Séminaires & Congrès
5, 2001, p. 147–159

MODULES GALOISIENS SUR LES COURBES : UNE INTRODUCTION

par

Niels Borne

Résumé. — Cet article est une introduction aux modules galoisiens sur les courbes. On commence par présenter un résultat de S. Nakajima concernant l'espace des différentielles holomorphes, et ses conséquences sur l'étude du groupe fondamental étale. On montre ensuite comment la connaissance de la structure du groupe de Grothendieck équivariant d'une courbe permet de résoudre partiellement le problème du calcul des modules galoisiens.

Abstract **(Galois modules on curves : an introduction).** — To start with, we introduce a result of S. Nakajima concerning the space of holomorphic differentials, and its consequences on the study of the étale fundamental group. We then show how the knowledge of the structure of the equivariant Grothendieck group of a curve allows to solve partly the problem of the computation of Galois modules.

1. Le problème de Hecke et le groupe fondamental des courbes

1.1. Le problème de Hecke classique. — Le premier théorème de la théorie des modules galoisiens sur les courbes est dû à Chevalley et Weil en 1934 (voir [**4**]). Ce résultat est une réponse à un problème qu'avait posé Hecke (voir [**11**]), et que les auteurs ont reformulé de la manière suivante :

Problème 1.1 **(Hecke, 1928)**. — *Soit X une courbe algébrique sur $\mathbb{C}$ munie d'une action d'un groupe fini G. Comment décomposer l'espace des formes différentielles $H^0(X, \Omega_X)$ sur la courbe comme une somme directe de représentations indécomposables du groupe G ?*

Chevalley et Weil vont étendre le problème au cas des différentielles de degré quelconque. Par souci de simplicité, on énonce ici leur résultat dans un cas particulier.

Classification mathématique par sujets **(2000).** — 14H37, 14C40.
Mots clefs. — Automorphismes des courbes, Théorèmes de Riemann-Roch.

***Théorème 1.2* (Chevalley-Weil, 1934).** — *Soit X une courbe algébrique sur $\mathbb{C}$ munie d'une action libre d'un groupe fini G (i.e. le stabilisateur de tout point est trivial). Soit de plus $\pi : X \to Y = X/G$ le quotient et g_Y le genre de la courbe algébrique Y. On note $\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{C}[G]$) la représentation triviale (resp. régulière) de G. On a des isomorphismes entre représentations :*
(i) $H^0(X, \Omega_X) \simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}[G]^{\oplus g_Y - 1}$
(ii) $H^0(X, \Omega_X^{\otimes l}) \simeq \mathbb{C}[G]^{\oplus (2l-1)(g_Y - 1)}$ *pour tout entier* $l > 1$

La version générale du théorème est valable sans hypothèse sur l'action, et a une forme analogue, avec des termes supplémentaires traduisant l'existence de points fixes. Comme on sait décomposer $\mathbb{C}[G]$ en somme de représentations indécomposables, cet énoncé répond complètement au problème de Hecke.

1.2. Le problème de Hecke modulaire. — On peut remarquer que le théorème de Chevalley-Weil implique le fait suivant : si une courbe algébrique sur $\mathbb{C}$ admet un revêtement galoisien non trivial, alors elle est de genre strictement positif, autrement dit le groupe fondamental de la droite projective sur $\mathbb{C}$ est nul (en fait, la formule de Riemann-Hurwitz suffit à le démontrer, et la formule (i) du théorème ci-dessus en est une version équivariante). Ceci est bien entendu un renseignement très faible sur le groupe fondamental des courbes algébriques sur $\mathbb{C}$, qui est par ailleurs bien connu. Cependant, le lien entre le problème de Hecke et le groupe fondamental est beaucoup plus intéressant dans un autre contexte, qu'on va exposer maintenant.

Dans la suite de cet article, la lettre X désignera une courbe algébrique projective et lisse sur un corps algébriquement clos k, avec une prédilection pour la caractéristique positive. On dira simplement que X est une courbe, et on supposera X munie d'une action fidèle d'un groupe fini G respectant sa structure algébrique et fixant le corps k. D'une part, on peut formuler un problème de Hecke sur k, et d'autre part on dispose du groupe fondamental algébrique du quotient $Y = X/G$ qui classe les revêtements algébriques étales de Y.

Lorsque le corps k considéré est de caractéristique nulle, la situation est totalement analogue au cas des courbes algébriques sur $\mathbb{C}$: le problème de Hecke admet exactement la même réponse, et le groupe fondamental étale est connu grâce au travaux de Grothendieck (voir SGA1). Par contre, en caractéristique positive, des différences apparaissent : on n'a que des renseignements partiels sur le groupe fondamental (voir par exemple l'introduction de [**17**] pour un résumé), et bien que le problème de Hecke soit résolu dès que l'action est modérée (voir [**12**], Theorem 3), l'analogue de la formule de Chevalley-Weil n'est plus valable en général, mais seulement lorsque la caractéristique de k ne divise pas l'ordre de G.

De plus, Shoichi Nakajima a montré en 1984 que la réponse au problème de Hecke (qu'on appelera modulaire dans ce cas, en référence à la théorie de la représentation du même nom) fournit des renseignements non triviaux sur le groupe fondamental étale (voir [**15**]). Pour expliquer ce lien, on va formuler un deuxième problème, le « problème inverse » suivant.

Problème 1.3. — *Soit Y une courbe algébrique projective et lisse sur un corps algébriquement clos k, et G un groupe fini. À quelle condition existe-t-il un revêtement étale $X \to Y$ galoisien de groupe G ?*

Une courbe Y étant fixée, on note $\mathcal{G}_Y$ l'ensemble des groupes G pour lesquels le problème ci-dessus admet une réponse positive. On montre que déterminer $\pi_1^{\text{ét}}(Y)$ revient à déterminer $\mathcal{G}_Y$ (d'après [**8**], proposition 15.4, c'est une conséquence du fait que le groupe fondamental d'une courbe projective est topologiquement de type fini, ce qui résulte du théorème de spécialisation, voir SGA1, XIII, Corollaire 2.12). On suppose à présent que la caractéristique de k est strictement positive, et on la note p. Lorsque G est un p-groupe, on peut à la fois donner une réponse simple au problème de Hecke (voir ci-dessous) et déterminer si G appartient ou non à $\mathcal{G}_Y$. En effet il est connu qu'un p-groupe G appartient à $\mathcal{G}_Y$ si et seulement s'il peut être engendré par au plus h_Y générateurs, où h_Y désigne l'invariant de Hasse-Witt de la courbe Y (c'est le théorème de Shafarevitch, voir [**19**] et par exemple [**2**] pour une preuve moderne). À noter que $0 \leqslant h_Y \leqslant g_Y$.

Il n'est pas question, ici, de faire un panorama des différents travaux concernant le problème du groupe fondamental des courbes projectives en caractéristique positive, mais seulement d'évoquer son lien avec les modules galoisiens, à travers le remarquable résultat suivant :

***Théorème 1.4* (Nakajima, 1984)**. — *Soient X et Y deux courbes sur k, et $X \to Y$ un revêtement galoisien étale de groupe G. On note I l'idéal d'augmentation de l'anneau du groupe $k[G]$. On a une suite exacte courte de représentations :*

$$0 \to H^0(X, \Omega_X) \to k[G]^{\oplus g_Y} \to I \to 0$$

Cette suite exacte détermine complètement la structure de $H^0(X, \Omega_X)$ en tant que représentation de G.

Soit d_G le nombre minimal de générateurs de G. En utilisant une construction en théorie des représentations modulaires, la « loop-space operation » Ω, Nakajima peut exprimer explicitement la structure de l'espace des différentielles dans un cas particulier.

Corollaire 1.5. — *Si G est un p-groupe, l'espace des différentielles holomorphes sur X admet la décomposition en indécomposables suivante :*

$$H^0(X, \Omega_X) \simeq k[G]^{\oplus g_Y - d_G} \oplus \Omega^2 k.$$

Comme $k[G]$ est un indécomposable projectif, et $\Omega^2 k$ est un indécomposable qui ne l'est pas, ce corollaire donne la condition nécessaire : si un p-groupe G appartient $\mathcal{G}_Y$, alors $d_G \leqslant g_Y$. Pour une courbe ordinaire, $h_Y = g_Y$, et on retrouve la condition ci-dessus.

2. Généralités sur les modules galoisiens

2.1. Théorie de la représentation. — On rappelle qu'une représentation linéaire d'un groupe fini G est un morphisme $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ de G dans le groupe linéaire d'un espace vectoriel V de dimension finie sur un corps k algébriquement clos donné. Si $k[G]$ désigne l'anneau du groupe, les représentations sont les $k[G]$-modules de type fini.

L'anneau $k[G]$ est semi-simple si et seulement si la caractéristique de k ne divise pas l'ordre de G. Dans ce cas, $k[G]$-modules indécomposables et $k[G]$-modules simples coïncident. Dans le cas général, il y a lieu de faire la distinction. Rappelons que tout $k[G]$-module admet une décomposition en $k[G]$-modules indécomposables, et le théorème de Krull-Schmidt assure l'unicité des coefficients entiers intervenant dans cette décomposition.

2.2. G-faisceaux. — Soit X une courbe munie d'une action d'un groupe fini G. Comme le précise Grothendieck dans le Tohoku (voir [**10**]), si l'action de G respecte la structure de X, tout faisceau sur X défini en des termes structurels va donner lieu à des représentations de X : l'espace des sections globales associé, mais aussi les différents groupes de cohomologie. Il est utile de formaliser cette notion, ce qu'il est possible de faire de la manière suivante :

Définition 2.1. — Soit $\mathcal{F}$ un faisceau (d'ensembles, de groupes, ...) sur X. On appelle G-linéarisation de $\mathcal{F}$ la donnée d'une collection $(\psi_g)_{g\in G}$ de morphismes de faisceaux $\psi_g : g_*\mathcal{F} \to \mathcal{F}$ vérifiant les conditions suivantes :

(1) $\psi_1 = \mathrm{Id}$

(2) $\psi_{hg} = \psi_h \circ h_*(\psi_g)$ (condition de cocycle), autrement dit, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} h_*g_*\mathcal{F} \arrow[r, "h_*\psi_g"] \arrow[d, equal] & h_*\mathcal{F} \arrow[r, "\psi_h"] & \mathcal{F} \\ (hg)_*\mathcal{F} \arrow[urr, "\psi_{hg}"'] & & \end{tikzcd}$$

Un G-faisceau sur X est un faisceau muni d'une G-linéarisation.

Parmi les exemples immédiats de G-faisceaux, on peut citer les faisceaux des différentielles d'ordre l sur la courbe $\Omega_X^{\otimes l}$, ou encore les faisceaux $\mathcal{L}_X(D)$ associés aux diviseurs G-invariants D.

2.3. Problème de Riemann équivariant. — Les G-faisceaux cohérents sur une courbe (et plus généralement sur une variété) X fournissent des représentations d'origine géométrique que l'on appelle parfois les *modules galoisiens*. La question fondamentale dans l'étude de ces modules est la suivante :

Problème 2.2. — *Soit X une courbe munie d'une action d'un groupe fini G, et $\mathcal{F}$ un G-faisceau cohérent sur X. Comment décomposer $H^0(X, \mathcal{F})$ comme une somme de modules indécomposables ?*

Parmi les applications de l'étude des modules galoisiens on peut noter, outre l'étude du groupe fondamental, l'étude des singularités de l'espace des modules grossier $\mathcal{M}_g$ des courbes de genre g.

Lønsted a en effet donné une démonstration utilisant les structures galoisiennes du théorème de Rauch-Popp-Oort (voir [**14**]). Rappelons ce résultat.

***Théorème 2.3* (Rauch-Popp-Oort)**. — *Soit $\mathcal{M}_g$ l'espace des modules grossier des courbes de genre g, et P le point de $\mathcal{M}_g$ correspondant à une courbe X.*

(i) Supposons $g \geqslant 4$. Alors P est un point singulier de $\mathcal{M}_g$ si et seulement si le groupe d'automorphismes de X est non trivial.

(ii) Supposons $g = 3$. Alors si X n'est pas hyperelliptique, P est un point singulier de $\mathcal{M}_g$ si et seulement si le groupe d'automorphismes de X est non trivial ; si X est hyperelliptique, P est un point singulier de $\mathcal{M}_g$ si et seulement si le groupe d'automorphismes de X n'est pas d'ordre 2.

C'est la structure galoisienne du fibré tangent à X qui constitue l'un des point-clefs de la démonstration (voir [**14**] pour plus de détails).

3. Approche par des formules de trace

3.1. Théorie des caractères. — La théorie des caractères permet d'associer à toute représentation $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ un invariant que l'on va noter provisoirement $c(V)$. Lorsque le corps de base k est de caractéristique zéro, $c(V)$ est simplement la fonction de G dans k définie par $c(V)(g) = \mathrm{tr}(\rho(g))$. Lorsque la caractéristique de k est strictement positive, il faut employer des caractères de Brauer (voir [**18**], rappelons qu'un caractère de Brauer relève la trace en caractéristique 0 sur les éléments p-réguliers). Dans la suite, le terme caractère désignera toujours un caractère de Brauer.

Lorsque $k[G]$ est semi-simple, $c(V)$ caractérise complètement V, autrement dit deux représentations sont isomorphes si et seulement si leurs caractères sont égaux. Cette assertion est fausse lorsque $k[G]$ n'est pas semi-simple, mais il est par contre exact que deux $k[G]$-modules *projectifs* de type fini ayant même caractère de Brauer sont isomorphes.

Vus comme fonctions à valeurs dans un anneau, les caractères engendrent un anneau, noté $R_k(G)$, appelé anneau des caractères virtuels. Tout caractère virtuel est la différence des caractères de deux représentations. Comme groupe, on montre que $R_k(G)$ est le groupe abélien libre engendré par les caractères des représentations irréductibles (i.e des $k[G]$-modules simples) de G.

L'anneau des caractères virtuels permet d'introduire une version équivariante de la caractéristique d'Euler. Soit $\mathcal{F}$ un G-faisceau sur une courbe X. On note

$$\chi(G,\mathcal{F}) = c(H^0(X,\mathcal{F})) - c(H^1(X,\mathcal{F})).$$

On peut à présent formuler une version affaiblie du problème de Riemann : étant donné un G-faisceau $\mathcal{F}$, comment s'exprime $\chi(G,\mathcal{F})$ en fonction des caractères des représentations irréductibles de G ?

3.2. Application de la formule de Lefschetz. — La formule de Lefschetz (voir par exemple [**9**]) permet de calculer la somme alternée des traces des automorphismes des groupes de cohomologie induits par un automorphisme cyclique d'une variété, en fonction du lieu des points fixes. Cet outil important permet de donner une expression explicite du caractère de Brauer de la caractéristique d'Euler équivariante de tout G-faisceau. On a par exemple (voir [**3**]) :

Proposition 3.1. — *Soient X une courbe munie d'une action libre d'un groupe fini G, et $\mathcal{F}$ un G-faisceau cohérent sur X. On a l'égalité dans $R_k(G)$:*

$$\chi(G,\mathcal{F}) = \frac{\chi(\mathcal{F})}{\#G} c(k[G]).$$

3.3. Limite de l'approche. — Une des limites de l'approche via la théorie des caractères apparaît nettement lorsque l'on considère l'action d'un p-groupe G sur une courbe X sur un corps k de caractéristique p. Dans ce cas, k est la seule représentation irréductible, et l'anneau des caractères $R_k(G)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$. Autrement dit cet anneau ne contient pas de renseignement autre que la dimension des représentations considérées, et aucune information équivariante.

4. Approche par les groupes de Grothendieck

4.1. Groupe de Grothendieck équivariant d'une courbe. — La notion de groupe de Grothendieck (disons d'une catégorie abélienne) permet de généraliser la construction du groupe des caractères virtuels à la dimension supérieure, de la manière suivante :

Définition 4.1. — Soit Z un schéma noethérien muni d'une action d'un groupe fini G. On désigne par $G_0(G,Z)$ le quotient du groupe abélien libre engendré par les classes d'isomorphismes $[\mathcal{F}]$ de G-faisceaux cohérents sur Z, modulo les relations $[\mathcal{F}] = [\mathcal{F}'] + [\mathcal{F}'']$ s'il existe une suite exacte de G-faisceaux $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$.

Lorsque $Z = \operatorname{Spec} k$, muni de l'action triviale de G, l'application $V \to c(V)$ qui à une représentation associe son caractère induit un isomorphisme de groupes $G_0(G, \operatorname{Spec} k) \simeq R_k(G)$.

Les groupes de Grothendieck possèdent de remarquables propriétés fonctorielles qui permettent d'algébriser le problème de Riemann équivariant. L'opération $Z \to G_0(G, Z)$ est par exemple naturellement covariante par rapport aux G-morphismes propres de G-schémas noethériens, et contravariante par rapport aux G-morphismes plats.

Plus précisément tout morphisme propre $f : X \to Y$ de schémas noethériens induit un morphisme de groupes $f_* : G_0(G, X) \to G_0(G, Y)$ défini par la formule :

$$f_*([\mathcal{F}]) = \sum_n (-1)^n [R^n f_*(\mathcal{F})].$$

Dans le cas particulier qui nous préoccupe, *i.e.* si X est une courbe projective sur un corps k munie d'une action d'un groupe fini G, le morphisme structurel $s : X \to \operatorname{Spec} k$ induit un morphisme $s_* : G_0(G, X) \to R_k(G)$ donné par $[\mathcal{F}] \to \chi(G, \mathcal{F})$.

4.2. Groupe de Grothendieck et formule de Riemann-Roch. — Il est raisonnable de penser qu'un théorème concernant la structure de groupe de $G_0(G, X)$ apportera une réponse au problème de Riemann équivariant. On peut tester cette stratégie dans le cas de l'action triviale ($G = 1$). Dans ce cas, si $\operatorname{Pic} X$ désigne le groupe des classes d'isomorphismes de faisceaux inversibles sur la courbe, on a un isomorphisme classique

$$G_0(X) \simeq \mathbb{Z} \oplus \operatorname{Pic} X$$

donné par $[\mathcal{F}] \to (\mathrm{rk}\mathcal{F}, \det \mathcal{F})$, ces quantités étant définies à l'aide de résolutions de $\mathcal{F}$ par des faisceaux localement libres de rang fini. L'isomorphisme réciproque est donné par $(r, \mathcal{L}) \to (r-1)[\mathcal{O}_X] + [\mathcal{L}]$. En appliquant ces deux isomorphismes on obtient $[\mathcal{F}] = \mathrm{rk}\mathcal{F}[\mathcal{O}_X] + [\det \mathcal{F}] - [\mathcal{O}_X]$. À ce stade, il est aisé d'utiliser l'identification entre le groupe $A_0(X)$ des classes de 0-cycles pour l'équivalence rationnelle et $\operatorname{Pic} X$ pour définir le degré d'un faisceau inversible et montrer que $\chi([\mathcal{L}] - [\mathcal{O}_X]) = \deg(\mathcal{L})$. Ces deux expressions donnent $\chi(\mathcal{F}) = \mathrm{rk}\mathcal{F}\, \chi(\mathcal{O}_X) + \deg(\det \mathcal{F})$. On a obtenu le théorème de Riemann-Roch classique sur les courbes, qui est bien la réponse attendue au problème de Riemann.

4.3. Structure de $G_0(G, X)$

4.3.1. Introduction. — La démonstration ci-dessus ne s'adapte pas telle quelle au cas équivariant. En particulier, si $\operatorname{Pic}_G X$ désigne le groupe des classes d'isomorphismes de G-faisceaux inversibles sur la courbe, l'analogue direct de l'isomorphisme ci-dessus, à savoir $G_0(G, X) \simeq \mathbb{Z} \oplus \operatorname{Pic}_G X$, est faux, le morphisme naturel entre ces deux groupes (défini à l'aide de résolutions équivariantes) ayant un noyau non trivial.

Par contre, on va voir qu'on peut généraliser l'isomorphisme $G_0(X) \simeq \mathbb{Z} \oplus A_0(X)$. Comme $\operatorname{Pic}_G X$ s'interprète en termes de diviseurs G-invariants, ces diviseurs sont inadaptés, et il faut en introduire de nouveaux, qu'on appelle les G-cycles sur la courbe.

4.3.2. G-cycles. — On rappelle tout d'abord quelques notations et conventions. La lettre X désigne une courbe projective et lisse sur un corps algébriquement clos k munie d'une action fidèle d'un groupe fini G, $\pi : X \to Y = X/G$ le morphisme quotient. Pour un point P de X, on note G_P le stabilisateur (ou groupe d'inertie) de P. Si deux points sont dans une même orbite sous G, alors leurs stabilisateurs sont conjugués.

Les G-cycles sont des sommes formelles finies de points à coefficients dans les caractères des groupes d'inertie. Plus précisément :

Définition 4.2. — On appelle G-cycle sur X toute somme formelle de points de X du type $D = \sum_{P\in X} V_P P$ vérifiant :

(1) V_P est un caractère du groupe d'inertie G_P de P (*i.e.* $V_P \in R_k(G_P)$) nul sauf pour un nombre fini de points,

(2) si $P' = gP$ pour $g \in G$, alors les caractères V_P et $V_{P'}$ sont conjugués : $V_{P'} = V_P^g$.
On notera $Z_0(G, X)$ le groupe abélien des G-cycles sur X.

Pour définir l'analogue de la notion usuelle d'équivalence rationnelle sur les cycles, il est pratique de faire intervenir les cycles de la courbe quotient :

Définition 4.3. — On définit le morphisme image réciproque à valeurs dans les G-cycles associé au morphisme quotient $\pi : X \to Y = X/G$ comme étant le morphisme $\pi^* : Z_0(Y) \to Z_0(G, X)$ vérifiant pour tout point Q de Y :

$$\pi^*(Q) = \sum_{P\to Q} [k[G_P]]P$$

On peut à présent définir l'équivalence Y-rationnelle sur X et le groupe de classes de cycles associé :

Définition 4.4. — Les G-cycles principaux sur X sont définis comme l'image réciproque, au sens du paragraphe précédent, des cycles principaux sur Y. Le groupe des classes de G-cycles pour l'équivalence Y-rationnelle sur X est défini par :

$$A_0(G, X) = \frac{Z_0(G, X)}{\pi^*(\mathrm{Rat}_k(Y))}$$

où $\mathrm{Rat}_k(Y)$ est le groupe des cycles principaux sur Y.

Le groupe $A_0(G, X)$ est relié à des groupes de Grothendieck par deux morphismes, qu'on va décrire rapidement, en renvoyant à [**1**] pour plus de détails sur la cohérence des constructions.

Le premier est un morphisme degré $\deg_G : A_0(G, X) \to R_k(G)$ défini en induisant et en sommant les coefficients des G-cycles.

Le second est un morphisme $\gamma : A_0(G, X) \to G_0(G, X)$ construit en utilisant les morphismes image directe entre groupes de Grothendieck. Plus précisément on commence par remarquer que si S est une orbite sous G, le groupe $G_0(G, S)$ s'identifie naturellement aux G-cycles à support dans S, et que les immersions fermées $S \to X$ fournissent des morphismes $G_0(G,S) \to G_0(G,X)$. En passant à la limite inductive sur S, on obtient un morphisme $Z_0(G,X) \to G_0(G,X)$, dont on montre qu'il passe au quotient.

Ce morphisme γ permet d'énoncer le théorème suivant :

Théorème 4.5. — *On a un isomorphisme de groupes :*

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \oplus A_0(G,X) &\longrightarrow G_0(G,X) \\ (r,D) &\longmapsto r[\mathcal{O}_X] + \gamma(D) \end{aligned}$$

Pour une preuve de ce théorème, on renvoie à [**1**].

4.4. Première classe de Chern équivariante et formule de Riemann-Roch

L'intérêt de l'isomorphisme ci-dessus est qu'il définit implicitement une première classe de Chern :

Définition 4.6. — On note $c_1^G : G_0(G,X) \to A_0(G,X)$, et on appelle première classe de Chern équivariante, le morphisme composé de l'isomorphisme réciproque $G_0(G,X) \to \mathbb{Z} \oplus A_0(G,X)$ de l'isomorphisme du théorème 4.5, suivi de la deuxième projection $\mathbb{Z} \oplus A_0(G,X) \to A_0(G,X)$.

Cette première classe de Chern vérifie la propriété fonctorielle naturelle : si y est un élément de $G_0(Y)$, alors

$$c_1^G(\pi^*(y)) = \pi^*(c_1(y))$$

Dans cette équation, le π^* du membre de gauche est l'image réciproque le long du morphisme quotient défini au niveau des groupes de Grothendieck, et le c_1 figurant dans le membre de droite est la première classe de Chern usuelle sur le quotient.

Du théorème 4.5 et de cette définition on peut déduire formellement :

Théorème 4.7. — *Soit $\mathcal{F}$ un G-faisceau cohérent sur X. On note $\chi(G,\mathcal{F})$ sa caractéristique d'Euler équivariante et* $\deg_G(\mathcal{F}) = \deg_G(c_1^G[\mathcal{F}])$. *On a alors l'égalité dans $R_k(G)$:*

$$\chi(G,\mathcal{F}) = \mathrm{rk}(\mathcal{F})\chi(G,\mathcal{O}_X) + \deg_G(\mathcal{F}).$$

4.5. Caractéristique d'Euler du faisceau canonique. — Le théorème ci-dessus calcule la différence de deux caractéristiques d'Euler équivariantes. Pour résoudre le problème de Riemann équivariant, il ne suffit plus que d'en calculer une explicitement. On cherche alors des faisceaux naturels dont la caractéristique d'Euler équivariante soit « simple », c'est-à-dire soit un multiple du caractère de la représentation régulière. Il se peut qu'aucun faisceau inversible ne vérifie cette propriété, ce qui conduit à considérer des faisceaux de rang plus grand, et en particulier :

Définition 4.8. — On appelle faisceau canonique de la courbe X le faisceau :

$$\mathcal{C}_X := \bigoplus_{l=1}^{\#G} \Omega_X^{\otimes l} = \Omega_X \oplus \Omega_X^{\otimes 2} \oplus \cdots \oplus \Omega_X^{\otimes \#G}.$$

Lorsque l'action de G sur X est modérée, c'est-à-dire lorsque la caractéristique du corps de base k ne divise pas l'ordre des stabilisateurs, ce faisceau possède la propriété voulue, à savoir :

Théorème 4.9. — *Si l'action de G sur X est modérée on a l'égalité dans $R_k(G)$:*

$$\chi(G, \mathcal{C}_X) = \#G\, \chi(\Omega_X)[k[G]].$$

On peut démontrer ce théorème de deux manières : soit en appliquant la formule de Lefschetz, soit en étudiant la structure multiplicative de $G_0(G, X)$ (pour cette dernière démonstration, voir [**1**]).

4.6. Le cas modéré. — Les formules 4.7 et 4.9 déterminent complètement la caractéristique d'Euler équivariante de tout G-faisceau dans le cas où l'action est modérée. On peut expliciter ce caractère de Brauer et retrouver ainsi les formules données par Nakajima (voir [**16**]). On peut également améliorer la portée de ce résultat grâce au théorème de Nakajima suivant :

***Théorème 4.10* (Nakajima)**. — *Soit X une courbe munie d'une action modérée, et $\mathcal{L}$ un G-faisceau inversible sur X. Si $\deg \mathcal{L} > 2g_X - 2$ le $k[G]$-module $H^0(X, \mathcal{L})$ est projectif.*

En fait Nakajima montre que cette propriété caractérise le cas de la ramification modérée (voir [**16**]). Ce résultat est inspiré du théorème d'arithmétique suivant :

***Théorème 4.11* (Emmy Noether, 1932)**. — *Soit L/K une extension galoisienne de corps de nombres de groupe de Galois G. On a équivalence entre les deux propriétés :*
(i) L/K est modérément ramifiée
(ii) $\mathcal{O}_L$ est localement libre comme $\mathcal{O}_K G$-module

Comme le caractère de Brauer d'un $k[G]$-module projectif détermine sa classe d'isomorphisme, on peut conclure que les formules 4.7 et 4.9 résolvent le problème de Riemann équivariant dans le cas d'une action modérée pour les G-faisceaux inversibles de grand degré.

Pour d'autres développements issus du mariage de la formule de Chevalley-Weil avec un critère de type Noether, on pourra voir [**7**].

4.7. Le cas étale. — Les conclusions du paragraphe précédent s'appliquent en particulier lorsque l'action est libre (*i.e.* le stabilisateur de tout point est trivial), ou de manière équivalente lorsque le morphisme quotient $\pi : X \to Y = X/G$ est étale. Cependant, le théorème 4.10 ne s'applique pas au faisceau des différentielles, et le théorème 1.4 n'en découle donc pas directement. Pour finir, on restitue la preuve du théorème de Nakajima, en commençant par la proposition suivante (voir [**15**] Theorem 3) :

Proposition 4.12. — *Si l'action de G sur X est libre, alors pour tout G-faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur X vérifiant $\deg \mathcal{L} > 2g_X - 2$, le $k[G]$-module $H^0(X, \mathcal{L})$ est libre.*

Démonstration. — La proposition découle du théorème 4.10 et du fait que pour tout G-faisceau cohérent $\mathcal{F}$, la caractéristique $\chi(G, \mathcal{F})$ est un multiple de $[k[G]]$. Pour ce dernier fait, on remarque que $\pi^* : A_0(Y) \to A_0(G, X)$ est un isomorphisme, ce qui implique que pour tout G-faisceau cohérent $\mathcal{F}$, $\deg_G \mathcal{F}$ est un multiple de $[k[G]]$, puis on applique les formules 4.7 et 4.9. On aurait pu aussi appliquer la formule de Lefschetz. □

Montrons comment dériver le théorème 1.4 de la proposition 4.12 en suivant l'idée de Kani (voir [**12**]) consistant à faire intervenir des formes différentielles logarithmiques. Soit S une orbite sous l'action de G, considérée comme diviseur réduit sur X, et $\Omega_X(S)$ le faisceau des différentielles logarithmiques le long de S. Il suffit de considérer la suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte courte de G-faisceaux.

$$0 \to \Omega_X \to \Omega_X(S) \to \mathcal{O}_S \to 0$$

pour retrouver la suite exacte de Nakajima.

On note enfin que la proposition 4.12 et le théorème 4.10 impliquent que la deuxième assertion du théorème de Chevalley-Weil (théorème 1.2 (ii)) vaut aussi en caractéristique finie.

5. Lien avec les théorèmes de Grothendieck-Riemann-Roch équivariants

Divers auteurs ont récemment adapté la démarche initiée par Grothendieck dans SGA6 au cadre équivariant (voir à celui, plus large, des champs de Deligne-Mumford). Parmi eux on peut citer en particulier [**20**] pour les fondements de la K-théorie équivariante, ainsi que [**13**], [**5**], [**6**], [**21**] pour les théorèmes de type Grothendieck-Riemann-Roch.

Une question naturelle est de savoir s'il est possible de spécialiser ces résultats très généraux au cas de la dimension 1 pour retrouver la formule 4.7. Je n'ai pas de réponse précise.

Par contre il est clair qu'aucun de ces résultats ne donnera la structure dite entière de $G_0(G, X)$ telle qu'elle est précisée dans le théorème 4.5 ; en effet dans les travaux ci-dessus les groupes de K -théorie sont systématiquement tensorisés par $\mathbb{Q}$, et l'information de torsion est ainsi perdue.

Références

[1] Borne, Niels – Structure du groupe de Grothendieck équivariant d'une courbe et modules galoisiens. http ://www.math.u-bordeaux.fr/∼borne/. À paraître au Bulletin de la Société Mathématique de France (2001).

[2] Bouw, Irene – The p-rank of curves and covers of curves. Courbes semi-stables et groupe fondamental en géomètrie algébrique (Luminy, 1998), 267–277, Progr. Math., 187, Birkhäuser, Basel, 2000.

[3] Browder, William ; Katz, Nicholas M – Free actions of finite groups on varieties. II. Math. Ann. 260, 403–412 (1982).

[4] Chevalley, Claude ; Weil, André – Über das Verhalten der Integrale 1. Gattung bei Automorphismen des Funktionenkoerpers. Abh. Math. Semin. Hamburg. Univ. 10, 358–361 (1934).

[5] Edidin, Dan ; Graham, William – Equivariant intersection theory. Invent. Math. 131 (1998), no. 3, 595–634.

[6] Edidin, Dan ; Graham, William – Riemann-Roch for equivariant Chow groups. Duke Math. J. 102 (2000), no. 3, 567–594.

[7] Erez, Boas – Geometric trends in Galois module theory. Galois representations in arithmetic algebraic geometry (Durham, 1996), 115–145, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 254, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.

[8] Fried, Michael D. ; Jarden, Moshe – Field arithmetic. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], 11. Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[9] Fulton, William ; Lang, Serge – Riemann-Roch algebra. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 277. Springer-Verlag, 1985.

[10] Grothendieck, Alexandre – Sur quelques points d'algèbre homologique Tohoku Math. J., II. Ser. 9, 119–221 (1957).

[11] Hecke, Erich – Über ein Fundamentalproblem aus theorie der elliptischen Modulfunktionen. Abhand. Math. Sem. d. Hamb.Univ. 6 (1928), 235–257. Math. Werke, Vandenhoeck and Ruprecht, Gottingen, 1983, 548–558.

[12] Kani, Ernst – The Galois-module structure of the space of holomorphic differentials of a curve. J. reine angew. Math. 367 (1986), 187–206.

[13] Köck, Bernhard – The Grothendieck-Riemann-Roch theorem for group schemes actions. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 31 (1998), no. 3, 415–458.

[14] Lønsted, Knud – The singular points on the moduli spaces for smooth curves. Math. Ann. 266 (1984), no. 3, 397–402.

[15] Nakajima, Shoichi – On Galois module structure of the cohomology groups of an algebraic variety. Invent. Math. 75, 1–8 (1984).

[16] Nakajima, Shoichi – Galois module structure of cohomology groups for tamely ramified coverings of algebraic varieties. J. Number Theory 22, 115–123 (1986).

[17] Nakajima, Shoichi – On generalized Hasse-Witt invariants of an algebraic curve. Galois groups and their representations (Nagoya, 1981), 69–88, Adv. Stud. Pure Math., 2, North-Holland, Amsterdam, 1983.

[18] Serre, Jean-Pierre – Linear representations of finite groups. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 42. Springer-Verlag, 1977.

[19] Shafarevitch, I. – On p-extensions. (Russian) Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S. 20 (62), (1947), 351–363.

[20] Thomason, R. W. – Algebraic K-theory of group scheme actions. Algebraic topology and algebraic K-theory (Princeton, N.J., 1983), 539–563, Ann. of Math. Stud., 113, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1987.

[21] Toen, Bertrand – Théorèmes de Riemann-Roch pour les champs de Deligne-Mumford. K-Theory 18 (1999), no. 1, 33–76.

N. Borne, Università di Bologna, Dipartimento di Matematica, Piazza di Porta San Donato, 5, I-40126 Bologna, Italy • *E-mail :* `borne@dm.unibo.it` • *Url :* `http://www.math.u-bordeaux.fr/~borne/`