3, \cdots, U_{n-1})$ et $W = (X, U_2, U_3, \cdots, U_{n-1})$ se démontrent de la même façon.

DÉMONSTRATION. — Pour démontrer le lemme, on construit une bijection $\Phi : f \mapsto g$ de l'ensemble A^U_n sur A^W_n telle que $V^U(f) = V^W(g)$.

Pour les deux premières colonnes, le dessin suivant montre le changement d'évaluation :

$V^U =$

X			X	Z	Y
x	x				
0	1				x z
1	0			y	x
1	1		z	y	
z	y				
1	2				

$\Longrightarrow \quad V^W =$

Y	
y	y
1	1
0	1
1	0
x	z
1	2

On constate donc que pour $4 \leq j \leq 2n-2$, on a dans tous les cas $V^U(2, j) = V^W(1, j)$.

L'application g est ainsi définie :

(i) $g(i) = f(i)$ pour $3 \leq i \leq 2n$;

(ii) si $(1, f(1)) \in B_2^U$, on pose $g(2) = f(1)$ et

$$g(1) = \begin{cases} 2n, & \text{si } f(2) = 2\,; \\ 2, & \text{si } f(2) = 2n\,; \\ f(2), & \text{dans les autres cas}\,; \end{cases}$$

(iii) Si $(1, f(1)) \notin B_2^U$, on a $(2, f(2)) \in B_2^U$ par U-surjectivité, on pose alors

$$g(1) = \begin{cases} 2, & \text{si } f(1) = 2n\,; \\ f(1), & \text{sinon}\,; \end{cases}$$

et

$$g(2) = \begin{cases} 2n, & \text{si } f(2) = 2\,; \\ f(2), & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'inverse de cette construction est assurée par les faits que dans le cas (ii) on a toujours $(2, g(2)) \in B_2^U$, et dans le cas (iii) on a $(2, g(2)) \notin B_2^U$.

On vérifie, en distinguant plusieurs cas simples, que $f \mapsto g$ est une bijection ayant bien la propriété $V^U(f) = V^W(g)$ désirée. □

Lemme 3.4. — *Le changement de deux lettres consécutives dans une suite ne change pas la fonction génératrice associée à cette suite.*

Nous donnons ci-après la démonstration seulement dans le cas où $U = (U_1, U_2, \cdots, U_r = X, U_{r+1} = Y, \cdots, U_{n-1})$ et $W = (U_1, U_2, \cdots, U_r = Y, U_{r+1} = X, \cdots, U_{n-1})$. Les autres cas comme $U = (U_1, U_2, \cdots, U_r = Z, U_{r+1} = Y, \cdots, U_{n-1})$ et $W = (U_1, U_2, \cdots, U_r = Y, U_{r+1} = Z, \cdots, U_{n-1})$ se démontrent de la même façon.

Démonstration. — Pour démontrer le lemme, on construit une bijection $\Psi : f \mapsto g$ de l'ensemble A_n^U sur A_n^W telle que $V^U(f) = V^W(g)$.

Pour $i \geq 2r + 3$, on pose toujours $g(i) = f(i)$. Puisque pour $i \leq 2r - 2$, on a $V^U(i, 2r+2) = V^W(i, 2r)$ et $V^U(i, 2r) = V^W(i, 2r+2)$, on peut poser

$$g(i) = \begin{cases} 2r, & \text{si } f(i) = 2r + 2\,; \\ 2r + 2, & \text{si } f(i) = 2r\,; \\ f(i), & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

En résumé, les valeurs de g dans la ligne $2r$ et $2r + 2$ sont déterminées de façon naturelle à partir de ceux de f dans la ligne $2r + 2$ et $2r$

respectivement. Et pour les quatres colonnes restantes, le changement d'évaluation est représenté par le dessin suivant :

$V^U =$

		X		Y	
x	x	y	y		
0	1	1	1		
1	0	0	1		
1	1	1	0		
0	1	x	z		
z	y				
$2r{-}1$	$2r$	$2r{+}1$		$2r{+}2$	

$\Longrightarrow$ $V^W =$

		Y		X	
y	y	x	x		
1	1	0	1		
0	1	1	0		
1	0	1	1		
1	0	z	y		
x	z				
$2r{-}1$	$2r$	$2r{+}1$		$2r{+}2$	

(i) Si $f(2r) \neq 2r+2$, alors les valeurs de g dans les colonnes $2r-1, 2r, 2r+1$ et $2r+2$ sont déterminées de façon naturelle par celles de f dans les colonnes $2r+1, 2r+2, 2r-1$ et $2r$, respectivement.

(ii) Si $f(2r) = 2r+2$, alors les valeurs de g dans les colonnes $2r-1, 2r, 2r+1$ et $2r+2$ sont déterminées de façon naturelle par celles de f dans les colonnes $2r, 2r+2, 2r-1$ et $2r+1$, respectivement. Remarquons que dans ce cas, les valeurs de f pour les lignes $2r-1, 2r+1$ et $2r+2$ sont assez arbitraires puisque $(2r, f(2r)) \in B_{2r} \cap B_{2r+2}$.

L'inverse de cette construction est assurée par les faits que dans le cas (i) on a toujours $g(2r-1) \neq 2r+2$, et dans le cas (ii) on a $g(2r-1) = 2r+2$.

On vérifie que $f \mapsto g$ est une bijection conservant l'évaluation. □

Le lemme 3.2 dit que le théorème 2.1 est vrai pour la suite $U = (X, X, \cdots, X)$. Par les lemmes 3.3 et 3.4, le théorème 2.1 est alors vrai pour toute suite U arbitraire.

4. La symétrie et le codage de Dumont-Foata

Le fait que les polynômes $F_n(x, y, z)$ sont symétriques en les trois variables x, y, z peut être établi de la façon suivante :

En prenant la suite $U = (X, X, \cdots, X)$, on obtient $A_n^U = A_n$ et $\max^U = \max$, $\mathrm{fix}^U = \mathrm{fix}$ et $\mathrm{sur}^U = \mathrm{sur}$. Si l'on prend la suite $U = (Y, Y, \cdots, Y)$, on a, en revanche, $A_n^U = A_n$ et $\max^U = \mathrm{sur}$, $\mathrm{fix}^U = \max$ et $\mathrm{sur}^U = \mathrm{fix}$. D'où $F_n(x, y, z) = F_n(y, z, x)$.

D'autre part, soit $f \in A_n$, on définit une involution $f \mapsto f'$ telle que $f'(2i) = f(2i-1)$ et $f'(2i-1) = f(2i)$ pour $1 \leq i \leq n$. Cette involution montre que $F_n(x, y, z) = F_n(x, z, y)$. Par conséquent, le polynôme $F_n(x, y, z)$ est symétrique en les trois variables x, y, z.

En comparant le théorème 1.2 et le théorème 2.1 dans le cas particulier où $U = (X, X, \cdots, X)$, on voit qu'il doit exister une bijection de A_n sur A_n qui envoie les statistiques "max", "fix" et "sur" sur les statistiques "max", "fix" et "sai". Notre propos final est de construire une telle bijection, qui est, en fait, une involution. Auparavant, nous donnons un *codage* pour les applications excédantes surjectives de $[2n]$ sur $2[n]$.

Notons $\mathcal{D}$ l'ensemble de tous les mots ayant les lettres 0 et 1. Soit $m \in \mathcal{D}$, la longueur de m et le nombre de lettres α dans m sont notés respectivement $|m|$ et $|m|_\alpha$.

Soit n un entier positif. Notons $\mathcal{D}_n$ l'ensemble de toutes les suites de mots $(d_1, d_2, \cdots, d_{n-1})$ satisfaisant les conditions

C1) $|d_1| = 2$;

C2) $|d_i| = |d_{i-1}|_1 + 2$ pour $2 \leq i \leq n-1$;

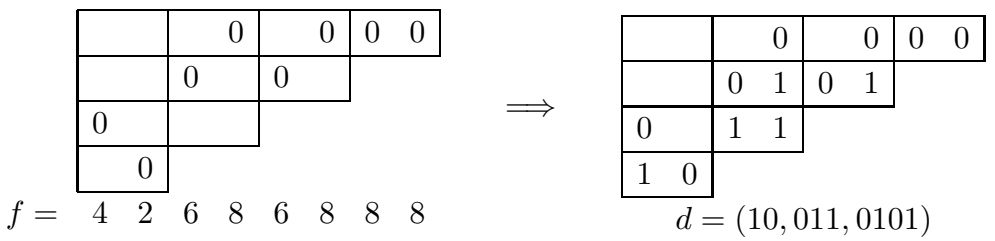
C3) $|d_i|_0 \geq 1$ pour $1 \leq i \leq n-1$.

Par exemple, la suite $(10, 011, 0101)$ est un élément de $\mathcal{D}_4$. Dans [DumFoa], Dumont et Foata ont construit une bijection $f \mapsto d$ entre A_n et $\mathcal{D}_n$; la suite d est appelée *codage* de Dumont-Foata de l'application f. Par exemple, le codage de l'application $f = 42686888$ est la suite $d = (10, 011, 0101)$. Le codage est construit de la façon suivante :

1) Dessiner le graphe de l'application f dans un escalier pair en mettant des lettres 0 sur les points $(i, f(i))$;

2) Ajouter des lettres 1 de sorte que chaque colonne lue de haut en bas contienne une suite maximale de la forme 011...1 ;

3) Lire les nombres écrits, ligne par ligne, de bas en haut et de gauche à droite. Pour $1 \leq i \leq n-1$, d_i correspond à la ligne de hauteur i.



Nous remarquons que ce codage peut être étendu à l'ensemble de toutes les applications définies sur l'escalier pair en supprimant simplement la condition C3) dans la définition de l'ensemble $\mathcal{D}_n$.

D'après cette définition, on a les propriétés suivantes :

LEMME 4.1. — *Soit d le codage de l'application f. Alors on a*

1) $\max(f) = |d_{n-1}|_1$;
2) $\mathrm{fix}(f) = \#\{i \mid d_i = m0\}$;
3) $\mathrm{sur}(f) = \#\{i \mid d_i = m0\alpha\}$;
4) $\mathrm{sai}(f) = \#\{i \mid d_i = 0m\}$;

où $|\alpha| = 1$ et $m \in \mathcal{D}$. □

Nous définissons maintenant une involution $m \mapsto \widehat{m}$ sur $\mathcal{D}$. Si $|m| = 2$, on pose $\widehat{m} = m$; sinon, m peut s'écrire sous la forme $m = \alpha m'\beta\gamma$ où $|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = 1, m' \in \mathcal{D}$, et on pose alors $\widehat{m} = \beta m'\alpha\gamma$. Remarquons que cette involution ne change pas la longueur et le nombre de 1. Cette définition peut être prolongée à tout l'ensemble $\mathcal{D}_n$ d'une façon naturelle :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_n & \longrightarrow & \mathcal{D}_n \\ d = (d_1, d_2, \cdots, d_{n-1}) & \longmapsto & \hat{d} = (\hat{d}_1, \hat{d}_2, \cdots, \hat{d}_{n-1}) \end{array}$$

THÉORÈME 4.2. — *Il existe une involution $f \mapsto \hat{f}$ sur A_n telle que* :

1) $\max(f) = \max(\hat{f})$;
2) $\mathrm{fix}(f) = \mathrm{fix}(\hat{f})$;
3) $\mathrm{sur}(f) = \mathrm{sai}(\hat{f})$;
4) $\mathrm{sai}(f) = \mathrm{sur}(\hat{f})$.

DÉMONSTRATION. — Soient $f \in A_n$ et $d \in \mathcal{D}_n$ le codage de f. Par l'involution précédente, on obtient une autre suite $\hat{d}$; l'application $\hat{f}$ vient alors du codage $\hat{d}$. D'après le lemme précédent, on peut vérifier que les quatre relations pour les statistiques sont satisfaites. □

Par exemple, si on prend l'application $f = 42686888$, alors, son codage de Dumont-Foata est la suite $d = (10, 011, 0101)$; d'où, $\hat{d} = (10, 101, 0101)$ et $\hat{f} = 62486888$. On peut vérifier que $\max(f) = \max(\hat{f}) = 2$, $\mathrm{fix}(f) = \mathrm{fix}(\hat{f}) = 1$, $\mathrm{sur}(f) = \mathrm{sai}(\hat{f}) = 1$ et $\mathrm{sai}(f) = \mathrm{sur}(\hat{f}) = 2$.

BIBLIOGRAPHIE

[And] André (D.). — Sur les permutations alternées, *J. Math. Pures Appl.*, t. **7**, 1881, p. 167-187.

[Car1] Carlitz (L.). — A conjecture concerning Genocchi numbers, *K. Norske Vidensk. Selsk. Sk.*, t. **9**, 1972, p. 1-4.

[Car2] Carlitz (L.). — Explicit formulas for the Dumont-Foata polynomial, *Discrete. Math.*, t. **30**, 1980, p. 211-225.

[Dum] Dumont (D.). — Interprétations combinatoires des nombres de Genocchi, *Duke math. J.*, t. **41(2)**, 1974, p. 305-318.

[DumFoa] Dumont (D.) et Foata (D.). — Une propriété de symétrie des nombres de Genocchi, *Bull. Soc. math. France*, t. **104**, 1976, p. 433-451.

[DumVie] Dumont (D.) et Viennot (G.). — A combinatorial interpretation of the Seidel generation of Genocchi numbers, *Annals of Discrete Mathematics*, t. **6**, 1980, p. 77-87.

[FoaSch] Foata (D.) et Schützenberger (M. -P.). — Nombres d'Euler et permutations alternantes, *A survey of Combinatorial Theory,* (J.N. Srivastava, Ed.), North-Holland, Amsterdam, 1973.

[Gan] Gandhi (J. M.). — A conjectured representation of Genocchi numbers, *Am. Math. Monthly*, t. **77(1)**, 1970, p. 505-506.

[Rio] Riordan (J.) et Stein (P.). — Proof of a conjecture on Genocchi numbers, *Discrete Math., Amsterdam*, t. **5**, 1973, p. 381-388.

INDEX

ch	:	1.3.1 ; 2.2.7	imv	:	1.3.1
ctn	:	1.3.6	ind	:	1.1.2
den	:	1.1.1 ; 1.2.1 ; 1.3.1	inv	:	1.2.1 ; 1.3.1
des	:	1.1.1 ; 1.2.1 ; 1.3.1	maj	:	1.1.1 ; 1.2.1 ; 1.3.1
deu	:	2.2.3	max	:	3
EP	:	1.3.A6	mon	:	1.1.1
Exc	:	1.2.1 ; 1.3.1	Nexc	:	1.2.1 ; 1.3.1
eul	:	1.1.1 ; 1.3.1	pre	:	2.2.2 ; 1.3.10
exc	:	1.1.1 ; 1.2.1 ; 1.3.1	SE	:	1.1.1 ; 1.3.1
Fact	:	1.3.7	Soul	:	1.2.2
fil	:	1.3.3	sai	:	3
fix	:	3	sur	:	3
Gf	:	1.2.1 ; 1.3.6	tot	:	1.1.1 ; 1.3.1

Les variations

den^a	:	1.3.7	fix^U	:	3
${}^a\mathrm{den}$	:	1.3.7	maj_k	:	1.3.4
des_k	:	1.3.4	max^U	:	3
{Exc}	:	1.3.1	{Nexc}	:	1.3.1
$\overline{\mathrm{Exc}}$	:	1.3.5	sai^U	:	3
exc^a	:	1.3.7	sur^U	:	3

Guo-Niu HAN

THÈSE présentée pour obtenir le grade de *DOCTEUR*

Domaine : *MATHÉMATIQUE*

Titre : CALCUL DENERTIEN

A.M.S. Subject Classification (1980) 05A15 05A17 33A15 33A75

Mots clefs : Statistiques euler-mahoniennes, nombre d'inversions, indice majeur, permutations, mots, réarrangements, commutation, tableaux de Young, nombres de Kostka, nombres de Genocchi, q-analogues.

La présente thèse se compose de quatre chapitres. Le chapitre 0 nous sert d'introduction. Dans le premier chapitre, nous donnons des démonstrations directes d'un résultat de Foata-Zeilberger, et le prolongeons au cas du monoïde libre ordonné en établissant une nouvelle transformation qui envoie la paire de statistiques (exc, den) sur (des, maj). Le deuxième chapitre est consacré à une étude combinatoire et analytique des polynômes de Kostka-Foulkes. Après la démonstration de la conjecture de Gupta, on calcule la fonction génératrice des polynômes de Kostka-Foulkes pour une classe de forme et d'évaluation données. Dans le dernier chapitre, nous proposons une extension de la théorie géométrique des nombres de Genocchi introduite par Dumont. Des propriétés de symétrie sont établies.