Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen 41(2007)2, páginas 345-353

Tiempo local del superbrowniano en medios aleatorios

Local time of superbrownian motion in random environments

José Villa[1,a]

[1]Universidad Autónoma de Aguascalientes, Aguascalientes, México

Resumen. Se demuestra que el tiempo local del superbrowniano en medios aleatorios, con espacio de estados las medidas finitas en los borelianos de $\mathbb{R}^d$, existe cuando $d \leq 3$.

Palabras y frases clave. Tiempo local, superprocesos, procesos de medida-valor.

2000 Mathematics Subject Classification. 60G57, 60J55.

Abstract. We prove the existence of local time of superbrownian motion in random environments, with state space the finite Borelian measures on $\mathbb{R}^d$, when $d \leq 3$.

Key words and phrases. Local time, superprocesses, measure-valued processes.

1. Introducción

El *superbrowniano* se obtiene como límite de medidas de ocupación del movimiento browniano ramificado en $\mathbb{R}^d$. En efecto, se supone que el sistema inicia con un número finito de partículas en $\mathbb{R}^d$ y en cada etapa el peso de las partículas tienden a cero y la taza de ramificación aumenta; en el límite se obtiene el superbrowniano. Por otra parte, cuando la ramificación de las partículas depende de la posición del progenitor, entonces se obtiene un nuevo proceso estocástico, el superbrowniano en medios aleatorios. Dicho proceso estocástico fue introducido por Mytnik en [8]. En esta nota demostraremos que el tiempo local del superbrowniano en medios aleatorios existe cuando $d \leq 3$. Cabe mencionar que de entre los métodos conocidos, ver por ejemplo [1] y [2], para

[a]Este trabajo es parte del proyecto PIM 04-1 de la UAA.

demostrar la existencia del tiempo local, de procesos estocásticos con valores en las medidas finitas, seguiremos el introducido por Adler y Lewin en [1].

2. Preliminares

A continuación describiremos de manera sucinta como se construye el superbrowniano en medios aleatorios. Pero antes, daremos algunos conceptos relacionados con el movimiento browniano Y.

Las densidades Gaussianas las denotaremos por

$$p_t(x) = \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2t}\right), \quad x \in \mathbb{R}^d, \ \forall t > 0.$$

El semigrupo $\{S_t : t > 0\}$ correspondiente a las probabilidades de transición $\{p_t : t > 0\}$ es

$$(S_t\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} p_t(x-y)\varphi(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

para cada función medible y acotada φ. El generador infinitesimal de $\{S_t : t > 0\}$ es $\frac{1}{2}\Delta$, donde Δ es el laplaciano en $\mathbb{R}^d$ y $D(\Delta)$ es su dominio. Se cumple la siguiente relación,

$$\tfrac{1}{2}\Delta G_\varepsilon^a = aG_\varepsilon^a - p_\varepsilon, \quad \forall a > 0, \ \forall \varepsilon > 0, \tag{1}$$

donde G_ε^a es la función de Green,

$$G_\varepsilon^a(x) = \int_0^\infty e^{-at} p_{t+\varepsilon}(x)dt, \quad \forall a > 0, \ \forall \varepsilon \geq 0. \tag{2}$$

Es conocido que $G_\varepsilon^a \in D(\Delta)$, para cada $\varepsilon > 0$. Sin embargo, para demostrar la existencia del tiempo local del superbrowniano en medios aleatorios, nos será de particular interés el caso $\varepsilon = 0$, pero $G_0^a \notin D(\Delta)$; no obstante esto, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1. *Sea $\varepsilon \geq 0$. La función $G_\varepsilon^a \in L^2(\mathbb{R}^d, dx)$, para $d \leq 3$.*

La demostración aparece en la Sección 5.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Iniciamos con n partículas ubicadas arbitrariamente en $\mathbb{R}^d$. Cada partícula sigue, independientemente de las otras, una trayectoria según un movimiento browniano Y en $\mathbb{R}^d$ hasta un tiempo $1/n$. Considérese un campo aleatorio $\{\xi_k, k \in \mathbb{N}\}$ en $\mathbb{R}^d$, donde los vectores aleatorios ξ_k son independientes, idénticamente distribuidos, con media cero, con momento finito de tercer orden y función de covarianza

$$g(x,y) = E[\xi_k(x)\xi_k(y)].$$

Sea

$$\xi_k^{(n)} = \sqrt{n} \wedge \left(\xi_k \vee -\sqrt{n}\right).$$

Al tiempo $1/n$ una partícula en la posición x, condicionada a $\xi_1^{(n)}(x)$, se divide en dos con probabilidad

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{n}}\xi_1^{(n)}(x),$$

o muere con probabilidad

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{n}}\xi_1^{(n)}(x).$$

Las nuevas partículas se comportan de manera análoga a sus padres en el intervalo $[1/n, 2/n)$ y el procedimiento continua indefinidamente.

Por $M_f(\mathbb{R}^d)$ denotamos el conjunto de todas las medidas finitas en los borelianos de $\mathbb{R}^d$, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Si μ es una medida y f una función medible, entonces la integral de f con respecto a μ la denotamos por $\mu(f)$. Se define el proceso $X^{(n)}$, con valores en $M_f(\mathbb{R}^d)$, como

$$X_t^{(n)}(B) = \frac{\text{Número de partículas en } B \text{ al tiempo } t}{n}, \quad \forall t > 0, \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

Sea $C_b\left(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d\right)$ el espacio de las funciones continuas y acotadas con valores en $\mathbb{R}$, y por $\tilde{C}_b\left(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d\right) \subset C_b\left(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d\right)$ denotaremos el conjunto de las funciones $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ tal que para cada $x \in \mathbb{R}^d$ el límite $\text{lím}_{|y|\to+\infty} f(x, y)$ existe y para cada $y \in \mathbb{R}^d$ el límite $\text{lím}_{|x|\to+\infty} f(x, y)$ también existe.

Si X_0^n converge a $\mu \in M_f\left(\mathbb{R}^d\right)$ y $g \in \tilde{C}_b\left(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d\right)$, entonces X^n converge a un proceso X (para ver en qué sentido es la convergencia y los detalles de la demostración de la existencia del límite ver [8]). El proceso X tiene como espacio de estados a $M_f(\mathbb{R}^d)$ y se llama *superbrowniano en medios aleatorios*. El superbrowniano en medios aleatorios, X, es la única solución al problema de martingala siguiente. Para cada $\varphi \in D(\Delta)$

$$Z_t(\varphi) = X_t(\varphi) - \mu(\varphi) - \int_0^t X_s\left(\tfrac{1}{2}\Delta\varphi\right) ds, \tag{3}$$

es una $\mathcal{F}_t^X$-martingala continua cuadrado integrable, con $Z_0(\varphi) = 0$ y variación cuadrática

$$\langle Z(\varphi)\rangle_t = \int_0^t X_s\left(\varphi^2\right) ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{2d}} g(x, y)\varphi(x)\varphi(y)X_s(dx)X_s(dy)ds.$$

Sea $\mathcal{M}_c^2$ el espacio de las martingalas continuas cuadrado integrables definidas en $[0, T]$. Si $N = \{N_t, 0 \le t \le T\} \in \mathcal{M}_c^2$, entonces

$$\|N\| = \sqrt{E\left[\{\sup(N_t)^2 : t \le T\}\right]}$$

es una norma en $\mathcal{M}_c^2$. Más aún $\mathcal{M}_c^2$ con esta norma es un espacio de Banach.

En la fórmula de Tanaka (8), a la que queremos llegar, aparece el término $Z_t(G_0^a)$, sin embargo esto no tiene sentido ya que $G_0^a \notin D(\Delta)$. De modo que, con el propósito de obtener una expresión de este tipo para el tiempo local, necesitamos extender el dominio de $Z(\cdot)$. Esto lo hacemos a continuación, pero antes introduzcamos alguna notación. Por c, o bien $c(\cdot)$, denotaremos, en general, una constante positiva, la cual puede variar de línea en línea y por $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_{L^p}$, denotaremos las normas supremo y en L^p, respectivamente.

Proposición 2. *Si* $||d\mu/d\lambda||_\infty < \infty$ *y* $\varphi \in L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$*, entonces existe una aplicación lineal* $Z : L^2\left(\mathbb{R}^d\right) \to \mathcal{M}_c^2$ *tal que para cada* $\varphi \in D(\Delta)$ *la martingala* $Z(\varphi)$ *coincide con la martingala definida en (3). Más aún, para cada* $0 \le t \le T$,

$$E_\mu\left[\left(Z_t\left(\varphi\right)\right)^2\right] \le c(T)\left\|\varphi\right\|_{L^2}^2.$$

La demostración se difiere a la Sección 5.

3. Tiempo local

En general, el tiempo local es un funcional que nos permite dilucidar ciertos aspectos del comportamiento trayectorial de un proceso.

3.1. **Tiempo local del movimiento browniano.** El concepto de tiempo local fue introducido por P. Levy en el contexto del movimiento browniano, Y, con $d = 1$. Levy [6] definió el tiempo local del movimiento browniano en el punto x como el límite

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \tfrac{1}{2\varepsilon} \int_0^t 1_{(x-\varepsilon, x+\varepsilon)}(Y_s)ds = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_0^t \tfrac{1}{2\varepsilon} 1_{(x-\varepsilon, x+\varepsilon)}(Y_s)ds. \tag{4}$$

Este límite nos da una medida de la proporción del tiempo en $[0, t]$ que el proceso está en una vecindad de x.

Nótese que para cada función φ continua y acotada, $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$, se tiene que

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \tfrac{1}{2\varepsilon} 1_{(x-\varepsilon, x+\varepsilon)}(y)\varphi(y)dy = \varphi(x),$$

es decir, $(2\varepsilon)^{-1}1_{(x-\varepsilon,x+\varepsilon)}(\cdot)$ converge en distribución a la delta de Dirac, $\delta_x(\cdot)$. De modo que una definición informal del tiempo local, en x, es

$$L_t^x = \int_0^t \delta_x(Y_s)ds.$$

3.2. **Tiempo local para procesos con valores en las medidas.** No existe una versión completamente análoga del concepto de tiempo local para procesos con valores en $M_f\left(\mathbb{R}^d\right)$. En efecto, es conocido que el espacio $M_f\left(\mathbb{R}^d\right)$ es metrizable [2], sea d una métrica en $M_f\left(\mathbb{R}^d\right)$. Si $\mu \in M_f(\mathbb{R}^d)$, denotaremos por $B(\mu, \varepsilon)$ la bola abierta en $M_f(\mathbb{R}^d)$ con centro en μ y radio ε, es decir,

$$B(\mu, \varepsilon) = \left\{v \in M_f\left(\mathbb{R}^d\right) : d(\mu, v) < \varepsilon\right\}.$$

Si existiese una medida m definida en $\mathcal{B}\left(M_f\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$, los borelianos de $M_f(\mathbb{R}^d)$, no atómica tal que

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} m\left(B\left(\mu, \varepsilon\right)\right) = m\left(\{\mu\}\right) = 0,$$

entonces, en analogía a (4), sería natural considerar el límite

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_0^t \tfrac{1}{m(B(\mu,\varepsilon))} 1_{B(\mu,\varepsilon)}(X_s) ds. \tag{5}$$

Sin embargo, hasta ahora no se conoce, al menos por el autor de esta nota, una medida no trivial m definida en $\mathcal{B}(M_f(\mathbb{R}^d))$ para la cual el límite en (5) exista.

Si $\mu \in M_f(\mathbb{R}^d)$, el soporte de μ es el conjunto

$$\text{sop}(\mu) = \left\{x \in \mathbb{R}^d : \mu(B(x,\varepsilon)) > 0, \forall \varepsilon > 0\right\}.$$

Iscoe (en [4]) introdujo un concepto de tiempo local para procesos con valores en $M_f(\mathbb{R}^d)$ continuos y cuya ramificación es independiente de la posición de la partícula. La idea de Iscoe consiste en, dado un punto $x \in \mathbb{R}^d$, estudiar el tiempo en $[0,t]$ en el que $x \in \text{sop}(X_s)$, $0 \leq s \leq t$. De modo que se define el tiempo local de X en x como

$$L_t^x = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_0^t X_s \left(\tfrac{1}{\lambda(B(x,\varepsilon))} 1_{B(x,\varepsilon)} \right) ds, \ \forall t > 0, \tag{6}$$

(λ medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$) y se interpreta como el tiempo promedio en el intervalo $[0,t]$ en el que el soporte del proceso X toca al punto x. Cabe mencionar que Dynkin (en [3]) establece la existencia del tiempo local para una clase bastante general de procesos de ramificación continuos con valores en $M_f(\mathbb{R}^d)$.

Nótese que, al igual que antes, podemos definir de manera informal el tiempo local de X en x, como

$$L_t^x = \int_0^t X_s(\delta_x) ds.$$

Esta noción heurística del tiempo local la haremos rigurosa siguiendo las ideas de Adler y Lewin dadas en [1]. A continuación veremos los detalles.

4. Tiempo local del superbrowniano en medios aleatorios

Nótese que para cada $\varphi \in C_b\left(\mathbb{R}^d\right)$ y $x \in \mathbb{R}^d$, se tiene que

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int p_\varepsilon(x-y)\varphi(y) dy = \varphi(x),$$

es decir, $p_\varepsilon(\cdot - x) \to \delta_x(\cdot)$, en distribución, cuando $\varepsilon \downarrow 0$. Por lo tanto, en analogía a (6) consideraremos la siguiente aproximación del tiempo local de X en 0,

$$L_t^{0,\varepsilon} = \int_0^t X_s(p_\varepsilon) ds. \tag{7}$$

Es conocido que $G_0^a \notin D(\Delta)$. Sin embargo, supongamos por un momento que $G_0^a \in D(\Delta)$ y hagamos (como en [1]) los siguientes cálculos formales. De (1) obtenemos

$$\tfrac{1}{2}\Delta G_0^a = a G_0^a - \delta_0.$$

Por ende, del problema de martingala (3) resulta

$$\begin{aligned} Z_t(G_0^a) &= X_t(G_0^a) - \mu(G_0^a) - \int_0^t X_s\left(\tfrac{1}{2}\Delta G_0^a\right) ds \\ &= X_t(G_0^a) - \mu(G_0^a) - a\int_0^t X_s(G_0^a)ds + \int_0^t X_s(\delta_0)ds, \end{aligned}$$

así

$$L_t^0 = \int_0^t X_s(\delta_0)ds = \mu(G_0^a) - X_t(G_0^a) + a\int_0^t X_s(G_0^a)ds + Z_t(G_0^a). \tag{8}$$

Esta expresión es conocida como *fórmula tipo Tanaka del tiempo local.* Puesto que $G_0^a \notin D(\Delta)$, entonces la idea es considerar las aproximaciones $G_\varepsilon^a \in D(\Delta)$ y demostrar que existe el límite correspondiente.

Teorema 1. *Sea X el superbrowniano en medios aleatorios con $X_0 = \mu \in M_f\left(\mathbb{R}^d\right)$. Si $\mu \ll \lambda$, $d\mu/d\lambda \in B_b\left(\mathbb{R}^d\right)$, $\|g\|_\infty \le c$, $a > 0$ y $d \le 3$, entonces la sucesión $\left\{L_{t,\varepsilon}^0 : \varepsilon > 0\right\}$, definida en (7), converge en $L^2(P)$ a una variable aleatoria L_t^0, $t > 0$. Más aún, L_t^0, se expresa como en (8) c.s.*

Demostración. Usando (1) y (3), con $\varphi = G_\varepsilon^a$, obtenemos

$$L_t^{0,\varepsilon} = \mu(G_\varepsilon^a) - X_t(G_\varepsilon^a) + a\int_0^t X_s(G_\varepsilon^a)ds + Z_t(G_\varepsilon^a). \tag{9}$$

Ahora, para mostrar la convergencia de $L_t^{0,\varepsilon}$ en $L^2(P)$, cuando $\varepsilon \downarrow 0$, basta mostrar la convergencia de cada término del lado derecho de (9). Demostraremos que $Z_t(G_\varepsilon^a)$ converge a $Z_t(G_0^a)$ en $L^2(P)$, cuando $\varepsilon \downarrow 0$. Las otras convergencias son fáciles de trabajar (ver [7]). Debido a las Proposiciones 1 y 2 obtenemos que

$$\begin{aligned} E_\mu\left[(Z_t(G_\varepsilon^a) - Z_t(G_0^a))^2\right] &= E_\mu\left[(Z_t(G_\varepsilon^a - G_0^a))^2\right], \\ &\le c(T)\left\|G_\varepsilon^a - G_0^a\right\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Puesto que G_ε^a tiende a G_0^a en $L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$, cuando $\varepsilon \downarrow 0$, obtenemos el resultado. ☑

Observación 1. *Mytnik menciona que se espera que los resultados conocidos para el superbrowniano se cumplan también para el superbrowniano en medios aleatorios. En este caso hemos demostrado que esto es cierto para el tiempo local, ambos existen cuando $d \le 3$.*

Observación 2. *La condición inicial $X_0 = \mu \ll \lambda$ es crucial en nuestro método, pues nos permite extender el dominio de la funión $Z_t(\cdot)$ (ver Proposición 2). Sin embargo, no es la condición inicial óptima. Se puede pedir que*

$$\int_{\mathbb{R}^d} G_0^a(x-y)X_0(dy) < +\infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d,$$

y proceder como en la demostración del Lema 3.4 de [10] *para extender el domino de $Z_t(\cdot)$. En este caso también se obtiene $d \leq 3$. De modo que X_0 puede ser en particular una medida de Dirac.*

5. Demostración de las Proposiciones 1 y 2

Demostración de la Proposición 1. De la definición (2) de G^a_ε resulta

$$\begin{aligned}
\|G^a_\varepsilon\|^2_{L^2} &= c\int_0^\infty r^{d-1}dr\left(\int_\varepsilon^\infty e^{-a(t-\varepsilon)-r^2/2t}t^{-d/2}dt\right)^2\\
&\leq ce^{2a\varepsilon}\int_0^\infty r^{d-1}dr\left(\int_0^\infty e^{-at-r^2/2t}t^{-d/2}dt\right)^2\\
&= ce^{2a\varepsilon}\int_{[0,\infty)^2} dsdte^{-a(t+s)}(st)^{-d/2}\int_0^\infty r^{d-1}dre^{-r^2(1/2t+1/2s)}\\
&= ce^{2a\varepsilon}\int_{[0,\infty)^2} dsdte^{-a(t+s)}(s+t)^{-d/2}.
\end{aligned}$$

De modo que $\|G^a_\varepsilon\|_{L^2} < \infty$ si y sólo si $d < 4$. ☑

La herramienta básica para demostrar la Proposición 2 es la estimación de los dos primeros momentos de $X_t(\varphi)$.

Lema 1. *Sea $\mu \in M_f\left(\mathbb{R}^d\right)$ y $\varphi \in D(\Delta)$ no negativa. Entonces*
i) $E_\mu[X_t(\varphi)] \leq \left\|\frac{d\mu}{d\lambda}\right\|_\infty \|\varphi\|_{L^1}$.
ii) $E_\mu\left[(X_t(\varphi))^2\right] \leq e^{ct}\left\|\frac{d\mu}{d\lambda}\right\|_\infty (\mu(\mathbb{R}^d)+t)\|\varphi\|^2_{L^2}$.

Demostración. La demostración se basa en las estimaciones de los dos primeros momentos de $X_t(\varphi)$ obtenidas en el Lema 2.1 de [5]:

$$\begin{aligned}
E_\mu[X_t(\varphi)] &= \int (S_t\varphi)(x)\mu(dx)\\
&= \int (S_t\varphi)(x)\tfrac{d\mu}{d\lambda}(x)dx\\
&\leq \left\|\tfrac{d\mu}{d\lambda}\right\|_\infty \int (S_t\varphi)(x)dx\\
&= \left\|\tfrac{d\mu}{d\lambda}\right\|_\infty \|\varphi\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

Ahora vemos la segunda estimación

$$E_\mu\left[(X_t(\varphi))^2\right] \leq e^{ct}\left((\mu(S_t\varphi))^2 + \int_0^t \mu(S_s(S_{t-s}\varphi)^2)ds\right). \tag{10}$$

Usando la desigualdad de Jensen resulta

$$\begin{aligned}(\mu(S_t\varphi))^2 &\leq \mu(\mathbb{R}^d)\mu\left((S_t\varphi)^2\right)\\ &\leq \mu(\mathbb{R}^d)\mu\left(S_t\varphi^2\right)\\ &\leq \mu(\mathbb{R}^d)\left\|\tfrac{d\mu}{d\lambda}\right\|_\infty \|\varphi\|_{L^2}^2 .\end{aligned}\tag{11}$$

Consideremos ahora la estimación de

$$\begin{aligned}\mu\left(S_s(S_{t-s}\varphi)^2\right) &\leq \mu\left(S_s(S_{t-s}\varphi^2)\right)\\ &\leq \left\|\tfrac{d\mu}{d\lambda}\right\|_\infty \|\varphi\|_{L^2}^2 .\end{aligned}\tag{12}$$

Sustituyendo (11) y (12) en (10) obtenemos el resultado. ☑

Lema 2. *Sea* $t>0$ *y* $\varphi\in D(\Delta)$, *entonces*

$$E\left[(Z_t(\varphi))^2\right] \leq \left(t+\mu\left(\mathbb{R}^d\right)e^{ct}+te^{ct}+c\right)\left\|\tfrac{d\mu}{d\lambda}\right\|_\infty \|\varphi\|_{L^2}^2 .$$

Demostración. Del problema de la martigala (3) resulta

$$\begin{aligned}E\left[(Z_t(\varphi))^2\right] &= E\left[\int_0^t X_s\left(\varphi^2\right)ds+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^{2d}} g(x,y)\varphi(x)\varphi(y)X_s(dx)X_s(dy)ds\right]\\ &\leq \int_0^t E\left[X_s\left(\varphi^2\right)\right]ds + c\int_0^t E\left[(X_s(\varphi))^2\right]ds,\end{aligned}$$

y del Lema 1 obtenemos

$$\begin{aligned}E\left[(Z_t(\varphi))^2\right] &\leq \left\|\tfrac{d\mu}{d\lambda}\right\|_\infty t\,\|\varphi\|_{L^2}^2 + c\left\|\tfrac{d\mu}{d\lambda}\right\|_\infty \mu\left(\mathbb{R}^d\right)\int_0^t e^{cs}ds\,\|\varphi\|_{L^2}^2\\ &\quad +c\left\|\tfrac{d\mu}{d\lambda}\right\|_\infty \int_0^t se^{cs}ds\,\|\varphi\|_{L^2}^2\\ &= \|\varphi\|_{L^2}^2\left\|\tfrac{d\mu}{d\lambda}\right\|_\infty\left\{t+c\mu\left(\mathbb{R}^d\right)\frac{e^{ct}-1}{c}+c\left(\frac{e^{ct}}{c}(t-\frac{1}{c})+1\right)\right\}\\ &\leq \|\varphi\|_{L^2}^2\left\|\tfrac{d\mu}{d\lambda}\right\|_\infty\left\{t+\mu\left(\mathbb{R}^d\right)e^{ct}+te^{cs}+c\right\},\end{aligned}$$

como se quería demostrar. ☑

Demostración de la Proposición 2. Defínase la aplicación $Z : D(\Delta)\cap L^2\left(\mathbb{R}^d\right) \to \mathcal{M}_c^2$, con $Z(\varphi)$ dada en (3). Claramente, esta aplicación es lineal. Veamos que es acotada. De la desigualdad de Doob y el Lema 2 resulta

$$\begin{aligned}\|Z(\varphi)\|^2 &= E\left[\sup\left\{(Z_t(\varphi))^2, t\leq T\right\}\right]\\ &\leq 4E\left[(Z_T(\varphi))^2\right]\\ &\leq 4\left\{T+\mu\left(\mathbb{R}^d\right)e^{cT}+Te^{cT}+c\right\}\left\|\tfrac{d\mu}{d\lambda}\right\|_\infty \|\varphi\|_{L^2}^2 .\end{aligned}$$

Puesto que $D(\Delta)\cap L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$ es denso en $L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$, entonces existe una extensión $Z : L^2\left(\mathbb{R}^d\right) \to \mathcal{M}_c^2$ tal que $\|Z(\varphi)\| \leq c(T)\,\|\varphi\|_{L^2}$, para cada $\varphi \in L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$ (ver Teorema 1.7 de [9].) ☑

Agradecimientos. Al referi por la cuidadosa lectura del artículo y por las distintas sugerencias para mejorar la presentación. En particular por proponer la demostración corta y elegante de la Proposición 1.

Referencias

[1] Adler, R. J., and Lewin, M. Local time and Tanaka formulae for super brownian motion and super stable processes. *Stoch. Proc. Appl. 41* (1992), 45–67.

[2] Dawson, D. A. *Measure-valued Markov processes*, vol. 1541 of *Lecture Notes in Mathematics.* Springer, 1991.

[3] Dynkin, E. B. Representation for functionals of superprocesses by multiple stochastic integrals, with applications to self-intersection local times. *Astérisque 157-158* (1988), 147–171.

[4] Iscoe, I. Ergodic theory and local occupation time for measure-valued critical branching brownian motion. *Stochastics 18* (1986), 197–243.

[5] Kwon, Y., Cho, N., and Kang, H. J. Stochastic partial differencial equations for superprocesses in random environments. *Stoch. Analysis and Appl. 20*, 1 (2002), 145–163.

[6] Lévy, P. *Processus Stochastiques et Mouvement Brownien.* Gauthier-Villars, Paris, 1948.

[7] López-Mimbela, J. A., and Villa, J. Super-brownian local time: A representation and two applications. *Journal of Mathematical Sciences 121*, 5 (2004), 2653–2663.

[8] Mytnik, L. Superprocesses in random environments. *Ann. Probab. 24*, 4 (1996), 1953–1978.

[9] Reed, M., and Simon, B. *Methods of modern mathematical physics, I: Functional Analysis.* Academic Press, New York, 1980.

[10] Xiang, K. On Tanaka formulae for (α, d, β)-superprocesses. *Science in China Ser. A Mathematics 48*, 9 (2005), 1194–1208.

(Recibido en abril de 2007. Aceptado en septiembre de 2007)

Departamento de Matemáticas y Física
Universidad Autónoma de Aguascalientes
Av. Universidad No. 940, Ciudad Universitaria C. P. 20100
Aguascalientes, Ags.
e-mail: jvilla@correo.uaa.mx