Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen 38 (2004), páginas 17–25

Imágenes inversas de sectores de funciones en el espacio de Bergman con peso

Fernando Pérez-González
Universidad de La Laguna, España

Julio César Ramos Fernández
Universidad de Oriente, Venezuela

Abstract. Let $\mathbb{D}$ be the open unit disk in the complex plane. For $\varepsilon > 0$ we consider the sector $\Sigma_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \varepsilon\}$. We will prove that for certain classes of functions f in the weighted Bergman's space $A^p_\alpha(\mathbb{D})$ such that $f(0) = 0$, the A^p_α norm is obtained by integration over $f^{-1}(\Sigma_\varepsilon)$, that is to say

$$\int_{f^{-1}(\Sigma_\varepsilon)} |f(z)|^p dA_\alpha(z) > \delta \|f\|^p_{\alpha,p}.$$

This result extends a theorem of Marshall and Smith in [MS].

Keywords and phrases. Bergman's spaces, hiperbolic, metric, Bloch's lemma.

2000 Mathematics Subject Classification. Primary: 30C25. Secondary: 30H05, 46E15.

Resumen. Sea $\mathbb{D}$ el disco unitario en el plano complejo. Sea $\varepsilon > 0$ y consideremos el sector $\Sigma_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \varepsilon\}$. Probaremos que para ciertas clases de funciones f en el espacio de Bergman con peso $A^p_\alpha(\mathbb{D})$, que fijen el origen, la norma se obtiene por integración sobre $f^{-1}(\Sigma_\varepsilon)$, es decir, se cumple

$$\int_{f^{-1}(\Sigma_\varepsilon)} |f(z)|^p dA_\alpha(z) > \delta \|f\|^p_{\alpha,p}.$$

Este resultado extiende un teorema de Marshall y Smith [MS].

1. Introducción

Sea $\mathbb{D}$ el disco unidad del plano. Para $\alpha > -1$ y $p > 0$, denotaremos por $A^p_\alpha = A^p_\alpha(\mathbb{D})$ al espacio de Bergman con peso de las funciones holomorfas en $\mathbb{D}$ tales que

$$\|f\|^p_{\alpha,p} = \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p dA_\alpha(z) < \infty,$$

donde $dA_\alpha(z) = (\alpha+1)(1-|z|^2)^\alpha dA(z) = \frac{\alpha+1}{\pi} r(1-r^2)^\alpha dr d\theta$, con $z = x + iy = re^{i\theta}$. Para $\varepsilon > 0$, consideremos el sector

$$\Sigma_\varepsilon = \{w \in \mathbb{C} : |arg\,(w)| < \varepsilon\}.$$

Dado $\varepsilon > 0$, estamos interesados en encontrar valores de los parámetros $\alpha > -1$ y $p \geq 1$ tales que

$$\int_{f^{-1}(\Sigma_\varepsilon)} |f\,(z)|^p \, dA_\alpha\,(z) \geq \delta \int_{\mathbb{D}} |f\,(z)|^p \, dA_\alpha\,(z)\,, \tag{1}$$

para toda función $f \in A^p_\alpha$ con $f(0) = 0$, donde $\delta > 0$ es una constante que no dependa de la función f.

Nuestro interés proviene de un artículo de D. Marshall y W. Smith [MS] donde analizan la desigualdad (1) para funciones en los espacios de Bergman (sin peso) clásicos A^p. De hecho, el principal resultado de [MS, Theorem 1.1] asegura que para *todo* $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ de modo que la estimación (1) vale para cualquier función de A^1 univalente que fije el origen. Quedando pendiente la veracidad de esa proposición si omitimos la condición de que f es univalente. En el caso $p > 1$ ($\alpha = 0$), Marshall y Smith encontraron un ángulo $\varepsilon_1 = \varepsilon_1\,(p) > 0$ tal que la desigualdad (1) no vale, en general, para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$.

La clave del contraejemplo es considerar, para $n \in \mathbb{N}$, transformaciones de Riemann $f_n : \mathbb{D} \to \Omega_n$, donde $\Omega_n = \mathbb{C} \setminus (\Sigma_{\varepsilon_n} + 1)$,

$$\varepsilon_n = \frac{p-1}{p}\pi - \frac{\alpha}{2p}\pi + \frac{1}{n}, \tag{2}$$

y normalizado de tal forma que $f_n(0) = 0$, $f'_n(0) > 0$. Aquí los parámetros $\alpha > -1$ y $p \geq 1$, se seleccionan de tal manera que $\varepsilon_n > 0$; también se asume que n es lo suficientemente grande para que $\varepsilon_n < \pi$. Se comprueba que para $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_\infty$, las integrales sobre la imágenes inversas de Σ_{ε_n}, están uniformemente acotadas por una constante; mientras que

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{\alpha,p} = \infty.$$

En este ejemplo, vemos que dado $p \geq 1$, debemos seleccionar $\alpha > -1$ tal que $\alpha < 2p - 2$; pero ¿qué pasa si $\alpha \geq 2p - 2$?

Probaremos que a pesar del contraejemplo la desigualdad (1) sigue siendo cierta *para todo* $\varepsilon > 0$ y para toda función univalente que fije el origen $f \in A^p_\alpha$ con $p \geq 1$ y $\alpha > 2p - 1$. Formalmente:

Teorema 1.1. *Sean $\alpha > -1$ y $p \geq 1$ tales que $\alpha > 2p-1$. Entonces para todo $\varepsilon > 0$, existe una constante $\delta > 0$, que depende solamente de p, α y ε, tal que*

$$\int_{f^{-1}(\Sigma_\varepsilon)} |f(z)|^p dA_\alpha(z) > \delta \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p dA_\alpha(z) \tag{3}$$

para toda función univalente $f \in A^p_\alpha$ que satisface $f(0) = 0$.

La sección 3 se ocupa de dar la demostración del Teorema 1.1 cuya prueba, además de bien conocidos resultados de aplicaciones conformes, requiere de una versión del Teorema de Bloch, el cual demostramos en la sección 2, y de un lema que se refleja una estimación que proviene de la "abundancia de masa en el origen".

Como corolario de la demostración de este Teorema, tenemos el siguiente resultado para funciones en la bola unidad de los espacios de Bergman:

Corolario 1.2. *Fijemos $p > 0$ y $\alpha > -1$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe una constante $\delta = \delta(\alpha, p, \varepsilon) > 0$ tal que*

$$\int_{f^{-1}(\Sigma_\varepsilon)} |f(z)|^p \, dA_\alpha(z) > \delta \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \, dA_\alpha(z). \tag{4}$$

para cualquier $f \in A^p_\alpha$ univalente con $f(0) = 0 = f'(0) - 1$ y $\|f\|_{\alpha,p} \leq 1$.

2. Teorema de Bloch para funciones en la bola unidad de los espacios de Bergman

Antes de dar la prueba del Teorema 1.1, vamos a recordar, a modo de preliminares, algunos hechos relativos a aplicaciones conformes que precisaremos.

Para $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$, sea Γ la colección de todas las curvas en $\mathbb{D}$ que conectan puntos z_1 con z_2. La distancia hiperbólica de z_1 a z_2, denotada por $\beta(z_1, z_2)$, se define como

$$\beta(z_1, z_2) := \inf_{\gamma \in \Gamma} \left\{ \int_\gamma \frac{|dz|}{1 - |z|^2} \right\}.$$

En el caso que uno de los puntos sea el origen, dado que el ínfimo se alcanza cuando el arco γ es un segmento radial, se tiene

$$\beta(0, z) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right). \tag{5}$$

Para un dominio simplemente conexo Ω, se define la distancia hiperbólica de dos puntos $w_1, w_2 \in \Omega$ por

$$\beta_\Omega(w_1, w_2) := \beta(\varphi(w_1), \varphi(w_2)),$$

donde φ es cualquier transformación conforme de Ω sobre el disco unidad $\mathbb{D}$. Esta definición en particular implica que la distancia hiperbólica es invariante bajo transformaciones conformes. Para $z \in \mathbb{D}$, denotamos por $\delta_\Omega(f(z))$ a la distancia euclídea de $f(z)$ a $\partial\Omega$, la frontera de Ω.

Ya que vamos a trabajar con funciones f holomorfas en $\mathbb{D}$ que dejan invariante el origen, será útil emplear distintas notaciones para discos centrados en el origen que estén contenidos en $\mathbb{D}$ o en $f(\mathbb{D})$. Así, si $R < 1$, pondremos $D_R := D(0, R)$ y para $r > 0$, escribiremos $B_r := B(0, r) \subset f(\mathbb{D})$.

A continuación recopilamos algunos teoremas de distorsión de Koebe que pueden verse, por ejemplo en la obra de Ch. Pommerenke [Po] que usaremos en las prueba de nuestros resultados.

Teorema 2.1 (Koebe). *Sea g una transformación conforme del disco D_R, $R < 1$, sobre el dominio Ω con $g(0) = 0$. Para cualquier $z \in D_R$ se tiene que*

(i) $$|g(z)| \geq R^2 |g'(0)| \frac{|z|}{(R + |z|)^2}.$$

(ii) $$R^2 |g'(0)| \frac{R - |z|}{(R + |z|)^3} \leq |g'(z)| \leq \frac{4}{R} \delta_\Omega(0) e^{3\beta_\Omega(0, g(z))}.$$

(iii) $$\frac{1}{4R}\left(R^2 - |z|^2\right)|g'(z)| \leq \delta_\Omega(g(z)) \leq \frac{1}{R}\left(R^2 - |z|^2\right)|g'(z)|.$$

Sea Ω un dominio simplemente conexo, sean $w_1, w_2 \in \Omega$ y denotemos por $\widetilde{\Gamma}$ la colección de arcos en Ω que conectan w_1 con w_2. Se define la distancia cuasi-hiperbólica de w_1 a w_2 como

$$k_\Omega(w_1, w_2) := \inf_{\widetilde{\gamma} \in \widetilde{\Gamma}} \left\{ \int_{\widetilde{\gamma}} \frac{|ds|}{\delta_\Omega(s)} \right\}. \tag{6}$$

La distancia cuasi-hiperbólica es más manejable que la distancia hiperbólica y tiene la gran ventaja de que ambas son comparables como probaron Gehring y Palka [GP]. Más precisamente se tiene que

Teorema 2.2 (Gehring-Palka). *Sea Ω un dominio simplemente conexo del plano. Para $w_1, w_2 \in \Omega$ se verifica que*

$$\frac{1}{2}\beta_\Omega(w_1, w_2) \leq k_\Omega(w_1, w_2) \leq 2\beta_\Omega(w_1, w_2). \tag{7}$$

En el siguiente lema se recoge una versión del teorema de Bloch para funciones en la bola unidad del espacio A^p_α con $\alpha > -1$, $p \geq 1$.

Lema 2.3. *Sean $\alpha > -1$ $p \geq 1$. Existen constantes positivas ϱ y R, tales que si $f \in A^p_\alpha$, con $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$ y $\|f\|_{\alpha,p} = 1$, entonces f es univalente en el disco $D(0, R)$ y se verifica que*

$$B\left(0, \frac{R}{6\varrho}\right) \subset f(D(0, R)) \subset B(0, \varrho R).$$

Además las constantes se pueden tomar como

$$\varrho = 2^{\frac{2}{p}(\alpha+1+2p)} \qquad y \qquad R = \frac{1}{2(\varrho + 1)}|f'(0)|. \tag{8}$$

Demostración. Dado que f es analítica en el disco $D\left(0, \frac{1}{2}\right)$, entonces por la fórmula integral de Cauchy para la derivada podemos escribir

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{\left((1-R_1^2)^{\alpha+1} - (1-R_2^2)^{\alpha+1}\right)\left(R_1 - \frac{1}{2}\right)^2} \int\limits_{\{R_1<|w|<R_2\}} |f(w)|\, dA_\alpha(w), \quad (9)$$

donde $|z| < \frac{1}{2} < R_1 < R_2 < 1$. Si $p > 1$, podemos usar la desigualdad de Hölder y el hecho de que f es de norma igual a 1, para obtener que

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{\left((1-R_1^2)^{\alpha+1} - (1-R_2^2)^{\alpha+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(R_1 - \frac{1}{2}\right)^2}$$

para todo $|z| < \frac{1}{2} < R_1 < R_2 < 1$. Fijando $R_1 = \frac{3}{4}$ y haciendo que $R_2 \to 1$ obtenemos

$$|f'(z)| \leq 2^{\frac{2}{p}(\alpha+1+2p)} := \varrho, \qquad |z| < \frac{1}{2}. \quad (10)$$

Nótese, además, que (10) también vale para $p = 1$ en virtud de (9). Esta última desigualdad implica que $|f'(z) - f'(0)| < \varrho + 1$ para todo $|z| < \frac{1}{2}$. Por el Lema de Schwarz resulta que

$$|f'(z) - f'(0)| \leq 2(\varrho + 1)|z|, \qquad z \in D\left(0, \frac{1}{2}\right).$$

Poniendo, $R = \frac{1}{2(\varrho+1)}|f'(0)|$, se obtiene que

$$|f'(z) - f'(0)| < |f'(0)|, \qquad |z| < R.$$

En virtud de [Co, p. 293] se concluye que f es univalente en el disco $D(0, R)$.

Por otra parte, tomenos $z \in D(0, R)$ y consideremos el segmento radial Γ de 0 a z. Podemos poner

$$|f(z)| = \left|\int_\Gamma f'(s)\, ds\right| \leq \int_\Gamma |f'(s)|\, ds \leq \varrho\, |z| < \varrho R$$

donde hemos usado la estimación en (10). Se sigue que $f(D(0,R)) \subset B(0, \varrho R)$, y aplicando ahora el Lema 1.2 en [Co, page 293] resulta que $f(D(0,R)) \supset B(0, \sigma)$, donde

$$\sigma = \frac{(R)^2}{6\varrho R} = \frac{R}{6\varrho}. \quad (11)$$

La prueba está completa. ☑

Observación 2.4. En lo que resta del artículo, por simplicidad y salvo que se indique lo contrario, para $\alpha > -1$, $p > 1$ asumiremos que R y ϱ son constantes con los valores dados por (8). En consecuencia, en virtud de Lemma 2.3, cualquier función $f \in A_\alpha^p$ que verifique que $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$, y $\|f\|_{\alpha,p} = 1$ transforma conformemente el disco $D_R := D(0, R)$ sobre un dominio $\Omega_f := f(D_R)$ y $B(0, \sigma) \subset \Omega_f$.

3. Demostración del Teorema Principal

La demostración de nuestro resultado principal, requiere del siguiente Lema técnico:

Lema 3.1. *Fijemos un $\varepsilon > 0$, asumamos que $f \in A^p_\alpha$, $\alpha > -1$, $p \geq 1$, $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$ y $\|f\|_{\alpha,p} = 1$. Entonces existe un $r > 0$ tal que $B_r = B(0,r) \subset \Omega_f$ y se verifica que*

$$\int_{f^{-1}(B_r \cap \Sigma_\varepsilon)} |f(z)|^p \, dA_\alpha(z) \geq K_1(\alpha, p)\, \varepsilon \, |f'(0)|^{p+2}; \tag{12}$$

donde K_1 es una constante positivas que dependen sólo de α y p.

Demostración. En efecto, tomemos $r = \dfrac{1}{7\varrho} R$ y veamos que tal r satisface lo que queremos probar en el lema. Ante todo, observamos que $B_r \subset B(0,\sigma) \subset \Omega_f$ y $f^{-1}(B_r) \subset D_R$.

Consideremos ahora el anillo

$$A = \left\{ w \in \mathbb{C} : \frac{r}{2} < |w| < r \right\}.$$

Si $w = f(z) \in A$, entonces $\delta_{\Omega_f}(w) \geq \delta_{\Omega_f}(0) - r$; en particular, $\delta_{\Omega_f}(s) \geq \delta_{\Omega_f}(0) - r$ para todo s en el segmento radial $[0,w]$. Teniendo en cuenta la desigualdad (7) en el Teorema 2.2, podemos poner

$$\beta_{\Omega_f}(0,w) \leq 2k_{\Omega_f}(0,w) \leq 2\int_{[0,w]} \frac{|ds|}{\delta_{\Omega_f}(s)} \leq \frac{2r}{\delta_{\Omega_f}(0) - r} \leq \frac{1}{2},$$

donde hemos usado que $r < \dfrac{1}{20} R \leq \dfrac{1}{5}\delta_{\Omega_f}(0)$ y el Teorema 2.1. Esta última desigualdad y la definición de distancia hiperbólica nos permiten encontrar una constante $C_2(\alpha) > 0$ tal que

$$\left(1 - |z|^2\right)^\alpha \geq C_2(\alpha), \tag{13}$$

para todo $z \in f^{-1}(A)$ y $\alpha > -1$. Notemos también que, por el Teorema 2.1, vale la estimación

$$|f'(z)| \leq \frac{4}{R}\delta_{\Omega_f}(0)\, e^{3\beta_{\Omega_f}(0,f(z))} \leq 4e^{\frac{3}{2}}, \qquad z \in f^{-1}(A).$$

Ahora como

$$\int_{f^{-1}(B_r \cap \Sigma_\varepsilon)} |f(z)|^p \, dA_\alpha(z) \geq \left(\frac{r}{2}\right)^p \int_{f-1(A \cap \Sigma_\varepsilon)} dA_\alpha(z),$$

resulta

$$\begin{aligned} \int_{f^{-1}(B_r \cap \Sigma_\varepsilon)} |f(z)|^p \, dA_\alpha(z) &\geq \frac{C_2(\alpha)}{16e^3}\left(\frac{r}{2}\right)^p \int_{f^{-1}(A \cap \Sigma_\varepsilon)} |f'(z)|^2 \, dA(z) \\ &= \frac{3C_2(\alpha)}{2^{p+6}e^3} r^{p+2} \frac{\varepsilon}{\pi} \end{aligned} \tag{14}$$

que, junto con la definición de r y (8), da la conclusión del Lema. ☑

Demostración del Teorema 1.1. Sean $p \geq 1$, $\alpha > -1$, con $\alpha > 2p-1$ y $\beta = \alpha - 2p$, entonces se tiene $\beta > -1$; además, si $f \in A^p_\alpha$ es univalente con $f(0) = 0$, entonces el Teorema de distorsión 2.1 nos dice que

$$|f'(0)| \geq \frac{1}{|z|}\left(1-|z|\right)^2 |f(z)| \geq \frac{1}{4}\left(1-|z|^2\right)^2 |f(z)|, \quad z \in \mathbb{D};$$

elevando a la p-ésima potencia e integrando sobre el disco $\mathbb{D}$ con respecto a la medida de probabilidad dA_β obtenemos

$$|f'(0)| \geq \frac{1}{4}\left(\frac{\alpha-2p+1}{\alpha+1}\right)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{\alpha,p}. \tag{15}$$

Por otra parte, para $z \in \mathbb{D}$, definimos $g(z) = \frac{1}{\|f\|_{\alpha,p}} f(z)$, entonces g es una función que satisface las hipótesis del Lema Técnico 3.1 y por tanto,

$$\int_{g^{-1}(B_r \cap \Sigma_\varepsilon)} |g\,(z)|^p \, dA_\alpha\,(z) \geq K_1\,(\alpha, p)\,\varepsilon\,|g'\,(0)|^{p+2}; \tag{16}$$

luego, sin más que sustituir y teniendo en cuenta que

$$g^{-1}\,(B_r \cap \Sigma_\varepsilon) = f^{-1}\left(B_{r\|f\|_{\alpha,p}} \cap \Sigma_\varepsilon\right),$$

se concluye que existe una constante $C\,(\alpha, p) > 0$ tal que

$$\int_{f^{-1}\left(B_{r\|f\|_{\alpha,p}} \cap \Sigma_\varepsilon\right)} |f\,(z)|^p \, dA_\alpha\,(z) \geq C\,(\alpha, p)\,\varepsilon\,\|f\|^p_{\alpha,p} \tag{17}$$

y la prueba está completa. ☑

Observación 3.2. El Lema Técnico 3.1, nos asegura que la conclusión del Teorema 1.1 sigue siendo válida, *para todo* $\varepsilon > 0$, para cualquier clase de funciones en A^p_α, $p \geq 1$, $\alpha > -1$ que dejen fijo el origen y tal que $\frac{1}{\|f\|_{\alpha,p}} |f'(0)|$ tenga una cota inferior.

Corolario 3.3. *Fijemos* $p > 0$ *y* $\alpha > -1$. *Entonces para cada* $\varepsilon > 0$ *existe una constante* $\delta = \delta(\alpha, p, \varepsilon) > 0$ *tal que*

$$\int_{f^{-1}(\Sigma_\varepsilon)} |f(z)|^p \, dA_\alpha(z) > \delta \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \, dA_\alpha(z). \tag{18}$$

para cualquier $f \in A^p_\alpha$ *univalente con* $f\,(0) = 0 = f'\,(0) - 1$ *y* $\|f\|_{\alpha,p} \leq 1$.

Demostración. Sea $\Omega = f(\mathbb{D})$, $r = \dfrac{1}{5}\delta_\Omega\,(0)$ y $B_r \subset \Omega$ el disco con centro en el origen y radio r. Note que $r \in \left(\dfrac{1}{20}, \dfrac{1}{5}\right)$ por los teoremas de distorsión. Luego con un argumento similar al de la prueba del Lema 3.1 encontramos que existen constantes positivas K_2 y K_3 dependiendo sólo de α y p tal que

1) $\displaystyle\int_{f^{-1}(B_r\cap\Sigma_\varepsilon)} |f(z)|^p\, dA_\alpha(z) \le K_2(\alpha,p)\varepsilon \int_{f^{-1}(B_r)} |f(z)|^p\, dA_\alpha(z)$.

2) $\displaystyle\int_{f^{-1}(B_r\cap S_\varepsilon)} |f(z)|^p\, dA_\alpha(z) \ge K_3(\alpha,p)(\pi-\varepsilon)$;

donde $S_\varepsilon = \{w \in \mathbb{C} : |arg(w)| \ge \varepsilon\}$.

Dado que los sectores Σ_ε crece con ε, podemos suponer, sin perder generalidad, que $\varepsilon < \varepsilon_0$, donde

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\alpha,p) = \min\left\{\frac{1}{K_2(1+\pi K_3)}, \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Entonces por la desigualdad 1) arriba podemos escribir

$$\int_{f^{-1}(B_r)} |f(z)|^p\, dA_\alpha(z) \quad > \quad \delta_1 \int_{f^{-1}(B_r\cap S_\varepsilon)} |f(z)|^p\, dA_\alpha(z),$$

donde $\delta_1 = \frac{1}{1-K_2\varepsilon} > 1$. Esta última observación junto con la desigualdad 2) arriba y la hipótesis $\|f\|_{\alpha,p} \le 1$ implica

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p\, dA_\alpha(z) &= \int_{f^{-1}(B_r)} |f(z)|^p\, dA_\alpha(z) + \int_{f^{-1}(\mathbb{C}\setminus B_r)} |f(z)|^p\, dA_\alpha(z) \\
&> (\delta_1 - 1)\int_{f^{-1}(B_r\cap S_\varepsilon)} |f(z)|^p\, dA_\alpha(z) \\
&\qquad + \int_{f^{-1}(S_\varepsilon)} |f(z)|^p\, dA_\alpha(z) \\
&\ge (\delta_1 - 1) K_3(\pi-\varepsilon)\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p\, dA_\alpha(z) \\
&\qquad + \int_{f^{-1}(S)} |f(z)|^p\, dA_\alpha(z);
\end{aligned}$$

luego existe una constante $\delta_2 \in (0,1)$ tal que

$$\int_{f^{-1}(S_\varepsilon)} |f(z)|^p\, dA_\alpha(z) \le \delta_2 \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p\, dA_\alpha(z)$$

de donde seguiría que

$$\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p\, dA_\alpha(z) \le \frac{1}{1-\delta_2}\int_{f^{-1}(\Sigma_\varepsilon)} |f(z)|^p\, dA_\alpha(z)$$

que es precisamente (18) con $\delta = 1 - \delta_2$. ☑

Agradecimientos: La investigación del primer autor ha sido soportada parcialmente por el Proyecto de Investigación BFM2002-02098 del Ministerio de Ciencia y Tecnología, España y la Red Europea. El segundo autor agradece a la Universidad de Oriente su soporte financiero para cubrir parcialmente sus estancias en la Universidad de La Laguna.

Referencias

[Co] J. Conway, *Functions of One Complex Variable*, Springer-Verlag, New-York, 1978.

[DS] S. Djrbashian & F. Shamoian, *Topics in the Theory of A^p_α Spaces*, Teubner-Texte Zur Mathematic, Leipzig, 1988.

[Du] Duren, P., *Theory of H^p Spaces,* Academic Press, New York, 1970.

[GP] F. W. Gehring & B. P. Palka, *Quasiconformally homogeneous domains*, J. Analyse, Math. **30** (1976), 172–199.

[HKZ] Hedenmalm, H., Korenblum B. and Zhu, K., *Theory of Bergman Spaces.* Springer-Verlag, New York, 2000

[MS] D. Marshall & W. Smith, *The angular distribution of mass by Bergman functions*, Rev. Matematica Iberoamerica, **15** (1999), 93–116.

[OS] M. Ortel and W. Smith, *The argument of an extremal dilatation*, Proc. Amer. Math. Soc. **104**, no 2(1988), 498–502.

[Po] C. Pommerenke, *Boundary Behavior of Conformal Maps*, Springel - Verlag, 1992.

(Recibido diciembre de 2003)

Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
38271 La Laguna, Tenerife , Spain
e-mail: `fernando.perez.gonzalez@ull.es`

Departamento de Matemáticas
Universidad de Oriente
6101 Cumaná, Edo. Sucre, Venezuela,
e-mail: `jramos@sucre.udo.edu.ve`