Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen 38 (2004), páginas 1–5

Q-algèbres p-semi-normées presque commutatives

Abdellah El Kinani
Ecole Normale Supérieure, Maroc

Abstract. Using the spectral radius, we obtain an equivalent condition to the commutativity of an algebra modulo its Jacobson radical.

Résumé. En utilisant le rayon spectral, nous obtenons une condition équivalente à la commutativité d'une algèbre modulo son radical de Jacobson.

Keywords and phrases. Quasi-norm, p-normed algebra, Jacobson radical, spectral radius, subharmonic fonction, almost commutative algebra.

2000 Mathematics Subject Classification. Primary : 46H20.

Dans une algèbre de Banach, il est bien connu que la sous-additivité et la sous-multiplicativité du rayon spectral sont deux notions équivalentes à la commutativité modulo le radical de Jacobson. Dans cet article nous considérons, sur une algèbre quelconque, des conditions qui font seulement appel au rayon spectral et qui sont équivalentes à la presque commutativité. Dans toute la suite, les algèbres considérées sont complexes. Une algèbre A est dite presque commutative si $A/Rad(A)$ est commutative, où $Rad(A)$ désigne le radical de Jacobson de A. Si A est une algèbre unitaire, on désigne par 1 son unité et par $\rho(a) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in Sp\ a\}$, le rayon spectral de $a \in A$, où $Sp\ a$ est le spectre de a. Rappelons aussi qu'une algèbre p-semi-normée, $0 < p \leq 1$, est dite une Q-algèbre si son groupe des éléments inversibles est ouvert.

Théorème 1. *Soit A une algèbre unitaire. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1) $\sup\{\rho(xy) : \rho(y) \leq 1\} < +\infty$, *pour tout $x \in A$ et la fonction*

$$x \longmapsto |x| = \sup\{\rho(xy) : \rho(y) \leq 1\}$$

est sous-additive i.e., il existe $\alpha > 0$ telle que

$$|x + y| \leq \alpha\left(|x| + |y|\right), \text{ pour tous } x, y \in A.$$

2) *A est une Q-algèbre p-semi-normée (pour un certain $p \in]0,1]$) presque commutative.*

Démonstration. L'implication 2)$\Longrightarrow$1) est triviale. Montrons 1)$\Longrightarrow$ 2). Tout d'abord, la fonction $x \longmapsto |x|$ est une quasi-semi-norme sur A ([1], p.159). De plus, comme

$$\rho(xy) \leq \rho(y)\,|x|\,, \text{ pour tous } x, y \in A, \tag{1}$$

on a

$$|ab| \leq |a|\,|b|\,, \text{ pour tous } a, b \in A. \tag{2}$$

Par ([1], p. 159-161) et (2), il existe une p-semi-norme d'espace vectoriel $\|.\|_p$, sur A ([1], p.160), telle que $\|ab\|_p \leq \|a\|_p \|b\|_p$, pour tous $a, b \in A$ et deux constantes positives k_1 et k_2 telles que

$$k_1 \|x\|_p^{\frac{1}{p}} \leq |x| \leq k_2 \|x\|_p^{\frac{1}{p}}, \text{ pour tout } x \in A.$$

Posons $B = A/Rad(A)$ et s la surjection canonique de A sur B. On munit l'algèbre B de la p-semi-norme d'algèbre ([5]), notée encore $\|.\|_p$, définie par $\|s(x)\|_p = \|x\|_p$, pour tout $x \in A$. C'est une p-norme sur B car

$$\{x \in A : |x| = 0\} = Rad(A).$$

Et comme $\rho(s(a)) = \rho(a)$, pour tout $a \in A$, il en résulte que $\left(B, \|.\|_p\right)$ est une Q-algèbre. Soient $x, y \in A$ et λ un nombre complexe tel que $|\lambda| > \rho(y) + |x|$. Alors $(\lambda - y)$ est inversible. En tenant compte de l'egalité

$$\lambda - (x+y) = (\lambda - y)\left[1 - (\lambda - y)^{-1}x\right]$$

et du fait que

$$\rho\left[(\lambda - y)^{-1}x\right] \leq \frac{|x|}{|\lambda| - \rho(y)} < 1,$$

on voit que $\lambda - (x+y)$ est inversible. Ainsi

$$\rho(x+y) \leq \rho(y) + |x|\,, \text{ pour tous } x, y \in A.$$

Posons $|s(x)| = |x|$, pour tout $x \in A$. Alors

$$\rho\left[s(x) + s(y)\right] \leq \rho\left[s(y)\right] + |s(x)|\,, \text{ pour tous } x, y \in A.$$

Soit $\hat{B}$ la complétée de B et $\overset{\wedge}{\rho}$ le rayon spectral dans $\hat{B}$. Puisque $\left(B, \|.\|_p\right)$ est une Q-algèbre et $\|.\|_p$ et équivalente à $|.|$, l'inégalité précédente s'étend à $\hat{B}$. Pour a et b deux éléments quelconques de A, considérons la fonction f définie, sur $\mathbb{C}$, par

$$f(z) = \frac{e^{zs(a)}s(b)e^{-zs(a)} - s(b)}{z} \quad \text{si } \lambda \neq 0 \;\text{ et }\; f(0) = s(ab - ba).$$

Alors $z \longmapsto \overset{\wedge}{\rho}(f(z))$ est sous-harmonique. En effet soit

$$\|x\| = \sup\left\{\overset{\wedge}{\rho}(x+y) - \overset{\wedge}{\rho}(y) : y \in \hat{B}\right\}, \text{ pour tout } x \in \hat{B}.$$

Il est clair que, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et tous $a, b \in \hat{B}$, on a

$$\|\lambda a\| = |\lambda| \|a\| \text{ et } \|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|.$$

De plus

$$\overset{\wedge}{\rho}(a) \leq \|a\| \leq |a|, \text{ pour tout } a \in \hat{B}.$$

Par suite, on a

$$\overset{\wedge}{\rho}(a) \leq \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq k_2^{\frac{1}{n}} \|a^n\|_p^{\frac{1}{pn}}, \text{ pour tout } a \in \hat{B} \text{ et tout } n = 1, 2, ...$$

D'où, par passage à la limite,

$$\widehat{\rho}(a) \leq \lim_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \lim_n \|a^n\|_p^{\frac{1}{np}} \leq \overset{\wedge}{\rho}(a), \text{ pour tout } a \in \hat{B}.$$

Ainsi

$$\overset{\wedge}{\rho}(a) = \lim_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}}, \text{ pour tout } a \in \hat{B}$$

Donc, comme dans [4], on montre que la fonction $z \longmapsto \overset{\wedge}{\rho}(f(z))$ est sous-harmonique. De plus, pour tout $z \neq 0$, on a

$$\overset{\wedge}{\rho}(f(z)) \leq \frac{\rho(b) + |b|}{|z|}.$$

Ainsi la fonction $z \longmapsto \overset{\wedge}{\rho}(f(z))$ tend vers zéro à l'infini. Par le théorème de Liouville pour les fonctions sous-harmoniques, on a $\overset{\wedge}{\rho}(f(z)) = 0$, pour tout $z \in \mathbb{C}$. Donc $\rho(ab - ba) = 0$. Enfin soit x un élément quelconque de A. Alors, par (1), on a $\rho[(ab - ba)x] = 0$ et donc $ab - ba \in Rad(A)$. On en conclut que $A/Rad(A)$ est commutative. ☑

Comme conséquence, on a le résultat suivant.

Corollaire 2. *Soit A une algèbre unitaire. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1) $\rho(x) < +\infty$, *pour tout $x \in A$ et il existe une constante $\beta > 0$ telle que*
$$\rho(xy) \leq \beta\rho(x)\rho(y), \text{ pour tous } x, y \in A.$$
2) *A est une Q-algèbre p-semi-normée (pour un certain $p \in]0, 1]$) presque commutative.*

Démonstration. Il reste à montrer que 1)$\Longrightarrow$ 2). Pour tout $x \in A$, on a

$$\sup\{\rho(xy) : \rho(y) \leq 1\} \leq \beta\rho(x) < +\infty.$$

Soient $x, y \in A$ et λ un nombre complexe tel que $|\lambda| > \rho(x) + \beta\rho(y)$. Alors $(\lambda - x)$ est inversible. De plus

$$\lambda - (x+y) = (\lambda - x)\left[1 - (\lambda - x)^{-1}y\right]$$

et

$$\rho\left[(\lambda-x)^{-1}y\right] \leq \frac{\beta\rho(y)}{|\lambda|-\rho(x)} < 1.$$

Par suite $\lambda-(x+y)$ est inversible. Ainsi

$$\rho(x+y) \leq \rho(x)+\beta\rho(y), \text{ pour tous } x,y \in A.$$

Il en résulte que

$$|a+b| \leq (1+\beta)\left(|a|+|b|\right), \text{ pour tous } a,b \in A.$$

Et on conclut par le théorème 1. ☑

Dans le cas d'une algèbre normée, on a le résultat suivant.

Théorème 3. *Soit $(A, \|.\|)$ une algèbre normée unitaire. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1) *Il existe une constante $c>0$ telle que $|x| \leq c\|x\|$, pour tout $x \in A$.*
2) *A est une Q-algèbre normée presque commutative.*

Démonstration. 2)$\Longrightarrow$ 1) Pour tout $x \in A$, on a

$$|x| = \sup\{\rho(xy) : \rho(y) \leq 1\} \leq \rho(x) \leq \|x\|.$$

1)$\Longrightarrow$ 2). Par 1), on a

$$\rho(xy) \leq c\rho(y)\|x\|, \text{ pour tous } x,y \in A. \tag{3}$$

Donc $\rho(x) \leq \|x\|$, pour tout $x \in A$ et par suite $(A, \|.\|)$ est une Q-algèbre. De plus, comme au théorème 1, on montre à partir de (3) que

$$\rho(x+y) \leq \rho(y)+c\|x\|, \text{ pour tous } x,y \in A. \tag{4}$$

Soit $\hat{A}$ la complétée de A et $\overset{\wedge}{\rho}$ le rayon spectral dans $\hat{A}$. Puisque $(A, \|.\|)$ est une Q-algèbre, l'inégalité (4) s'étend à $\hat{A}$. Pour a,b dans A, on considére la fonction g définie, sur $\mathbb{C}$, par

$$g(z) = \frac{e^{za}be^{-za}-b}{z} \quad \text{si } \lambda \neq 0 \quad \text{et} \quad g(0) = ab-ba.$$

Alors $z \longmapsto \overset{\wedge}{\rho}(g(z))$ est sous-harmonique par [4]. De plus elle tend vers zéro à l'infini. Elle est donc identiquement nulle. On obtient alors la presque commutativité de A à partir de $\overset{\wedge}{\rho}(g(0)) = 0$ et de (2) ☑

Remarques 4. 1) *Dans le cas d'une algèbre A non nécéssairement unitaire, on serait tenté de penser que*

$$(|x| < +\infty, \; \forall x \in A) \Longrightarrow (\rho(x) < +\infty, \; \forall x \in A).$$

En fait, ce n'est pas le cas comme le montre le contre-exemple suivant : soient $E = XC[X]$, où $C[X]$ est l'algèbre des polynômes et F une algèbre de Banach unitaire commutative quelconque. Sur $A = E \times F$, on considère les opérations *ordinaires. Comme* $\rho_E(x) = +\infty$, *pour tout élément* x *non nul de* E, *on a* $|(a,b)| < +\infty$, *pour tout* $(a,b) \in A$ *alors que* $\rho_A[(a,b)] = +\infty$, *pour tout* $(a,b) \in A$ *avec* $a \neq 0$.

2) *Soit* A *est une algèbre non unitaire telle que* $\rho(x) < +\infty$, *pour tout* $x \in A$. *Si* $|x| < +\infty$, *pour tout* $x \in A$, *alors* $\rho(x) \leq |x|$, *pour tout* $x \in A$. *En effet, on a* $\rho(xy) \leq \rho(x)\,|y|$, *pour tous* $x, y \in A$. *Prenons* $y = x^n$, *pour* $n = 1, 2, ...$, *on obtient* $\rho(x) \leq \rho(x)^{\frac{1}{n+1}}\,|x|^{\frac{n}{n+1}}$. *D'où le résultat par passage à la limite.*

3) *Avec l'hypothèse supplémentaire* $\rho(x) < +\infty$, *pour tout* $x \in A$, *les théorèmes 1 et 3 restent encore valables dans le cas non unitaire.*

Références

[1] G. Köthe, *Topological vector spaces I*, Springer-verlag, 1983.

[2] C. Le Page, *Sur quelques conditions impliquant la commutativité dans les algèbres de Banach*, C.R.A.S. Paris, Ser. A-B ; 265, (1967), A 235-A 237.

[3] T. Palmer , *Spectral algebras*, Rocky Mountain Journal of Mathematics, **22** (1992), no 1, 293–328.

[4] E. Vesentini, *On the subharmonicity of the spectral radius*, Boll, Un. Mat. Ital. **4** (1968), 427–492.

[5] W. Zelazko, *Selected topics on topological algebras*, Lecture notes series **31**, Aarhus, 1971.

(Recibido en febrero de 2003)

Département de Mathématiques
Ecole Normale Supérieure Takaddoum
B.P. 5118 Rabat 10105, Maroc
e-mail : abdellah_elkinani@hotmail.com