Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen 42(2008)1, páginas 85-100

Caracterización de funcionales lineales asociados a formas bilineales de tipo Sobolev

Characterization of linear functionals associated to bilinear forms of Sobolev type

Reinier Díaz Millán

Instituto de Cibernética Matemática y Física, La Habana, Cuba

Resumen. En este trabajo se caracterizan las formas bilineales cuyos funcionales asociados anulen a los múltiplos de $(x\overline{y}-1)^{2n+1}$, primero cuando éstos son funcionales generales, posteriormente cuando éstos son hermíticos. También se caracterizan las sucesiones de momentos asociadas a estas formas bilineales y se presenta un análogo del teorema de Favard.

Palabras y frases clave. Producto de Sobolev, teorema de Favard, sucesión de momentos.

2000 Mathematics Subject Classification. 30E05.

Abstract. In this work we characterize the bilinear forms whose associated functionals vanish the multiples of $(x\overline{y}-1)^{2n+1}$, $n=0,1,\ldots$, first when they are general functionals and later on when they are hermitian. Besides we characterize the sequences of moments associated to this bilinear forms and an analog of Favard's Theorem is presented.

Key words and phrases. Sobolev's Product, Favard's theorem, sequence of moments.

1. Introducción

A diferencia de los polinomios ortogonales clásicos, los polinomios ortogonales de Sobolev son una familia de funciones especiales aún no muy estudiadas. Fundamentalmente se ha estudiado el caso en que el producto está definido en la recta, aunque hay ciertos resultados en el caso en que el producto se considera en la circunferencia unidad. En estos casos se ha analizado su comportamiento asintótico y la localización de sus ceros en [4], [2], [3], [6] y [7], por citar sólo los más relevantes. El problema de momentos ha sido tratado en [9]; en dicho trabajo se obtiene un resultado poco satisfactorio desde una perspectiva computacional, pues dada una sucesión bilateral de números reales es difícil comprobar cuándo se cumplen las condiciones que se exigen para que esté determinado el problema de momentos. Este resultado ha sido mejorado sustancialmente en [10]. Por otra parte, en [1], se resuelve completamente el problema de momentos para productos de Sobolev en la recta real. En [14] se encuentra una condición más sencilla de comprobar para que los términos de la sucesión sean los momentos de un producto de Sobolev en la recta real. Sobre este mismo tema, se pueden consultar [11] y [17].

El teorema de Favard para productos de Sobolev se ha estudiado en [5], [14] y [16] mientras que [8] constituye una revisión de algunos de sus análogos para otros modelos de productos escalares. En este trabajo se continúan las ideas del artículo [14], y se estudia el problema de momentos y análogos al teorema de Favard para productos de Sobolev en la circunferencia unidad.

En la primera parte de este trabajo tenemos una sección de preliminares, donde se introducen conceptos básicos para mejor comprensión del resto del trabajo. En [13, Theorem 6] se demuestra que la condición $\Lambda\left((x-y)^3 p(x)q(y)\right) = 0$, $\forall p,q \in \mathbb{C}[x]$, es necesaria y suficiente para que $\Lambda\left(p\left(x\right)q\left(y\right)\right)$ sea un producto de Sobolev en la recta real.

Sobre la base de esta propiedad se hacen todos los estudios del problema de momentos y del teorema de Favard. Siguiendo esta idea no es difícil comprobar que si

$$\Lambda\left(p(x)\overline{q(y)}\right) = \int_{|z|=1} p(z)\overline{q(z)}d\mu_1(z) + \int_{|z|=1} p'(z)\overline{q'(z)}d\mu_2(z),$$

es un producto de Sobolev en la circunferencia unidad, entonces se cumple que

$$\Lambda\left(\left(x\overline{y}-1\right)^3 p(x)\overline{q(y)}\right) = 0, \qquad \forall p,q \in \mathbb{C}[z].$$

En un principio el presente trabajo se limitaba a tratar las propiedades que tenían los funcionales que cumplían tal condición y luego fue generalizado al caso que aquí se trata. Debido a esta propiedad en la sección 2 se comenzará estudiando las formas bilineales, cuyos funcionales asociados anulan los múltiplos de $\left(x\overline{y}-1\right)^{2n+1}$. Primero trabajamos con un funcional cualquiera y luego el caso cuando el funcional es hermítico. Posteriormente se estudia la sucesión de momentos para formas bilineales cuyos funcionales asociados satisfagan la propiedad antes mencionada. En esa misma sección se estudia la sucesión de momentos para formas bilineales hermíticas. Al final se presenta el teorema de Favard cuando éstas formas bilineales sean productos escalares.

En la tercera sección estudiaremos el teorema de momentos para productos de Sobolev en la circunferencia unidad de la forma

$$\langle p, q\rangle = \sum_{k=0}^{n} \int_{|z|=1} p^{(k)}(z)\overline{q^{(k)}(z)}d\mu_k(z),$$

donde μ_k son medidas positivas con momentos finitos.

2. Definiciones y propiedades

Sea $\langle \cdot\,, \cdot\rangle$ un producto escalar en el espacio $\mathbb{C}[z]$ de los polinomios con coeficientes complejos. Aplicando el proceso de Gram-Schmidt a la base $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$ podemos encontrar la sucesión $\{p_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ de polinomios ortogonales asociados a este producto escalar. Es bien conocido que estos polinomios forman una base en $\mathbb{C}[z]$, por lo que se puede escribir $zp_n(z)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ como una combinación lineal de los $p_i(z)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n+1$, para todo n. Así se obtiene la relación de recurrencia

$$zp_n(z) = \sum_{i=0}^{n+1} d_{n,i}p_i(z). \tag{1}$$

Si se define la matriz $D = (d_{i,j})_{i,j=0}^{\infty}$, esta relación de recurrencia se puede escribir mediante

$$D\mathbf{p} = z\mathbf{p},$$

donde $\mathbf{p} = (p_0, p_1, \cdots)^t$. Nótese que D es una matriz inferior de Hessenberg, es decir, que $d_{i,j} = 0$ para $j > i + 1$.

Denotemos por ℓ_2 al espacio de Hilbert de los vectores columna infinitos con entradas de cuadrado sumable, y sea $c_0 \subset \ell_2$ el espacio de vectores con un número finito de entradas distintas de cero. Asociado a la matriz D, se define el operador $\mathbb{D}$ con dominio $\operatorname{dom}(\mathbb{D}) = \{x \in \ell_2 : Dx \in \ell_2\}$ y tal que $\mathbb{D}x = Dx$. Para el vector $x \in c_0$, $x = (x_0, x_1, \cdots)^t$, se escribe $p_x = \sum_i x_ip_i$. En esta notación la base ortonormal $\{p_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ está asumida implícitamente, pero esto no debe llevar a confusión.

De la definición de D tenemos que $\langle De_n, e_m\rangle = \langle zp_m, p_n\rangle$ y tomando combinaciones lineales se cumple

$$\langle D\overline{y}, \overline{x}\rangle = \langle zp_x, p_y\rangle, \qquad x, y \in c_0. \tag{2}$$

Con esto hemos visto cómo asociarle a un producto escalar una matriz de Hessenberg D. Es importante destacar el siguiente resultado demostrado en [15]:

Teorema 2.1. *Sea Λ un funcional hermítico y positivo que satisface*

$$\Lambda\left((x\overline{y} - 1)\, p\,(x, \overline{y})\right) = 0, \qquad \forall p \in \mathbb{C}[x, \overline{y}]$$

Entonces éste se puede representar como una integral con respecto a una medida positiva, es decir,

$$\Lambda\left(p(x)\overline{q(y)}\right) = \int_{|z|=1} p(z)\overline{q(z)}d\mu(z).$$

Obsérvese que en este trabajo se utiliza la notación $\Lambda\left(p(x)\overline{q(y)}\right)$ y también se emplea para lo mismo $\Lambda\left(p\left(x,\overline{y}\right)\right)$, donde $p\left(x,\overline{y}\right)\in\mathbb{C}[x,\overline{y}]$. Estas notaciones significan lo mismo. En ambos casos x e y son complejos.

3. Formas bilineales de tipo Sobolev

3.1. **Descomposición de funciones asociadas a formas bilineales.** Veamos primero un lema que se utilizará para descomponer los funcionales que anulan a los múltiplos de $\left(x\overline{y}-1\right)^{2n+1}$. Con este resultado se logrará representar como suma de dos funcionales lineales a cualquier funcional lineal que anule múltiplos de $\left(x\overline{y}-1\right)^{n}$ para todo n natural.

Lema 3.1. *Sea Λ un funcional lineal que satisface $\Lambda\left(\left(x\overline{y}-1\right)^{n}p\left(x,\overline{y}\right)\right)=0$, entonces existen funcionales lineales Λ_1 y Λ_2 tales que:*

- *si $n=2k+1$ se cumple:*

$$\Lambda\left(p\left(x,\overline{y}\right)\right)=\Lambda_1\left(\frac{\partial^{2k}p\left(x,\overline{y}\right)}{\partial x^k\partial\overline{y}^k}\right)+\Lambda_2\left(p\left(x,\overline{y}\right)\right),$$

  donde $\Lambda_2\left(\left(x\overline{y}-1\right)^{2k}p\left(x,\overline{y}\right)\right)=0$ y $\Lambda_1\left(\left(x\overline{y}-1\right)p\left(x,\overline{y}\right)\right)=0$.
- *si $n=2k$ se cumple:*

$$\Lambda\left(p\left(x,\overline{y}\right)\right)=\Lambda_1\left(\frac{\partial^{2k-1}p\left(x,\overline{y}\right)}{\partial x^{2k-1}}\right)+\Lambda_2\left(p\left(x,\overline{y}\right)\right),$$

  donde $\Lambda_2\left(\left(x\overline{y}-1\right)^{2k-1}p\left(x,\overline{y}\right)\right)=0$ y $\Lambda_1\left(\left(x\overline{y}-1\right)p\left(x,\overline{y}\right)\right)=0$.

Demostración. Si $n=2k+1$, definamos los siguientes funcionales:

$$\Lambda_1\left(p\left(x,\overline{y}\right)\right)=\frac{1}{(2k)!}\Lambda\left(\left(x\overline{y}-1\right)^{2k}p\left(x,\overline{y}\right)\right),\tag{3}$$

$$\Lambda_2\left(p\left(x,\overline{y}\right)\right)=\Lambda\left(p\left(x,\overline{y}\right)\right)-\Lambda_1\left(\frac{\partial^{2k}p\left(x,\overline{y}\right)}{\partial x^k\partial\overline{y}^k}\right).\tag{4}$$

Definidos así, $\Lambda_1\left(\left(x\overline{y}-1\right)p\left(x,\overline{y}\right)\right)=0$, ya que $\Lambda\left(\left(x\overline{y}-1\right)^{2k+1}p\left(x,\overline{y}\right)\right)=0$. Ahora veamos que Λ_2 anula a los múltiplos de $\left(x\overline{y}-1\right)^{2k}$:

$$\begin{aligned}\Lambda_2\left(\left(x\overline{y}-1\right)^{2k}p\left(x,\overline{y}\right)\right)&=\Lambda\left(\left(x\overline{y}-1\right)^{2k}p\left(x,\overline{y}\right)\right)\\&\quad-\Lambda_1\left(\frac{\partial^{2k}\left(\left(x\overline{y}-1\right)^{2k}p\left(x,\overline{y}\right)\right)}{\partial x^k\partial\overline{y}^k}\right),\end{aligned}$$

pero como Λ_1 se anula en los múltiplos de $(x\overline{y}-1)$,

$$\begin{aligned}\Lambda_1\left(\frac{\partial^{2k}\left((x\overline{y}-1)^{2k}\,p\,(x,\overline{y})\right)}{\partial x^k\partial\overline{y}^k}\right) &= (2k)!\Lambda_1\left(x^k\overline{y}^k p\,(x,\overline{y})\right)\\ &= (2k)!\Lambda_1\left(((x\overline{y}-1)+1)p\,(x,\overline{y})\right)\\ &= \Lambda\left((x\overline{y}-1)^{2k}\,p\,(x,\overline{y})\right),\end{aligned}$$

entonces $\Lambda_2\left((x\overline{y}-1)^{2k}\,p\,(x,\overline{y})\right)=0$ y despejando Λ en (4) se obtiene el resultado deseado.

Ahora, si $n=2k$, definamos los siguientes funcionales:

$$\Lambda_1\left(p\,(x,\overline{y})\right) = \frac{1}{(2k-1)!}\Lambda\left((x\overline{y}-1)^{2k-1}\,x^{2k-1}p\,(x,\overline{y})\right), \tag{5}$$

$$\Lambda_2\left(p\,(x,\overline{y})\right) = \Lambda\left(p\,(x,\overline{y})\right)-\Lambda_1\left(\frac{\partial^{2k-1}p\,(x,\overline{y})}{\partial x^{2k-1}}\right). \tag{6}$$

Claramente, $\Lambda_1\left((x\overline{y}-1)\,p\,(x,\overline{y})\right)=0$, ya que $\Lambda\left((x\overline{y}-1)^{2k}\,p\,(x,\overline{y})\right)=0$. Ahora veamos que Λ_2 anula los múltiplos de $(x\overline{y}-1)^{2k-1}$:

$$\begin{aligned}\Lambda_2\left((x\overline{y}-1)^{2k-1}\,p\,(x,\overline{y})\right) &= \Lambda\left((x\overline{y}-1)^{2k-1}\,p\,(x,\overline{y})\right)\\ &\quad -\Lambda_1\left(\frac{\partial^{2k-1}\left((x\overline{y}-1)^{2k-1}\,p\,(x,\overline{y})\right)}{\partial x^{2k-1}}\right),\end{aligned}$$

pero eliminando los múltiplos de $(x\overline{y}-1)$, ya que Λ_1 los anula, se obtiene:

$$\begin{aligned}\Lambda_1\left(\frac{\partial^{2k-1}\left((x\overline{y}-1)^{2k-1}\,p\,(x,\overline{y})\right)}{\partial x^{2k-1}}\right) &= (2k-1)!\Lambda_1\left(\overline{y}^{2k-1}p\,(x,\overline{y})\right)\\ &= \Lambda\left((x\overline{y}-1)^{2k-1}\,x^{2k-1}\overline{y}^{2k-1}p\,(x,\overline{y})\right)\\ &= \Lambda\left((x\overline{y}-1)^{2k-1}\,p\,(x,\overline{y})\right)\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\Lambda_2\left((x\overline{y}-1)^{2k-1}\,p\,(x,\overline{y})\right)=0.$$

Despejando Λ en (6) se obtiene rápidamente la representación deseada. Con esto queda demostrado el Lema. ☑

Con la ayuda de este lema, veremos ahora cómo se descompone una forma bilineal, cuyo funcional asociado anule los múltiplos de $(x\overline{y}-1)^{2n+1}$.

Teorema 3.2. *Sea* $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{C}[x]\times\mathbb{C}[\overline{y}] \longrightarrow \mathbb{C}$ *una forma bilineal y* Λ *su funcional lineal asociado, definido por*

$$\Lambda\left(p(x)\overline{q(y)}\right) = \langle p,q\rangle,$$

entonces $\Lambda\left((x\overline{y}-1)^{2n+1}\,p\,(x,\overline{y})\right) = 0$*, para todo polinomio* $p \in \mathbb{C}[x,\overline{y}]$*, si y sólo si,* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *tiene la forma*

$$\langle p,q\rangle = \sum_{m=0}^{n} \Lambda_{2m}\left(p^{(m)}(x)\overline{q^{(m)}(y)}\right) + \sum_{m=1}^{n} \Lambda_{2m-1}\left(p^{(2m-1)}(x)\overline{q(y)}\right), \qquad (7)$$

donde $\Lambda_i : \mathbb{C}[x]\times\mathbb{C}[\overline{y}] \longrightarrow \mathbb{C}$ *son funcionales lineales que satisfacen*

$$\Lambda_i\left((x\overline{y}-1)\,p\,(x,\overline{y})\right) = 0, \quad \forall p \in \mathbb{C}[x,\overline{y}].$$

Demostración. Probemos por inducción que si $\Lambda\left((x\overline{y}-1)^{2n+1}\,p\,(x,\overline{y})\right) = 0$, entonces éste se descompone en la suma:

$$\Lambda\left(p(x)\overline{q(y)}\right) = \sum_{m=0}^{n} \Lambda_{2m}\left(p^{(m)}(x)\overline{q^{(m)}(y)}\right) + \sum_{m=1}^{n} \Lambda_{2m-1}\left(p^{(2m-1)}(x)\overline{q(y)}\right),$$

donde cada Λ_i anula los múltiplos de $(x\overline{y}-1)$.

Para $n=0$ está claro que se cumple. Supongamos que se cumple para $n=k$. Por el Lema 3.1 tenemos que si Λ anula los múltiplos de $(x\overline{y}-1)^{2k+3}$, entonces

$$\Lambda\left(p(x)\overline{q(y)}\right) = \Lambda_{2(k+1)}\left(p^{(k+1)}(x)\overline{q^{(k+1)}(y)}\right) + \Lambda_{m_1}\left(p(x)\overline{q(y)}\right), \qquad (8)$$

donde $\Lambda_{2(k+1)}$ anula los múltiplos de $(x\overline{y}-1)$ y Λ_{m_1} anula los múltiplos de $(x\overline{y}-1)^{2(k+1)}$. Aplicando nuevamente el Lema 3.1, ahora Λ_{m_1} se descompone en:

$$\Lambda_{m_1}\left(p(x)\overline{q(y)}\right) = \Lambda_{2k+1}\left(p^{(2k+1)}(x)\overline{q(y)}\right) + \Lambda_{m_2}\left(p(x)\overline{q(y)}\right), \qquad (9)$$

donde Λ_{2k+1} anula los múltiplos de $(x\overline{y}-1)$ y Λ_{m_2} anula los múltiplos de $(x\overline{y}-1)^{2k+1}$. Entonces, por la hipótesis de inducción, Λ_{m_2} se descompone en:

$$\Lambda_{m_2}\left(p(x)\overline{q(y)}\right) = \sum_{m=0}^{k} \Lambda_{2m}\left(p^{(m)}(x)\overline{q^{(m)}(y)}\right) + \sum_{m=1}^{k} \Lambda_{2m-1}\left(p^{(2m-1)}(x)\overline{q(y)}\right).$$

Por lo tanto:

$$\Lambda\left(p(x)\overline{q(y)}\right) = \sum_{m=0}^{k+1} \Lambda_{2m}\left(p^{(m)}(x)\overline{q^{(m)}(y)}\right) + \sum_{m=1}^{k+1} \Lambda_{2m-1}\left(p^{(2m-1)}(x)\overline{q(y)}\right).$$

Todos estos funcionales son lineales por la forma en que se definen.

La demostración en el sentido inverso es fácil; sólo hay que notar que si la forma bilineal tiene la forma (7), al derivar dentro de los funcionales, siempre queda un factor común $(x\overline{y}-1)$, el cual anulará a todos los funcionales. ☑

Del anterior teorema se deduce la siguiente proposición:

Proposición 3.3. *En el caso del teorema 3.2, los funcionales Λ_i vienen dados en función de Λ y $\{\Lambda_j\}_{j=i+1}^{2n}$ mediante las siguientes expresiones:*

$$\begin{aligned}\Lambda_{2i}\left(p\left(x,\overline{y}\right)\right)=&\frac{1}{(2i)!}\Lambda\left(\left(x\overline{y}-1\right)^{2i}p\left(x,\overline{y}\right)\right)\\&-\frac{1}{(2i)!}\sum_{k=i+1}^{n}\Lambda_{2k}\left(\frac{\partial^{2k}}{\partial x^k\partial\overline{y}^k}\left(\left(x\overline{y}-1\right)^{2i}p\left(x,\overline{y}\right)\right)\right)\\&-\frac{1}{(2i)!}\sum_{k=i+1}^{n}\Lambda_{2k-1}\left(\frac{\partial^{2k-1}}{\partial x^{2k-1}}\left(\left(x\overline{y}-1\right)^{2i}p\left(x,\overline{y}\right)\right)\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Lambda_{2i-1}\left(p\left(x,\overline{y}\right)\right)=&\frac{1}{(2i-1)!}\Lambda\left(\left(x\overline{y}-1\right)^{2i-1}x^{2i-1}p\left(x,\overline{y}\right)\right)\\&-\frac{1}{(2i-1)!}\left(\sum_{k=i}^{n}\Lambda_{2k}\left(\frac{\partial^{2k}}{\partial x^k\partial\overline{y}^k}\left(\left(x\overline{y}-1\right)^{2i-1}x^{2i-1}p\left(x,\overline{y}\right)\right)\right)\right.\\&\left.+\sum_{k=i+1}^{n}\Lambda_{2k-1}\left(\frac{\partial^{2k-1}}{\partial x^{2k-1}}\left(\left(x\overline{y}-1\right)^{2i-1}x^{2i-1}p\left(x,\overline{y}\right)\right)\right)\right),\end{aligned}$$

para $i=0,1,\ldots,n-1,n$.

Demostración. Evaluemos toda la ecuación (7) en $\left(x\overline{y}-1\right)^{2i}$, entonces como

$$\Lambda_{2i}\left(\frac{\partial^{2i}}{\partial x^i\partial\overline{y}^i}\left(\left(x\overline{y}-1\right)^{2i}p\left(x,\overline{y}\right)\right)\right)=(2i)!\Lambda_{2i}\left(p\left(x,\overline{y}\right)\right),$$

podemos despejar $\Lambda_{2i}\left(p\left(x,\overline{y}\right)\right)$, y éste es igual a la expresión esperada, pues todos los funcionales que tengan subíndice menor que $2i$ se anulan, ya que todos anulan los múltiplos de $(x\overline{y}-1)$.

Lo mismo pasa con los funcionales Λ_{2i-1}, pero ahora se evalúa toda la ecuación (7) en $\left(x\overline{y}-1\right)^{2i-1}x^{2i-1}p\left(x,\overline{y}\right)$, y como

$$\Lambda_{2i-1}\left(\frac{\partial^{2i-1}}{\partial x^{2i-1}}\left(\left(x\overline{y}-1\right)^{2i-1}x^{2i-1}p\left(x,\overline{y}\right)\right)\right)=(2i-1)!\Lambda_{2i-1}\left(p\left(x,\overline{y}\right)\right),$$

despejamos $\Lambda_{2i-1}\left(p\left(x,\overline{y}\right)\right)$ y entonces se demuestran las fórmulas. ☑

Ya hemos caracterizado las formas bilineales cuyos funcionales asociados anulan múltiplos de $\left(x\overline{y}-1\right)^{2n+1}$, sin hacer la hipótesis de ser hermíticas. Definamos los siguientes funcionales,

$$\Gamma_{2k-1}\left(p\left(x,\overline{y}\right)\right)=\Lambda_{2k-1}\left(\overline{y}^{2k-1}p\left(x,\overline{y}\right)\right).$$

Definidos así, los Γ_{2k-1} son funcionales lineales que anulan los múltiplos de $(x\overline{y}-1)$. Por esta definición, tenemos

$$\begin{aligned}\overline{\Gamma}_{2k-1}\left(p\left(x,\overline{y}\right)\right)&=\overline{\Gamma_{2k-1}\left(p(y,\overline{x})\right)}\\&=\overline{\Lambda_{2k-1}\left(\overline{x}^{2k-1}p(y,\overline{x})\right)}\\&=\overline{\Lambda}_{2k-1}\left(x^{2k-1}p\left(x,\overline{y}\right)\right).\end{aligned}$$

Definamos también los funcionales Ψ_{2k-1} de la siguiente forma,

$$\Psi_{2k-1}\left(p\left(x,\overline{y}\right)\right)=\Gamma_{2k-1}\left(p\left(x,\overline{y}\right)\right)+\overline{\Gamma}_{2k-1}\left(p\left(x,\overline{y}\right)\right). \tag{10}$$

Por lo tanto los funcionales Ψ_{2k-1} también son funcionales lineales que anulan los múltiplos de $(x\overline{y}-1)$. Ahora, el siguiente es un corolario por medio del cual descompondremos los funcionales lineales asociados a formas bilineales hermíticas que anulan a los múltiplos de $(x\overline{y}-1)^{2n+1}$.

Corolario 3.4. *Sea $\langle\cdot,\cdot\rangle:\mathbb{C}[x]\times\mathbb{C}[\overline{y}]\longrightarrow\mathbb{C}$ una forma bilineal hermítica y Λ su funcional lineal asociado, definido por*

$$\Lambda\left(p(x)\overline{q(y)}\right)=\langle p,q\rangle,$$

entonces $\Lambda\left((x\overline{y}-1)^{2n+1}p\left(x,\overline{y}\right)\right)=0$, para todo polinomio $p\in\mathbb{C}[x,\overline{y}]$, si y sólo si $\langle\cdot,\cdot\rangle$ tiene la forma

$$\begin{aligned}\langle p,q\rangle=&\sum_{k=0}^{n}\Lambda_{2k}\left(p^{(k)}(x)\overline{q^{(k)}(y)}\right)\\&+\sum_{k=1}^{n}\left[\Lambda_{2k-1}\left(p^{(2k-1)}(x)\overline{q(y)}\right)+\overline{\Lambda}_{2k-1}\left(p(x)\overline{q^{(2k-1)}(y)}\right)\right],\end{aligned} \tag{11}$$

donde Λ_{2k-1}, $\overline{\Lambda}_{2k-1}$, $(k=1,2,\dots,n)$ son funcionales lineales, con

$$\overline{\Lambda}_{2k-1}\left(p(x)\overline{q(y)}\right)=\overline{\Lambda_{2k-1}\left(q(x)\overline{p(y)}\right)},$$

y donde

$$\Lambda_{2k}:\mathbb{C}[x]\times\mathbb{C}[\overline{y}]\longrightarrow\mathbb{C},\qquad(k=0,1,\dots,n)$$

son funcionales lineales hermíticos. Además estos funcionales satisfacen

$$\Lambda_i\left((x\overline{y}-1)\,p\left(x,\overline{y}\right)\right)=0,\qquad\forall p\in\mathbb{C}[x,\overline{y}],\qquad i=0,1,\dots,2n.$$

Demostración. Como el funcional es hermítico, ello significa que

$$\Lambda\left(p(x)\overline{q(y)}\right)=\overline{\Lambda\left(q(x)\overline{p(y)}\right)}. \tag{12}$$

Ahora bien, como $\Lambda\left((x\overline{y}-1)^{2n+1}p\left(x,\overline{y}\right)\right)=0$, entonces por el teorema 3.2

$$\Lambda\left(p(x)\overline{q(y)}\right)=\sum_{k=0}^{n}\Lambda_{2k}^{1}\left(p^{(k)}(x)\overline{q^{(k)}(y)}\right)+\sum_{k=1}^{n}\Lambda_{2k-1}\left(p^{(2k-1)}(x)\overline{q(y)}\right),$$

y

$$\overline{\Lambda\left(q(x)\overline{p(y)}\right)} = \sum_{k=0}^{n} \overline{\Lambda_{2k}^{1}\left(q^{(k)}(x)\overline{p^{(k)}(y)}\right)} + \sum_{k=1}^{n} \overline{\Lambda_{2k-1}\left(q^{(2k-1)}(x)\overline{p(y)}\right)},$$

donde los Λ_{2k}^{1}, $k = 0, 1, \ldots, n$ y Λ_{2k}, $k = 1, 2, \ldots, n$, son funcionales lineales que anulan los múltiplos de $(x\overline{y} - 1)$.

Definamos los funcionales Λ_{2k} de la siguiente manera:

$$\Lambda_{2k}\left(p(x)\overline{q(y)}\right) = \frac{\Lambda_{2k}^{1}\left(p(x)\overline{q(y)}\right) + \overline{\Lambda_{2k}^{1}\left(q(x)\overline{p(y)}\right)}}{2}, \quad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{13}$$

Definidos de esta manera, todos los Λ_{2k} serán lineales y anularán los múltiplos de $(x\overline{y} - 1)$.

Sumando las ecuaciones anteriores y teniendo en cuenta (13) y la definición de $\overline{\Lambda}_{2k-1}$, se tiene que:

$$\begin{aligned}\Lambda\left(p(x)\overline{q(y)}\right) &= \sum_{k=0}^{n} \Lambda_{2k}\left(p^{(k)}(x)\overline{q^{(k)}(y)}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\Lambda_{2k-1}\left(p^{(2k-1)}(x)\overline{q(y)}\right) + \overline{\Lambda}_{2k-1}\left(p(x)\overline{q^{(2k-1)}(y)}\right)\right].\end{aligned}$$

El factor $\frac{1}{2}$ que queda al despejar Λ no afecta, pues lo podemos incluir dentro del funcional definiendo uno nuevo que sea el doble de éste; esto no cambia en nada los resultados.

Ahora, si la forma bilineal tiene la forma (11), entonces anula a los múltiplos de $(x\overline{y} - 1)^{2n+1}$, ya que al derivar, dentro de los funcionales siempre quedará un factor común $(x\overline{y} - 1)$ que anulará a todos los funcionales. ☑

De este corolario se desprende la siguiente proposición.

Proposición 3.5. *En el caso del corolario 3.4, los funcionales Λ_i y Ψ_i (antes definidos) vienen dados en función de Λ y $\{\Lambda_j\}_{j=i+1}^{2n}$ mediante las fórmulas:*

$$\begin{aligned}\Lambda_{2i}\left(p\left(x, \overline{y}\right)\right) &= \frac{1}{(2i)!}\Lambda\left(\left(x\overline{y} - 1\right)^{2i} p\left(x, \overline{y}\right)\right) \\ &\quad - \frac{1}{(2i)!}\sum_{k=i+1}^{n} \Lambda_{2k}\left(\frac{\partial^{2k}}{\partial x^{k}\partial \overline{y}^{k}}\left(\left(x\overline{y} - 1\right)^{2i} p\left(x, \overline{y}\right)\right)\right) \\ &\quad - \frac{1}{(2i)!}\sum_{k=i+1}^{n} \Lambda_{2k-1}\left(\frac{\partial^{2k-1}}{\partial x^{2k-1}}\left(\left(x\overline{y} - 1\right)^{2i} p\left(x, \overline{y}\right)\right)\right) \\ &\quad - \frac{1}{(2i)!}\sum_{k=i+1}^{n} \overline{\Lambda}_{2k-1}\left(\frac{\partial^{2k-1}}{\partial \overline{y}^{2k-1}}\left(\left(x\overline{y} - 1\right)^{2i} p\left(x, \overline{y}\right)\right)\right).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi_{2i-1}\left(p\left(x,\overline{y}\right)\right) = {} & \frac{1}{(2i-1)!}\Lambda\left(\left(x\overline{y}-1\right)^{2i-1}p\left(x,\overline{y}\right)\right)\\ & -\frac{1}{(2i-1)!}\sum_{k=i}^{n}\Lambda_{2k}\left(\frac{\partial^{2k}}{\partial x^{k}\partial\overline{y}^{k}}\left(\left(x\overline{y}-1\right)^{2i-1}p\left(x,\overline{y}\right)\right)\right)\\ & -\frac{1}{(2i-1)!}\sum_{k=i+1}^{n}\Lambda_{2k-1}\left(\frac{\partial^{2k-1}}{\partial x^{2k-1}}\left(\left(x\overline{y}-1\right)^{2i-1}p\left(x,\overline{y}\right)\right)\right)\\ & -\frac{1}{(2i-1)!}\sum_{k=i+1}^{n}\overline{\Lambda}_{2k-1}\left(\frac{\partial^{2k-1}}{\partial \overline{y}^{2k-1}}\left(\left(x\overline{y}-1\right)^{2i-1}p\left(x,\overline{y}\right)\right)\right),\end{aligned}$$

para $i = 0, 1, \dots, n-1, n$.

Demostración. La demostración de esta proposición es similar a la de la proposición 3.3, por lo que la dejamos como un sencillo ejercicio para el lector. ☑

Con esto hemos caracterizado las formas bilineales asociadas a funcionales lineales que anulan múltiplos de $(x\overline{y}-1)^{2n+1}$, siendo éstos hermíticos o no.

3.2. **Teoremas de momentos para formas bilineales.** Estudiaremos ahora la relación que tiene esta forma de los funcionales con las matrices de momentos asociadas a éstos. Definamos por M la matriz de momentos asociada a la forma bilineal $\langle\cdot,\cdot\rangle$ (o al funcional Λ) como $(M)_{i,j} = \langle z^i, z^j\rangle = \Lambda(x^i\overline{y}^j)$. Entonces,

$$\begin{gathered}\Lambda\left(\left(x\overline{y}-1\right)^{2n+1}p\left(x,\overline{y}\right)\right)=0\\ \Updownarrow\\ \sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k\binom{2n+1}{k}(S^*)^{2n+1-k}M(S)^{2n+1-k}=0,\end{gathered}\tag{14}$$

donde la primera parte se puede interpretar como una identidad de matrices infinitas y donde $(S)_{i,j} = \delta_{i+1,j}$ es la matriz de traslación infinita.

Por tanto la doble implicación (14) caracteriza las matrices de momentos de la forma bilineal $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Veamos ahora un teorema que nos dirá qué condiciones tiene que cumplir la sucesión de momentos $s_{i,j}$ de la forma bilineal $\langle\cdot,\cdot\rangle$ para que el funcional asociado a ésta anule los múltiplos de $(x\overline{y}-1)^{2n+1}$.

Teorema 3.6. *La sucesión* $(s_{i,j})_{0\le i,\, j\le\infty}$ *es la sucesión de momentos de una forma bilineal de la forma (7), si y sólo si satisface, para todo* $i, j \geq 0$

$$\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k\binom{2n+1}{k}s_{i+2n+1-k,j+2n+1-k}=0.\tag{15}$$

Demostración. Sabemos que $\Lambda\left((x\overline{y}-1)^{2n+1}\, p\,(x,\overline{y})\right)=0$ para todo polinomio $p\in\mathbb{C}[x,\overline{y}]$, si y sólo si $\Lambda\left((x\overline{y}-1)^{2n+1}\, x^i\overline{y}^j\right)=0$ para todo $(i,j=0,1,\cdots)$. Pero $\Lambda\left((x\overline{y}-1)^{2n+1}\, x^i\overline{y}^j\right)=0$ es equivalente a

$$\Lambda\left(\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k\binom{2n+1}{k}x^{i+2n+1-k}\overline{y}^{j+2n+1-k}\right)=0. \tag{16}$$

Como $\Lambda(x^i\overline{y}^j)=s_{i,j}$, esto es equivalente a (15). ☑

Por lo tanto, tenemos que si una forma bilineal tiene la forma (7), entonces la sucesión de momentos asociada a ésta cumple la condición (15). Así queda caracterizada la sucesión de momentos de una forma bilineal de la forma antes mencionada.

Si la forma bilineal (15) es un producto escalar entonces, para que la sucesión $s_{i,j}$ sea la sucesión de momentos de esta forma bilineal, tiene que, además de cumplir con la condición del teorema anterior, ser una sucesión definida positiva, que equivale a decir que la matriz de momentos M, $(M)_{i,j}=s_{i,j}$, sea definida positiva.

El siguiente teorema aborda el caso correspondiente a la forma bilineal hermítica,

$$\langle p,q\rangle=\sum_{k=0}^{n}\Lambda_k\left(p^{(k)}(x)\overline{q^{(k)}(y)}\right). \tag{17}$$

Teorema 3.7. *La sucesión $(s_{i,j})_{0\le i,\,j\le\infty}$ es la sucesión de momentos de una forma bilineal hermítica de la forma (17), donde los $\Lambda_k:\mathbb{C}[x,\overline{y}]\to\mathbb{C}$, $k=0,1,\ldots,n$, son funcionales lineales hermíticos tales que $\Lambda_k\left((x\overline{y}-1)\,p\,(x,\overline{y})\right)=0$, $\forall p\in\mathbb{C}[x,\overline{y}]$, si y sólo si, satisface,*

$$\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k\binom{2n+1}{k}s_{i+2n+1-k,j+2n+1-k}=0, \tag{18}$$

$$\sum_{k=0}^{2i}(-1)^k\binom{2i}{k}s_{k+l,k+m}-\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{2i-1}(-1)^k\binom{2i-1}{j}s^{2k}_{j+l-k,j+m-k}=0, \tag{19}$$

donde los $s^{2k}_{l,m}$, $\forall m\in\mathbb{N}$, $k=0,1,\ldots,n$, se calculan en función de los $s_{i,j}$, $\forall i,j\in\mathbb{N}$ mediante la recurrencia:

$$s^{2k}_{l,m}=\frac{1}{(2k)!}\sum_{j=0}^{2k}(-1)^j\binom{2k}{j}s_{j+l,j+m}-\frac{1}{(2i)!}\sum_{h=k+1}^{n}\sum_{i=0}^{2k}(-1)^i\binom{2k}{i}s^{2h}_{i+l-h,i+m-h}\,, \tag{20}$$

con $k=0,1,\ldots,n-1,n$.

Demostración. En el teorema 3.6 se ve que cuando el funcional asociado a una forma bilineal del tipo (7) anula a los múltiplos de $(x\overline{y}-1)^{2n+1}$, es necesario y suficiente que la sucesión de momentos asociada a éste, satisfaga la relación (15). Ahora, cuando el funcional es hermítico y tiene la forma (17), es necesario y suficiente que la sucesión de momentos, además de satisfacer la relación (15), cumpla con la relación (19), ya que un funcional hermítico que anule a los múltiplos de $(x\overline{y}-1)^{2n+1}$ tiene la forma (11); por tanto, si queremos que éste sea de la forma (17), entonces tiene que verificarse,

$$\Lambda_{2k-1}\left(\frac{\partial^{2k-1}}{\partial x^{2k-1}}p\left(x,\overline{y}\right)\right)+\overline{\Lambda}_{2k-1}\left(\frac{\partial^{2k-1}}{\partial \overline{y}^{2k-1}}p\left(x,\overline{y}\right)\right)=0, \qquad k=1,2,\ldots,n,$$

pero esto es equivalente a que $\Psi_{2k-1}(x^i\overline{y}^j)=0$ para $k=1,2,\ldots,n$, y todo $i,j=0,1,2,\cdots$. Con esto queda demostrado el teorema. ☑

Veamos el problema de momentos para las formas bilineales de tipo Sobolev definidas positivas, que tendrán una representación integral con medidas soportadas en la circunferencia unidad. Caracterizaremos, a continuación, esta sucesión de momentos.

Corolario 3.8. *La sucesión $(s_{i,j})_{0\leq i,\,j\leq\infty}$ es la sucesión de momentos de un producto de Sobolev en la circunferencia unidad de la forma:*

$$\langle p,q\rangle=\sum_{k=0}^{n}\int_{|z|=1}p^{(k)}(z)\overline{q^{(k)}(z)}d\mu_k(z), \tag{21}$$

donde los μ_k, $k=0,1,2,\ldots,n$, son medidas positivas y finitas, si y sólo si, satisface (18), (19) y, además, que la sucesión de momentos de los funcionales Λ_{2k} en el teorema 3.2 sean definidos positivos.

Demostración. Para demostrar este corolario, basta aplicar el teorema 3.7; la condición que se exige de más es para que, usando el teorema 2.1 enunciado en el capítulo de preliminares, se puedan representar cada uno de los funcionales Λ_{2k}, $k=0,1,\ldots,n$, como una integral respecto a una medida positiva soportada en la circunferencia unidad, ya que se anulan en los múltiplos de $(x\overline{y}-1)$. ☑

3.3. **Teorema de Favard para productos escalares.** Si $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es una forma bilineal hermítica, vimos en la sección 2 cómo asociar una matriz de Hessenberg a éste. Se puede probar que la matriz D está relacionada con el funcional Λ mediante la identidad (ver [12]):

$$\Lambda\left(p\left(x,\overline{y}\right)p_i(x)\overline{p_j(y)}\right)=\left\langle p\left(D,\overline{D}^{\,t}\right)e_i,e_j\right\rangle. \tag{22}$$

Usando esta igualdad tenemos de (14) que

$$\Lambda\left(\left(x\overline{y}-1\right)^{2n+1}p\left(x,\overline{y}\right)\right)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \Lambda\left(\left(x\overline{y}-1\right)^{2n+1}x^i\overline{y}^j\right)=0, \quad \forall i,j\geq 0;$$

y por tanto, lo de la derecha, en virtud de (22), es equivalente a que:

$$\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k\binom{2n+1}{k}D^{2n+1-k}(\overline{D}^t)^{2n+1-k}=0.$$

Nótese que los elementos de D son los coeficientes de la relación de recurrencia para los polinomios ortonormales. La última identidad puede entenderse como el teorema de Favard para el producto de Sobolev en la circunferencia unidad, ya que caracteriza la matriz de Hessenberg del producto escalar de la forma (11).

Teorema 3.9 (Favard). *Sea* $(p_n(z))_{n=0}^{\infty}$ *una sucesión de polinomios que satisface la relación de recurrencia*

$$zp_n(z) = \sum_{i=0}^{n+1} d_{n,i} p_i(z). \tag{23}$$

Sea $D = (d_{i,j})_{i,j=0}^{\infty}$, *entonces*

$$\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^{k+1} \binom{2n+1}{k} D^k (\overline{D}^t)^k = 0,$$

si, y sólo si, los polinomios de la sucesión son ortogonales con respecto al producto

$$\begin{aligned} \langle p, q \rangle = & \sum_{k=0}^{n} \Lambda_{2k} \left(p^{(k)}(x) \overline{q^{(k)}(y)} \right) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left[\Lambda_{2k-1} \left(p^{(2k-1)}(x) \overline{q(y)} \right) + \overline{\Lambda}_{2k-1} \left(p(x) \overline{q^{(2k-1)}(y)} \right) \right]. \end{aligned}$$

Se ha demostrado así un análogo al teorema de Favard cuando el funcional asociado a la forma bilineal hermítica anula a los múltiplos de $(x\overline{y} - 1)^{2n+1}$, y ésta es un producto escalar.

Agradecimientos. El autor desea manifestar su agradecimiento a los dos referees anónimos por sus valiosas sugerencias y observaciones que han posibilitado una mejora sustancial en la presentación del manuscrito.

Referencias

[1] Barrios, D., Lopez, G., and Pijeira, H. The moment problem for a Sobolev inner product. *J. Approx. Theory 100* (1999), 364–380.

[2] Berriochoa, E., and Cachafeiro, A. A family of Sobolev orthogonal polynomials on the unit circle. *J. Comput. Appl. Math. 105* (1999), 163–173.

[3] Berriochoa, E., and Cachafeiro, A. Strong asymptotics inside the unit circle for Sobolev orthogonal polynomials. *Comput. Math. and Appl. 44* (2002), 253–261.

[4] Berriochoa, E., and Cachafeiro, A. On the strong asymptotics for Sobolev orthogonal polynomials on the circle. *Const. Approx. 19* (2003), 299–307.

[5] Duran, A. J. A generalization of Favard's theorem for polynomials satisfying a recurrence relation. *J. Approx. Theory 74* (1993), 83–109.

[6] Lopez, G., and Pijeira, H. Zero location and $n-$th root asymptotics of Sobolev orthogonal polynomials. *J. Approx. Theory 99* (1999), 30–43.

[7] Lopez, G., Pijeira, H., and Pérez, I. Sobolev orthogonal polynomials in the complex plane. *J. Comput. Appl. Math. 127* (2001), 219–230.

[8] Marcellán, F., and Alvarez-Nodarse, R. On the "Favard" theorem and their extensions. *J. Comput. Appl. Math. 127* (2001), 231–254.
[9] Marcellán, F., and Szafraniec, F. The Sobolev-type moment problem. *Proc. Amer. Math. Soc 128* (2000), 2309–2317.
[10] Marcellán, F., and Szafraniec, F. A matrix algorithm towards solving the moment problem of Sobolev type. *Lin. Alg. and its Appl. 331* (2001), 155–164.
[11] Pijeira, H. *Teoría de momentos y propiedades asintóticas para polinomios ortogonales de Sobolev*. Tesis doctoral, Universidad Carlos III de Madrid, 1998.
[12] Robert, L. General orthogonal polynomials. Master's thesis, University of Havana, Cuba, 2001.
[13] Robert, L., and Santiago, L. The finite section method for Hessenberg matrices. *J. Approx. Theory 123* (2003), 69–88.
[14] Robert, L., and Santiago, L. On a class of Sobolev scalar products in the polynomials. *J. Approx. Theory 125* (2003), 169–189.
[15] Shohat, J. A., and Tamarkin, J. D. *The Problem of Moments*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1963.
[16] Zagorodnyuk, S. M. Analog of Favard's theorem for polynomials connected with difference equation of 4th orde. *Serdica Math. J. 27* (2001), 193–202.
[17] Zagorodnyuk, S. M. On the moment problem of discrete Sobolev type. *Ukrain. Math. Bull. 2* (2005), 345–360. (In Russian). *2* (2005), 351–367. (In English).

(Recibido en febrero de 2008. Aceptado en mayo de 2008)

Centro de Matemáticas y Física Teórica
Instituto de Cibernética Matemática y Física
Calle 15 No. 551 e/ C y D, Vedado
Ciudad de La Habana, Cuba
e-mail: rdm@yahoo.com

REINIER DÍAZ MILLÁN

REINIER DÍAZ MILLÁN

REINIER DÍAZ MILLÁN

REINIER DÍAZ MILLÁN

e-mail: `rdm@yahoo.com`

e-mail: `rdm@yahoo.com`

e-mail: `rdm@yahoo.com`

e-mail: `rdm@yahoo.com`