Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen 40 (2006), páginas 1–14

Variantes du principe variationnel d'Ekeland et applications

Abdel Rachid El Amrouss
Université Mohamed I, Maroc

Abstract. In this note, we establish a variant of Ekeland's variational principle. This result suggests a generalization of the classical Palais-Smale condition. An example is provided showing how this is used to give the existence of a minimizer for functionals which do not satisfy the Palais-Smale condition and the one introduced by Cerami. We also prove a relation between the coercitivity of functional and the introduced compactness condition.

Keywords and phrases. Ekeland's principle variational, Palais-Smale condition.

2000 Mathematics Subject Classification. Primary : 58E05, 35J65. Secondary : 49B27.

Résumé. Dans cette note, nous établissons une variante du principe variationnel d'Ekeland. Ce résultat suggère d'introduire une généralisation de la condition de Palais-Smale classique. Un exemple montre comment ceci peut s'appliquer pour assurer l'existence d'un minimiseur pour des fonctions ne satisfaisent pas les conditions de Palais-Smale et de Cerami. Nous prouvons aussi une relation entre la coercivité de la fonction et la condition de compacité introduite.

1. Introduction

Soient E un espace métrique complet muni d'une distance d et $\Phi : E \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ une fonction semi-continue inférieurement et non identique à $+\infty$. Le principe variationnel d'Ekeland permet pour chaque $\varepsilon > 0$, chaque $\delta > 0$ et chaque $x \in E$ tel que

$$\Phi(x) \leq \inf_E \Phi + \varepsilon,$$

de construire un élement $v \in E$ minimisant la fonctionnelle Φ_v donnée par

$$\Phi_v(x) = \Phi(x) + \frac{\varepsilon}{\delta} d(x, v).$$

Si E est un espace de Banach, si $\Phi : E \to \mathbb{R}$ est dérivable au sens de Gâteaux semi-continue inférieurement et bornée inférieurement, alors le principe variationnel d'Ekeland assure l'existence d'une suite minimisante (u_n) telle que $\Phi'(u_n) \to 0$, quand $n \to \infty$. Il est connu que si Φ vérifie la condition de Palais-Smale alors Φ atteint son infimum. Mais, il est parfois possible de trouver une suite minimisante (u_n) telle que $\Phi'(u_n) \to 0$, quand $n \to \infty$, n'ayant aucune sous-suite convergente. Prenons l'exemple de la fonction $\Phi(s) = arctg(s)$.

D'autre part, on dit que la fonction $\Phi : E \to \mathbb{R}$ vérifie la condition de Cerami en un point $c \in \mathbb{R}$, si toute suite $(u_n) \subset E$ telle que

$$(1 + \|u_n\|)\Phi'(u_n) \to 0, \Phi(u_n) \to c, \quad \text{quand n} \to \infty$$

admet une sous-suite convergente.

Dans [5], Ekeland a établit que si Φ est bornée inférieurement et vérifie la condition de Cerami pour tout $c \in \mathbb{R}$ alors Φ atteint son infimum.

Cette note vise à établir une variante du principe variationnel d'Ekeland. Au paragraphe 3, cette variante nous permet de donner une généralisation à la condition de Palais-Smale et celle introduite par Cerami (cf. [3]). Nous illustrons le théorème affirmant l'existence d'un minimum sur un exemple qui ne s'adapte pas aux modes de conditions connus dans la littérature.

Dans [2], Caklovic, Li et Willem ont établit que si la fonctionnelle $\Phi : E \to \mathbb{R}$ est bornée inférieurement et satisfait la condition de Palais-Smale pour tout $c \in \mathbb{R}$ alors Φ est coercive. Dans ce travail, nous intéréssons aussi à généraliser le résultat, décrit précédemment, de [2] et d'autres dans (cf. [6], [4], [1]) en remplaçant la condition de Palais-Smale par la condition de compacité introduite au paragraphe 3.

2. **Variantes du principe variationnel d'Ekeland**

Avant d'énoncer le résultat principal de ce paragraphe, nous allons introduire la définition suivante.

Définition 1. *On dit que* $\alpha : [0, \infty[\to]0, \infty[$ *est une fonction de comparaison d'ordre* k *si pour tout* $q \geq k$ *il existe* $c, d \geq 0$ *tels que*

$$\frac{\alpha((t+1)s)}{\alpha(t)} \leq cs^q + d, \forall t, s \in \mathbb{R}^+.$$

Exemples :

(1) $\alpha(s) = (1+s)^k$

(2) $\alpha(s) = (1+s)^k Log(2+s)$

Soient (E, d) un espace métrique complet et $u \in E$. Notons par :
$\bar{B}(u, r) = \{x \in E \mid d(u, x) \leq r\}$, la boule fermée de centre u et de rayon r.
$B(u, r) = \{x \in E \mid d(u, x) < r\}$, la boule ouverte de centre u et de rayon r.

Théorème 1. *Soient* (E, d) *un espace métrique complet,* $x_0 \in E$ *fixé et* $\Phi : E \to \mathbb{R}$ *une fonction semi-continue inférieurement, bornée inférieurement. Soit*

$\alpha : [0,\infty[\to]0,\infty[$ une fonction de comparaison d'ordre k croissante continue. Alors pour chaque $\varepsilon > 0$, chaque $\delta > 0$ et chaque $u \in E$ tel que

$$\Phi(u) \leq \inf_E \Phi + \varepsilon$$

il existe une suite $(z_n)_{n\geq 1}$ de E convergente ayant les propriétés suivantes :

i) $z_1 = u, z_n \in \bar{B}(u, \gamma(u))$
avec $\gamma(u)$ est une constante positive choisie de telle sorte que la fonction $u \mapsto \frac{\gamma(u)}{1+d(x_0,u)}$ est bornée sur E.

ii) *la suite $(d(x_0, z_n))_{n\geq 1}$ est croissante,*

iii) $\sum_{n=1}^{j} \frac{d(z_n,z_{n+1})}{\alpha(d(x_0,z_{n+1}))} < 2\delta, \forall j \geq 1$,

iv) *pour* $v = \lim_{n\to\infty} z_n, \Phi(v) \leq \Phi(u)$,

v) $d(u, v) \leq min\{\delta\alpha(d(x_0, v)), \gamma(u)\}$,

vi) *pour tout* $w \in \bar{B}(u, \gamma(u)) \setminus B(u, d(x_0, u))$,

$$\Phi(w) \geq \Phi(v) - \frac{\varepsilon}{\delta\alpha(d(x_0, w))} d(v, w).$$

Démonstration. La preuve est inspirée de celle du principe variationnel d'Ekeland. Pour tout couple $(r, s) \in E^2$, on définit $r \prec s$ par les deux conditions suivantes :

$$\Phi(r) \leq \Phi(s) - \frac{\varepsilon}{\delta\alpha(d(x_0, r))} d(r, s) \tag{2.1}$$

et

$$d(x_0, r) \geq d(x_0, s). \tag{2.2}$$

Nous allons d'abord montrer que la relation $\prec$ est d'ordre. En effet,
$\prec$ est réflexive car $r \prec r$, pour tout $r \in E$;
$\prec$ est antisymétrique car si $r \prec s$ et $s \prec r$ alors $d(x_0, r) = d(x_0, s)$ et

$$\Phi(r) \leq \Phi(s) - \frac{\varepsilon}{\delta\alpha(d(x_0, r))} d(r, s) \leq \Phi(r) - \frac{2\varepsilon}{\delta\alpha(d(x_0, r))} d(r, s)$$

et par suite $d(r, s) = 0$ et $r = s$;
$\prec$ est transitive car si $r \prec s$ et $s \prec t$ alors $d(x_0, r) \geq d(x_0, s) \geq d(x_0, t)$ et

$$\begin{aligned} \Phi(r) &\leq \Phi(s) - \frac{\varepsilon}{\delta\alpha(d(x_0, r))} d(r, s) \text{ et } \Phi(\text{s}) \\ &\leq \Phi(t) - \frac{\varepsilon}{\delta\alpha(d(x_0, s))} d(t, s) \end{aligned} \tag{2.3}$$

puisque $d(t, s) \leq d(t, r) + d(r, s)$, (2.3) devient

$$\begin{aligned} \Phi(r) &\leq \Phi(s) - \frac{\varepsilon}{\delta\alpha(d(x_0, r))} [d(t, r) - d(t, s)] \text{ et } \Phi(\text{s}) \\ &\leq \Phi(t) - \frac{\varepsilon}{\delta\alpha(d(x_0, s))} d(t, s) \end{aligned} \tag{2.4}$$

ou encore

$$\Phi(r) \leq \Phi(t) + \left[\frac{\varepsilon}{\delta\alpha(d(x_0, r))} - \frac{\varepsilon}{\delta\alpha(d(x_0, s))}\right] d(t, s) - \frac{\varepsilon}{\delta\alpha(d(x_0, r))} d(r, t)$$

comme $\alpha(.)$ est croissante et $d(x_0, r) \geq d(x_0, s)$, alors

$$\begin{aligned} r \prec s \text{ et } s \prec t \quad &\Rightarrow \quad \begin{cases} \Phi(r) & \leq \Phi(t) - \frac{\varepsilon}{\delta\alpha(d(x_0,r))} d(r, t) \\ d(x_0, r) & \geq d(x_0, t) \end{cases} \\ &\Rightarrow \quad r \prec t. \end{aligned}$$

Puisque Φ est semi-continue inférieurement alors $S_s = \{r \in E \mid r \prec s\}$ avec $s \in E$, est non vide et fermé.

Nous allons construire une suite d'ensembles fermés S_n définis inductivement. Soient ε, δ, u et $\gamma(u)$ donnés par l'énoncé et soit $z_1 = u$. Posons

$$S_1 = \{w \in E \mid w \prec z_1\} \cap \bar{B}(u, \gamma(u)),$$

et choisissons $z_2 \in S_1$ tel que

$$\Phi(z_2) \leq \inf_{S_1} \Phi + \frac{1}{\alpha(d(x_0, z_1))}.$$

Ensuite, nous posons

$$S_2 = \{w \in E \mid w \prec z_2\} \cap \bar{B}(u, \gamma(u)),$$

alors $S_2 \subset S_1$. En supposant que z_i est déterminé et

$$S_i = \{w \in H \mid w \prec z_i\} \cap \bar{B}(u, \gamma(u))$$

pour $i \leq n$, et choisissons $z_{n+1} \in S_n$ tel que

$$\Phi(z_{n+1}) \leq \inf_{S_n} \Phi + \frac{1}{(n+1)\alpha(d(x_0, z_n))}. \tag{2.5}$$

Nous posons ensuite

$$S_{n+1} = \{w \in E \mid w \prec z_{n+1}\} \cap \bar{B}(u, \gamma(u))$$

et nous avons $S_{n+1} \subset S_n$.

La suite $(S_n)_n$ ainsi construite est une suite décroissante de fermés non vides et $(d(x_0, z_n))_n$ est une suite croissante bornée et par conséquent, elle converge dans l'intervalle $[d(x_0, u), d(x_0, u) + \gamma(u)]$.

Par ailleurs, dire que $w \in S_{n+1}$ signifie que

$$\begin{aligned} \Phi(w) &\leq \Phi(z_{n+1}) - \frac{\varepsilon}{\delta\alpha(d(x_0, w))} d(w, z_{n+1}) \text{ et } \mathrm{d}(\mathrm{x}_0, \mathrm{w}) \\ &\geq d(x_0, z_{n+1}) \end{aligned}$$

de (2.5), il vient

$$\Phi(w) \leq \inf_{S_n} \Phi + \frac{1}{(n+1)\alpha(d(x_0, z_n))} - \frac{\varepsilon}{\delta\alpha(d(x_0, w))} d(w, z_{n+1}),$$

ce qui entraîne que

$$d(w, z_{n+1}) \leq \frac{\delta}{\varepsilon(n+1)} \frac{\alpha(d(x_0, w))}{\alpha(d(x_0, z_n))},$$

et puisque $w \in \bar{B}(u, \gamma(u))$, il suit

$$d(w, z_{n+1}) \leq \frac{\delta}{\varepsilon(n+1)} \frac{\alpha(\gamma(u) + d(x_0, u))}{\alpha(d(x_0, z_n))}. \tag{2.6}$$

Comme la fonction $u \mapsto \dfrac{\gamma(u)}{1 + d(x_0, u)}$ est bornée alors il existe $M > 0$ tel que

$$\gamma(u) \leq M(1 + d(x_0, u)). \tag{2.7}$$

D'après (2.6), (2.7) et puisque $\alpha(.)$ est une fonction croissante, il résulte

$$d(w, z_{n+1}) \leq \frac{\delta}{\varepsilon(n+1)} \frac{\alpha((M+1)(1 + d(x_0, z_n)))}{\alpha(d(x_0, z_n))}. \tag{2.8}$$

Nous utilisons (2.8) et le fait que $\alpha(.)$ est une fonction de comparaison d'ordre k il existe $c, d > 0$ tels que

$$d(w, z_{n+1}) \leq \frac{\delta}{\varepsilon(n+1)} (c(M+1)^k + d), n \in \mathbb{N}$$

ceci montre que le diamétre de S_{n+1} tend vers 0, quand $n \to \infty$.

Puisque E est complet, il existe un unique $v \in E$ tel que $\cap_n S_n = \{v\}$ et z_n converge vers v. Comme $z_j \prec z_{j-1} \prec \ldots \prec z_1$; alors de (2.1), il résulte

$$\begin{aligned} \Phi(z_{j+1}) &\leq \Phi(z_j) - \frac{\varepsilon}{\delta\alpha(d(x_0, z_{j+1}))} d(z_j, z_{j+1}) \\ &\leq \Phi(z_1) - \sum_{n=1}^{j} \frac{\varepsilon d(z_j, z_{j+1})}{\delta\alpha(d(x_0, z_{j+1}))} \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{j} \frac{\varepsilon d(z_j, z_{j+1})}{\delta\alpha(d(x_0, z_{j+1}))} &\leq \Phi(u) - \Phi(z_{j+1}) \\ &\leq \inf_E \Phi + \varepsilon - \Phi(z_{j+1}) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Par conséquent l'assertion *iii*). Comme $v \in S_1$ nous avons $v \prec u$ est établie. Par suite, l'assertion *iv*) est satisfaite. Il en résulte aussi que

$$\frac{\varepsilon}{\delta\alpha(d(x_0, v))} d(v, u) \leq \Phi(u) - \Phi(v) \leq \inf_E \Phi + \varepsilon - \Phi(v) \leq \varepsilon.$$

l'assertion v) est démontrée.

Pour *vi*), soit $w \in E$ tel que $w \prec v$ et $w \in \bar{B}(u, \gamma(u))$, alors nous avons $w \prec z_n$ pour tout n, ce qui implique que $w \in \cap_n S_n$ et alors $w = v$. Cela signifie que v est un élément minimal dans $\bar{B}(u, \gamma(u))$, c'est à dire

$$w \in \bar{B}(u, \gamma(u)) \text{ et } w \prec v \Rightarrow w = v.$$

ce qui montre que

$$\Phi(w) > \Phi(v) - \frac{\varepsilon}{\delta\alpha(d(x_0, w))} d(v, w)$$

pour tout $w \in \bar{B}(u, \gamma(u)) \setminus B(x_0, d(x_0, v))$.
Ce qui achève la preuve. ☑

Remarque 1. *Dans le cas où E est une partie complète d'un espace vectoriel normé, nous prenons $x_0 = 0$ dans le théorème 1.*

Dans le cas où E est un espace de Hilbert et Φ dérivable au sens de Gâteaux, nous avons

Théorème 2. *Soient H un espace de Hilbert et $\Phi : H \to \mathbb{R}$ une fonction semi-continue inférieurement bornée inférieurement et dérivable au sens de Gâteaux sur H. Soit $\alpha : [0, \infty[\to]0, \infty[$ une fonction de comparaison d'ordre k croissante continue. Alors pour chaque $\varepsilon > 0$, chaque $u \in H$ tel que $\Phi(u) \leq \inf_H \Phi + \varepsilon$ et chaque $\delta > 0$ tel que*

$$\delta \leq \frac{\|u\| + 1}{2\alpha(3(1 + \|u\|))}$$

il existe $v \in H$ ayant les propriétés suivantes :

i) $\Phi(v) \leq \Phi(u)$

ii) $\frac{\|v-u\|}{\alpha(\|v\|)} \leq \delta$

iii) $\|\Phi'(v)\|\alpha(\|v\|) \leq \frac{\varepsilon}{\delta}$

Démonstration. Posons dans le théorème 1, $x_0 = 0, \gamma(u) = 2(\|u\| + 1)$ et $d(x, y) = \|x - y\|$ pour tout $x, y \in H$. Alors d'après *iv)* et *v)* du théorème 1, il existe $v \in H$ ($v = \lim_{n\to\infty} z_n, (z_n)$ la suite construite dans le théorème 1) tel que

$$\Phi(v) \leq \Phi(u) \quad \text{et } \|\mathrm{v} - \mathrm{u}\| \leq \delta\alpha(\|\mathrm{v}\|),$$

ce qui montre que *i)* et *ii)* sont satisfaites.

La relation *iii)* est établie en deux étapes :

(1) Pour tout $h \in H$ tel que $\|h\| = 1$ et tout t tel que $|t| \leq 1$ nous avons $v + th \in \bar{B}(u, \gamma(u))$. En effet, il suffit de montrer que $v \in \bar{B}(u, \|u\| + 1)$, car

$$\begin{aligned} \|v + th\| &\leq \|v\| + |t|\|h\| = \|v\| + |t| \\ &\leq 2\|u\| + 1 + 1 = \gamma(u) \end{aligned}$$

D'après *v)* du théorème 1, nous avons

$$\|v - u\| \leq \delta\alpha(\|v\|) \text{ et } \|\mathrm{v} - \mathrm{u}\| \leq \gamma(\mathrm{u}). \tag{2.9}$$

Maintenant, supposons que $v \notin \bar{B}(u, \|u\| + 1)$, donc

$$\|u\| + 1 < \|v - u\|$$

puisque $\alpha(.)$ est croissante, $\delta \leq \frac{\|u\|+1}{2\alpha(3(1+\|u\|))}$ et d'après (2.9), il résulte

$$\|u\|+1 < \|v-u\| \leq \delta\alpha(\|v\|) \leq \delta\alpha(3(1+\|u\|))) \leq \frac{\|u\|+1}{2}.$$

Ce qui est absurde.

(2) La deuxième étape est consacrée à montrer que

$$| < \Phi'(v), h > | \leq \frac{\varepsilon}{\delta\alpha(\|v\|)}, \forall h \in H, \|h\| = 1. \tag{2.10}$$

Soit $h \in H$ tel que $\|h\| = 1$, nous allons distinguer deux cas.

Cas 1. Si $< v, h > \geq 0$ ($< ., . >$ désigne le produit scalaire associé à H), alors nous avons

$$\|v+th\| = [\|v\|^2 + \|th\|^2 + 2t < v, h >]^{\frac{1}{2}},$$

il est clair que, pour tout $t \geq 0$, $\|v+th\| \geq \|v\|$. Donc, pour $t \geq 0$ suffisamment petit on a $v+th \in \bar{B}(u, \gamma(u)) \setminus B(0, \|v\|)$ et par suite d'après $vi)$ du théorème 1, il vient

$$\frac{\Phi(v+th) - \Phi(v)}{t} \geq -\frac{\varepsilon}{\delta\alpha(\|v+th\|)}, \qquad t > 0.$$

Comme Φ est Gâteaux dérivable, en faisant tendre t vers 0, nous obtenons

$$< \Phi'(v), h > \geq -\frac{\varepsilon}{\delta\alpha(\|v\|)}.$$

Cas 2. Si $< v, h > \leq 0$ nous avons $\|v+th\| \geq \|v\|$ pour tout $t \leq 0$. De même il résulte pour t suffisamment petit

$$\frac{\Phi(v+th) - \Phi(v)}{-t} \geq -\frac{\varepsilon}{\delta\alpha(\|v+th\|)}, \qquad t < 0.$$

Faisons tendre t vers 0, nous avons

$$< \Phi'(v), h > \leq \frac{\varepsilon}{\delta\alpha(\|v\|)}, \qquad \forall h, \|h\| = 1.$$

Ce qui démontre la relation (2.10) et par suite $iii)$ est satisfaite.

☑

Remarque 2. *La démonstration du théorème reste valable si nous remplaçons H par la région $D_R = \{u \in H \mid \|u\| \geq R\}$, où $R > 0$.*

Comme une conséquence, nous avons

Corollaire 1. *Soient H un espace de Hilbert et $\Phi : H \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle semi-continue inférieurement bornée inférieurement et dérivable au sens de Gâteaux sur H. Soit $\alpha(.) : [0, \infty[\to]0, \infty[$ une fonction de comparaison d'ordre k croissante continue. Alors pour toute suite minimisante $(u_n)_n$ de Φ vérifiant*

(u_n) est bornée ou bien $0 < \liminf_{n\to\infty} \dfrac{\|u_n\|}{\alpha(\|u_n\|)}$ il existe une suite minimisante $(v_n)_n$ de Φ telle que :

i) $\Phi(v_n) \leq \Phi(u_n)$

ii) $\frac{\|v_n - u_n\|}{\alpha(\|v_n\|)} \to 0$, *quand* $n \to \infty$

iii) $\|\Phi'(v_n)\|\alpha(\|v_n\|) \to 0$, *quand* $n \to \infty$.

Démonstration. Soit ε_n tel que $\varepsilon_n^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{3^n} \liminf_{n\to\infty} \frac{\|u_n\|}{\alpha(\|u_n\|)}$ et prenons $\delta_n = \varepsilon_n^{\frac{1}{2}}$, $\gamma(u_n) = 2(\|u_n\| + 1)$. Puisque α est une fonction de comparaison d'ordre k alors les conditions du théorème 2 sont satisfaites et par suite pour tout u_n il existe v_n tel que

i) $\Phi(v_n) \leq \Phi(u_n)$

ii) $\frac{\|v_n - u_n\|}{\alpha(\|v_n\|)} \leq {\varepsilon_n}^{\frac{1}{2}}$,

iii) $\|\Phi'(v_n)\|\alpha(\|v_n\|) \leq {\varepsilon_n}^{\frac{1}{2}}$.

Faisons tendre ε_n vers 0, quand $n \to \infty$, le corollaire découle. ☑

Théorème 3. *Soient H un espace de Hilbert et $\Phi : H \to \mathbb{R}$ une fonction semi-continue inférieurement bornée inférieurement, dérivable au sens de Gâteaux sur H et soit $\alpha : [0, \infty[\to]0, \infty[$ une fonction de comparaison d'ordre k croissante continue telle que $\int_1^\infty \frac{1}{\alpha(s)}\, ds = +\infty$. Alors pour chaque $\varepsilon > 0$, chaque $\delta > 0$ et chaque $u \in H$ tel que*

$$\Phi(u) \leq \inf_H \Phi + \varepsilon$$

il existe $v \in H$ ayant les propriétés suivantes :

i) $\Phi(v) \leq \Phi(u)$,

ii) $\|v - u\| \leq \delta\alpha(\|v\|)$,

iii) $\|\Phi'(v)\|\alpha(\|v\|) \leq \frac{\varepsilon}{\delta}$.

Démonstration. Posons dans le théorème 1, $x_0 = 0$ et $d(x, y) = \|x - y\|$ pour tout $x, y \in H$. Alors le théorème 1 assure l'existence d'une suite $(z_n)_{n\geq 1}$ telle que la suite $(\|z_n\|)$ est croissante et

$$\sum_{n=1}^{j} \frac{\|z_n - z_{n+1}\|}{\alpha(\|z_{n+1}\|)} < 2\delta, \forall j \geq 1. \tag{2.11}$$

Puisque $\int_1^\infty \frac{1}{\alpha(s)}\, ds = +\infty$ alors il existe $\gamma > 0$ tel que

$$\delta \leq \frac{1}{2} \int_{\|u\|}^{\|u\|+\gamma} \frac{1}{\alpha(s)}\, ds. \tag{2.12}$$

Posons $v = \lim_{n\to\infty} z_n$ et $\gamma(u) = 2\|u\| + \gamma + 1$ (on rappele ici que $\gamma(u)$ est la constante donnée dans l'énoncé du théorème 1).

D'après $iv)$ et $v)$ du théorème 1, nous obtenons

$$\Phi(v) \leq \Phi(u) \quad \text{et} \quad \|\mathrm{v}-\mathrm{u}\| \leq \delta\alpha(\|\mathrm{v}\|).$$

Pour établir l'assertion $iii)$, il suffit de montrer que pour tout $h \in H$ tel que $\|h\| = 1$ nous avons $v + th \in \bar{B}(u, \gamma(u))$ pour tout t est suffisamment petit.

Pour ceci, nous allons d'abord établir que

$$\|z_n\| \leq \|u\| + \gamma, \forall n \geq 1. \tag{2.13}$$

En effet, supposons par l'absurde qu'il existe $j \geq 1$ tel que $\|z_{j+1}\| > \|u\| + \gamma$. D'où, d'après (2.12) et puisque α est croissante, il vient

$$\begin{aligned} 2\delta &\leq \int_{\|z_1\|}^{\|z_{j+1}\|} \frac{1}{\alpha(s)}\, ds \\ &\leq \sum_{n=1}^{j} \int_{\|z_n\|}^{\|z_{n+1}\|} \frac{1}{\alpha(s)}\, ds \\ &\leq \sum_{n=1}^{j} \frac{\|z_{n+1}\| - \|z_n\|}{\alpha(\|z_{n+1}\|)} \\ &\leq \sum_{n=1}^{j} \frac{\|z_n - z_{n+1}\|}{\alpha(\|z_{n+1}\|)}. \end{aligned}$$

Ce qui contredit (2.11). Utilisons (2.13), nous avons

$$\|v - u\| \leq 2\|u\| + \gamma. \tag{2.14}$$

Donc, pour $|t| \leq 1$ et $h \in H$ tel que $\|h\| = 1$ et de (2.14) nous obtenons

$$\|v + th - u\| \leq 2\|u\| + \gamma + 1 = \gamma(u).$$

Finalement, la deuxième étape de la preuve du théorème 2 permet de conclure. Ce qui achève la preuve. ☑

Remarque 3. *Le résultat du théorème 3 reste valable si nous remplaçons H par $D_R = \{u \in H \mid \|u\| \geq R\}$ où $R > 0$.*

Corollaire 2. *Sous les conditions du corollaire 1 avec $\int_1^\infty \frac{1}{\alpha(s)}\, ds = +\infty$, pour toute suite minimisante $(u_n)_n$ de Φ il existe une suite minimisante $(v_n)_n$ de Φ vérifiant $i), ii), iii)$ du corollaire 1.*

3. **Applications**

Dans toute la suite nous supposons que $\Phi : H \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle semi-continue inférieurement bornée inférieurement, dérivable au sens de Gâteaux sur H et $\alpha : [0, \infty[\to]0, \infty[$ une fonction de comparaison d'ordre k croissante continue. Posons $\Phi^c = \{u \in H \mid \Phi(u) \leq c\}$.

Définition 2. *On dit que Φ satisfait (C_c^α) si toute suite $(u_n)_n \subset H$ telle que*

$$\Phi(u_n) \to c \text{ et } \Phi'(\mathrm{u_n})\alpha(\|\mathrm{u_n}\|) \to 0,$$

contient une sous-suite convergente.

Remarque 4. *Notons que lorsque $\alpha(s) = cte$, la condition (C_c^α) est la condition de Palais-Smale et lorsque $\alpha(s) = s + 1$, la condition (C_c^α) est celle introduite par Cerami.*

Maintenant, nous donnons un exemple de fonctions qui ne s'adaptent pas aux modes de restrictions imposées dans les travaux connus.

Exemple 1. *Soit $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par*

$$\Phi(u) = \frac{1}{(u^2+1)^{\frac{r-1}{2}}}, \qquad r > 1.$$

Nous vérifions facilement que Φ satisfait la condition (C_0^α), avec $\alpha(s) = (s+1)^r$.

Mais Φ ne satisfait pas ni la condition de Palais-Smale ni la condition de Cerami au point 0.

Théorème 4. *Soit H un espace de Hilbert et $a = \inf_H \Phi$. Si $\Phi^{a+\varepsilon}$ rencontre l'ensemble $A_\delta = \left\{u \in H \mid \delta \leq \frac{\|u\|+1}{\alpha(3(1+\|u\|))}\right\}$ pour un certain $\delta > 0$, et pour tout ε tel que $0 < \varepsilon < \delta$. De plus, si Φ vérifie la condition (C_a^α) alors Φ atteint son infimum sur H en un point u pour lequel $\Phi'(u) = 0$.*

Démonstration. Pour $\varepsilon = \frac{1}{n}$, avec $n \geq 1$, il existe alors une suite (u_n) telle que

$$\Phi(u_n) \leq a + \frac{1}{n} \qquad \text{et} \qquad \delta \leq \frac{\|\mathrm{u_n}\|+1}{\alpha(3(1+\|\mathrm{u_n}\|))}, \qquad \forall \mathrm{n} \geq 1.$$

En conséquence, (u_n) est une suite minimisante de Φ vérifiant (u_n) est bornée ou $0 < \liminf\limits_{n\to\infty} \frac{\|u_n\|}{\alpha(1+\|u_n\|)}$.

Soit (v_n) la suite donnée par le corollaire 1 vérifiant :

i) $\Phi(v_n) \leq \Phi(u_n)$,

ii) $\|\Phi'(v_n)\|\alpha(\|v_n\|) \to 0$, quand $n \to \infty$.

Puisque Φ satisfait (C_a^α), alors (v_n) contient une sous-suite convergente notée aussi (v_n) et qui est évidement minimisante pour Φ. Soit $u = \lim_{n\to\infty} v_n$, d'après *i)* et *ii)* le résultat découle. ☑

Ensuite, nous illustrons le théorème 4 sur un exemple où la fonction Φ vérifie les conditions du théorème 4 sans que la condition de Palais-Smale et celle de Cerami ait lieu.

Exemple 2. *Posons*

$$f(s) = \begin{cases} arctg(s) & \text{si s} \leq 0 \\ sin(s) & \text{si } 0 \leq \text{s} \leq 2\pi \\ arctg(s-2\pi) & \text{si s} \geq 2\pi. \end{cases}$$

et $\Phi(u) = f(2\pi + Log(\|u\|^2 + 1) - (\|u\|^2 + 1)^{\frac{1}{2}})$ *pour* $u \in H$. *Alors* Φ *est de classe* C^1 *puisque* $u \mapsto Log(\|u\|^2 + 1)$, $u \mapsto (\|u\|^2 + 1)^{\frac{1}{2}})$ *et* f *sont de* C^1. *On a aussi* $a = inf_H \Phi = -1$ *et* $\Phi^{-1+\varepsilon}$ *rencontre l'ensemble borné non vide* $A = \{u \in H \mid Log(\|u\|^2 + 1) - (\|u\|^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \in [-2\pi, 0]\}$ *pour tout* $\varepsilon > 0$. *D'autre part,* Φ *vérifie* (C_c^α), *avec* $\alpha(s) = s^2 + 1$ *et par suite le théorème 4 assure que* Φ *atteint son infimum en un point* u_0 *pour lequel* $\Phi'(u_0) = 0$.

Corollaire 3. *Soit* H *un espace de Hilbert et* $a = \inf_H \Phi$. *S'il existe un borné* K *tel que pour tout* $\varepsilon > 0$ *:*

$$\Phi^{a+\varepsilon} \cap K \neq \emptyset$$

et si Φ *vérifie la condition* (C_a^α) *alors* Φ *atteint son infimum sur* H *en un point* u *pour lequel* $\Phi'(u) = 0$.

Démonstration. Le résultat découle du théorème 4. ☑

Remarque 5. *Si pour tout* $\varepsilon > 0$ $\Phi^{a+\varepsilon}$ *rencontre un ensemble borné* K, *alors* Φ *est coercive.*

Théorème 5. *Soit* H *un espace de Hilbert et* $a = \inf_H \Phi$. *Si* α *vérifie* $\int_1^\infty \frac{1}{\alpha(s)}\, ds = +\infty$, *et si* Φ *vérifie la condition* (C_a^α) *alors* Φ *atteint son infimum sur* H *en un point* u *pour lequel* $\Phi'(u) = 0$.

Démonstration. Posons dans le théorème 3, $\varepsilon = (\frac{1}{n})^2, \delta = \frac{1}{n}$ avec $n \geq 1$, et choisissons une suite (u_n) telle que

$$\Phi(u_n) \leq a + \frac{1}{n}.$$

Il est clair que (u_n) est une suite minimisante de Φ.

Soit (v_n) la suite donnée par le théorème 3 vérifiant :

i) $\Phi(v_n) \leq \Phi(u_n)$

ii) $\|\Phi'(v_n)\|\alpha(\|v_n\|) \to 0$, quand $n \to \infty$.

Par (C_a^α), (v_n) contient une sous-suite convergente notée aussi (v_n). Posons $u = \lim_{n\to\infty} v_n$ et d'après *i)* et *ii)* le résultat découle. ☑

Remarque 6. *La condition* $\int_1^\infty \frac{1}{\alpha(s)}\, ds = +\infty$ *est nécessaire dans le théorème 5. En effet, prenons l'exemple de la fonction* $\Phi(u) = arctg(u)$ *et posons* $a = \inf \Phi$. *Il est immédiat de vérifier que* Φ *vérifie* (C_a^α) *pour* $\alpha(s) = (s+1)^2$ *et* Φ *n'atteint pas son infimum. Notons ici que* $\int_1^\infty \frac{1}{(s+1)^2}\, ds < +\infty$.

L'objectif du théorème suivant est de généraliser les résultas donnés dans [2] et [4].

Théorème 6. *Si* Φ *est bornée inférieurement, alors*

(1) *Si* $\liminf_{\|u\|\to\infty} \Phi(u) = d < \infty$ *alors pour que* Φ *vérifie* (C_d^α) *il est nécessaire que* $\int_1^\infty \frac{1}{\alpha(s)}\, ds < +\infty$.

(2) *Si* $\alpha(s) = (1+s)\beta(1+Log(1+s))$*, avec* $\beta : [0,\infty[\to]0,\infty[$ *une fonction de comparaison d'ordre* k *croissante continue vérifiant* $\int_1^\infty \frac{1}{\beta(s)}\,ds = +\infty$*, et* Φ *satisfait* (C_c^α) *pour tout* $c \in \mathbb{R}$ *alors* Φ *est coercive.*

Démonstration. Pour la première assertion, raisonnons par l'absurde. Il est clair que la suite de terme général $m(n) = \inf\limits_{\|u\|\geq n} \Phi$ est croissante et tend vers d quand $n \to \infty$.

Soit $\varepsilon_n > 0$ et choisissons u_n tel que

$$\|u_n\| \geq 2n, \Phi(u_n) \leq m(2n) + \varepsilon_n^2 \leq d + \varepsilon_n^2.$$

Appliquons le théorème 3 et la remarque 3 dans $D_n = \{u \in H \mid \|u\| \geq n\}$, avec $\delta_n = \varepsilon_n$, il existe v_n tel que

$$\|v_n\| \geq n, \Phi(v_n) \leq \Phi(u_n) \text{ et } \|\Phi'(\mathrm{v_n})\|\alpha(\|\mathrm{v_n}\|) \leq \frac{\varepsilon_\mathrm{n}^2}{\delta_\mathrm{n}} = \varepsilon_\mathrm{n} \tag{3.1}$$

Comme ε_n est arbitraire on peut supposer $\varepsilon_n \to 0$, quand $n \to +\infty$ et faisons tendre n vers ∞ dans (3.1), il résulte

$$\|v_n\| \to \infty, \Phi(v_n) \to d, \|\Phi'(v_n)\|\alpha(\|v_n\|) \to 0 \text{ quand n} \to \infty.$$

Ce qui contredit la définition de (C_d^α).

Maintenant, nous allons établir l'assertion 2. Supposons par l'absurde que $\liminf\limits_{\|u\|\to\infty} \Phi(u) = d < \infty$. Considérons la distance géodésique

$$d(x,y) = \inf\{\ell(c) = \int_0^1 \frac{\|c'(t)\|}{1+\|c(t)\|}\,dt \mid c \in C^1([0,1],H), c(0) = x, c(1) = y\}.$$

On rappele ici que ℓ est la longueur d'un chemin joignant x et y. Nous vérifions aisément que d est une distance sur H. Comme H est un espace de Hilbert la plus petite longueur d'un chemin joignant x et y est celle du segment $[x,y]$. Donc, l'infimum de $\{\ell(c) = \int_0^1 \frac{\|c'(t)\|}{1+\|c(t)\|}\,dt \mid c \in C^1([0,1],H), c(0) = 0, c(1) = x\}$ est atteint pour le segment joignant les points 0 et x à savoir : $c(t) = tx$. Par suite, $d(0,x) = Log(1+\|x\|)$ pour tout $x \in H$. Soient ε_n et u_n tels que

$$\|u_n\| \geq 2n, \Phi(u_n) \leq d + \varepsilon_n^2.$$

alors il existe une suite (v_n) tel que $\|v_n\| \geq n$ vérifiant les propriétés $i)$ à $vi)$ du théorème 1.

Utilisons les mêmes arguments de la démonstration du théorème 2 pour montrer que

$$d(0, v_n + th) = Log(1 + \|v_n + th\|) \geq d(0, v_n) = Log(1 + \|v_n\|) \tag{3.2}$$

si $t \geq 0$ et $< v_n, h > \geq 0$.

Posons $\gamma(u_n) = 2d(0,u_n) + \gamma + 1$, $[\gamma(u_n)$ est la constante prise dans le théorème 1], et d'une façon analogue pour avoir (2.14), nous obtenons aussi

$$d(u_n, v_n) \leq 2d(0,u_n) + \gamma. \tag{3.3}$$

Par suite, pour t suffisamment petit, $h \in H$ tel que $\|h\| = 1$ et d'après (3.3), nous avons

$$d(u_n, v_n + th) \leq 2d(0, u_n) + \gamma + 1.$$

Dans ces conditions, nous appliquons $vi)$ du théorème 1 et on a donc pour t suffisamment petit

$$\Phi(v_n + th) \geq \Phi(v_n) - \frac{\varepsilon_n^2}{\delta_n \beta(1 + Log(1 + \|v_n + th\|))} d(v_n, v_n + th), \qquad (3.4)$$

Puisque $d(v_n, v_n + th) \leq \|h\| \int_0^t \frac{ds}{1+\|v_n+sh\|}$ si $t \geq 0$ et divisons dans (3.4) les deux membres par t suffisamment petit positif, nous obtenons

$$\frac{1}{t}[\Phi(v_n + th) - \Phi(v_n)] \geq -\frac{\varepsilon_n \|h\|}{\beta(Log(1 + \|v_n + th\|))} \frac{1}{t} \int_0^t \frac{ds}{1 + \|v_n + sh\|}.$$

Posons $\delta_n = \varepsilon_n$ et faisons tendre t vers 0, il résulte

$$< \Phi'(v_n), h > \geq -\frac{\varepsilon_n \|h\|}{(1 + \|v_n\|)\beta(1 + Log(1 + \|v_n\|))}, \qquad \text{si } < v_n, h > \geq 0.$$

Changeons h par $-h$ si $< v_n, h > \leq 0$, il suit

$$< \Phi'(v_n), h > \leq \frac{\varepsilon_n \|h\|}{(1 + \|v_n\|)\beta(1 + Log(1 + \|v_n\|))}.$$

Pour $\varepsilon_n \to 0$, quand $n \to \infty$, nous obtenons

$$\|v_n\| \to \infty, \Phi(v_n) \to d \text{ et } \Phi'(\mathrm{v_n})\alpha(1 + \|\mathrm{v_n}\|) \to 0, \text{ quand n} \to \infty.$$

Ce qui est absurde et ce qui achève la démonstration. ☑

Remarque 7. *La condition* $\int_1^\infty \frac{1}{\alpha(s)} ds < +\infty$ *n'est pas suffisante dans la première assertion du théorème 6 comme le montre l'exemple suivant :*
Exemple. *Soient* $r > 1$ *et* $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$\Phi(u) = \frac{1}{(u^2 + 1)^{\frac{r}{2}}}.$$

Nous vérifions facilement que $\liminf_{|u| \to \infty} \Phi(u) = 0$, $\int_1^\infty \frac{1}{(s+1)^r} ds < +\infty$ *et* Φ *ne satisfait pas la condition* (C_0^α), *avec* $\alpha(s) = (s + 1)^r$.

Références

[1] H. Brezis & L. Nirenberg, Remarks on finding critical points, *Comm. Pure Appl. Math.*, **64** (1991) 939–963.

[2] l. Caklovic, S. J. Li & M. Willem, A note on Palais–Smale condition and coercivity, *Diff. Int. Eqn.*, **3** (1990) 799–800.

[3] G. Cerami, Un criterio de esistenza per i punti critici su varietá ilimitate, *Rc. Ist. Lomb. Sci. Lett*, **121** (1978) 332–336.

[4] D. G. Costa & eSilva Elves De B., The Palais-Smale condition versus coercivity, *Nonlinear Analysis*, **16** (1991) 371–381.

[5] I. Ekeland, *Convexity methods in Hamiltonian mechanics*, Springer, Berlin, 1990.

[6] I. Ekeland, On the variational principle, *J. Math. Anal. Applic.*, **47** (1974) 324–357.

(Recibido en abril de 2005. Aceptado en febrero de 2006)

Département de Mathématiques et D'informatique
Faculté des Sciences
Université Mohamed I
Oujda, Maroc
e-mail : amrouss@sciences.univ-oujda.ac.ma