Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen 37 (2003), páginas 81–86

Sobre digrafos adjuntos y (h, j) adjuntos de multidigrafos $k-$regulares

Elsa Osio
Teresa Braicovich
Cora Bernardi
Cristina Costes

Universidad Nacional del Comahue, Argentina

Abstract. This work connects the Graph Theory with the Matrix Theory. We demonstrate that every ${}^{(h,j)}G$ digraph of one multidigraph k-regular of n vertexs has exactly $[k^{(h-j)}!]^{n \cdot k^j}$ different covering subdigraphs $(k^{(h-j)} - 1)$-regulars. The demonstration is via a suitable matrix representation, using the permanent of the precedence matrix of the (h, j) adjoint digraphs".

Keywords and phrases. Adjunction, precedence matrix, graphs, digraphs.

2000 Mathematics Subject Classification. Primary: 05C50.

Resumen. Este trabajo relaciona la Teoría de Grafos con la Teoría de Matrices. Nosotros demostraremos que cada digrafo ${}^{(h,j)}G$ de un multidigrafo k-regular de n vértices tiene exactamente $[k^{(h-j)}!]^{n \cdot k^j}$ subdigrafos recubridores diferentes $(k^{(h-j)} - 1)$-regulares. La demostración se realiza mediante representaciones matriciales, usando el permanente de la matriz de precedencia del digrafo (h, j) adjunto.

1. Introducción

En este trabajo se presentan resultados que vinculan la Teoría de Matrices con la Teoría de Grafos, en particular con la adjunción de los mismos. Este último tema fue introducido en el año 1943 para el caso de grafos no dirigidos y en

1960 para el caso dirigido. Dichas operaciones se encuentran, según describieron Hemminger y Beineke [1] en “Line graphs and line digraphs”(1978), entre las más interesantes y seguramente las más estudiadas dentro de la Teoría de Grafos, conociéndose de estas nociones distintas caracterizaciones y generalizaciones. Actualmente se observa que la adjunción en grafos está relacionada con los temas de coloreado, arboricidad y espectro, entre otros.

A partir de la publicación denominada “Palabras Circulares Equilibradas. Grafos Adjuntos”(1982), cuyo autor es el Dr. Raúl Chiappa [2], se comenzó a estudiar la (h, j) adjunción en grafos. En este caso los vértices del grafo (h, j) adjunto, representan caminos de longitud h y la vinculación entre los mismos está definida de acuerdo a la superposición de j arcos, eventualmente cuando $h = 1$ y $j = 0$ se recupera el grafo adjunto. Teniendo en cuenta los conceptos mencionados anteriormente y utilizando el permanente de la matriz de precedencia de los (h, j) adjuntos se llega al siguiente teorema: “Los digrafos ${}^{h,j}G$ de multidigrafos k-regulares de n vértices tienen $[k^{(h-j)}!]^{n\cdot k^j}$ subdigrafos recubridores $(k^{(h-j)} - 1)-$regular distintos”. La demostración del mismo depende de ciertos resultados previos que se indican como proposiciones 3.1, 3.2 y 3.3, y se prueban en la Sección 2, luego de que se enuncian algunas definiciones necesarias para el desarrollo del trabajo. Por último, en la Sección 3 se demuestra el teorema mencionado y se da un corolario del mismo.

2. **Definiciones**

Un *multidigrafo* es una terna $G = (V, U, \phi)$ que consiste de dos conjuntos no vacíos y disjuntos, V y U, de elementos llamados *vértices* y *arcos* respectivamente y de una función ϕ, llamada *relación de incidencia*, que asocia a cada arco de G un par ordenado de vértices (no necesariamente distintos) de G. Si u es un arco y a y b son vértices tales que $\phi(u) = (a, b)$, entonces se dice que u tiene extremo inicial en a y extremo final en b. Por comodidad y cuando no haya lugar a confusión para indicar a los multidigrafos $G = (V, U, \phi)$ se utilizará la notación menos formal $G = (V, U)$. Sea $G = (V, U, \phi)$ un multidigrafo. G es *digrafo* si ϕ es inyectiva, G es *finito* si los conjuntos V y U son finitos y G es de *orden* n si es finito y el número de elementos de V es igual a n. Se llama *grado positivo (negativo)* de un vértice v de un multidigrafo G y se nota $gr^+(v)$ $(gr^-(v))$, al número de arcos de G con extremo inicial (final) en el vértice v. Dado un multidigrafo $G = (V, U)$ se llama *camino de longitud* L, $L \geq 1$, a toda sucesión de vértices y arcos $C : v_1, u_1, v_2, u_2, \cdots, v_L, u_L, v_{L+1}$, donde $u_i = (v_i, v_{i+1})$, $1 \leq i \leq L$; no necesariamente $u_i \neq u_j$ y eventualmente $v_i = v_{i+1}$. Cualquier subsucesión de C determina un *subcamino* de C. Si $v_1 = v_{L+1}$, diremos que tal camino es un *circuito*. Admitiremos que cada vértice define un *camino nulo*, de longitud cero. Un camino $C : v_1, u_1, v_2, u_2, \cdots, v_L, u_L, v_{L+1}$, $L \geq 1$ es *simple* si $u_i \neq u_j$, cualquiera sea $i \neq j$, $i, j \in \{1, \cdots, L\}$ y *elemental* si $vi \neq vj$ cualesquiera sean $i \neq j$, $i, j \in \{1, \cdots, L + 1\}$, excepto que eventualmente v_1 y v_{L+1} pueden corresponder a un mismo vértice, en cuyo caso diremos que es un circuito elemental. Un multidigrafo G es k- *regular* si para todo vértice v de G se tiene que $gr^+_{G(v)} = gr^-_{G(v)} = k$. Dado un multidigrafo G de orden n, $n \geq 1$, con matriz de precedencia $P(G) = [p_{ij}]$ donde $[p_{ij}]$ es el número de arcos de la forma (i, j), eventualmente $i = j$. Dos multidigrafos G y H son *isomorfos* si, y sólo si, existe una matriz permutación Π, tal que $P(H) = \Pi^{tr}.P(G)\Pi$. Dado un multidigrafo G, un *1-difactor* de G es un subdigrafo recubridor H de G, tal que $gr^+_{H(v)} = gr^-_{H(v)} = 1$, cualquiera sea el vértice v de G. Cada 1-difactor H es unión de circuitos elementales disjuntos dos a dos. Dada una matriz cuadrada $M = [m_{ij}]$ de orden n, se define el *permanente* de la matriz M de la siguiente forma:

$$PerM = \sum_{\pi \in \delta_n} \prod_{i=1}^{n} m_{i\pi_{(i)}}$$

siendo δ_n el conjunto de todas las permutaciones de n elementos. Obsérvese que el permanente de M coincide con el número total de 1-difactores de G. Dado un multidigrafo $G = (V, U)$, su *digrafo adjunto* es el digrafo $G^* = (U, \Gamma, \sigma)$ tal que $b \in \Gamma(a)$ $(a, b \in U$, no necesariamente $a \neq b)$ si y solamente si en G el extremo final del arco a incide en el mismo vértice que el extremo inicial del arco b. Es obvio que G^* es vacío si y sólo si G carece de arcos y que G^* tiene entradas, salidas, bucles si y sólo si también los tiene G. Dado el multidigrafo G y los enteros h, j tales que $h > j \geq 0$, se llama (h, j) *adjunto de* G y se denota ${}^{h,j}G$, al digrafo cuyos vértices son los caminos de G (no necesariamente simples) de longitud h y cuya relación de precedencia ${}^{h,j}\sigma$ está definida por: $y \in {}^{h,j}\sigma(x)$ si y sólo si el j-subcamino final de x coincide con el j-subcamino inicial de y (no necesariamente $x \neq y$).

3. Resultados preliminares

Proposición 3.1. *Si G un multidigrafo k-regular de n vértices y ${}^{h,j}G$ su digrafo (h, j) adjunto entonces el número de vértices de ${}^{h,j}G$ es igual a $n \cdot k^h$.*

Demostración. Por ser G un multidigrafo k-regular de n vértices, y ${}^{h,j}G$ su digrafo (h, j) adjunto $(h > j \geq 0)$ cuyos vértices son todos los posibles caminos de G (no necesariamente simples) de longitud h, en cada vértice de G existen k opciones a ser tomadas una cantidad h de veces, es decir k^h caminos de longitud h. Como G posee n vértices existen exactamente $n \cdot k^h$ caminos de longitud h. Luego el número de vértices de ${}^{h,j}G$ es exactamente $n \cdot k^h$. ☑

Proposición 3.2. *Si G un multidigrafo k-regular de n vértices y ${}^{h,j}G$ su digrafo (h, j) adjunto entonces el digrafo ${}^{h,j}G$ es k^{h-j}-regular.*

Demostración. En cuanto a la regularidad que tendrá el digrafo ${}^{h,j}G$, como cada uno de sus vértices representa un camino de longitud h y por definición el vértice v_x estará relacionado con el vértice v_y si y sólo si el j-subcamino final de v_x coincide con el j-subcamino inicial de v_y (no necesariamente $v_x \neq v_y$), resulta que se puede llegar al vértice v_y por k^{h-j} caminos pues existen k opciones que pueden ser tomadas $(h-j)$ veces, es decir la cantidad de arcos libres. Por lo tanto ${}^{h,j}G$ es k^{h-j}-regular. La regularidad también puede ser obtenida haciendo el cociente entre el número de arcos y el número de vértices, es decir $\dfrac{n \cdot k^{2h-j}}{n \cdot k^h}$, expresión que resulta igual a k^{h-j}. ☑

Proposición 3.3. *Si G un multidigrafo k-regular de n vértices y ${}^{h,j}G$ su digrafo (h,j) adjunto entonces el número de arcos de ${}^{h,j}G$ es igual a $n \cdot k^{2h-j}$.*

Demostración. Por lo demostrado en las proposiciones 3.1 y 3.2 resulta que ${}^{h,j}G$ posee $n \cdot k^h$ vértices y es k^{h-j}-regular, por lo tanto la cantidad de arcos que hay en el ${}^{h,j}G$ es igual al producto entre el número de vértices y la regularidad del mismo, es decir $n \cdot k^h \cdot k^{h-j} = n \cdot k^{2h-j}$. Luego el número de arcos de ${}^{h,j}G$ es igual a $n \cdot k^{2h-j}$. ☑

4. Resultado Principal

Teorema 4.1. *Sea G un multidigrafo k-regular de n vértices y ${}^{h,j}G$ su digrafo (h,j) adjunto entonces el digrafo ${}^{h,j}G$ tiene exactamente $[k^{(h-j)}!]^{n \cdot k^j}$ subdigrafos recubridores $(k^{(h-j)}-1)$-regular distintos.*

Demostración. Reordenando las filas de la matriz de precedencia del digrafo ${}^{h,j}G$, que por lo demostrado en el Proposición 3.1 es de orden $n \cdot k^h$, se obtiene una matriz diagonal por bloques P' de tal manera que cada uno de sus bloques es una submatriz cuadrada cuyos elementos son todos unos. En general el esquema de la matriz bloque diagonal es el siguiente:

$$P' = \begin{bmatrix} A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A \end{bmatrix}$$

donde cada bloque $A = (a_{ij})$ es una matriz cuadrada cuyos elementos son idénticamente uno, es decir $a_{ij} = 1$ cualquiera sean i, j en el rango que corresponda.

La condición de regularidad de ${}^{h,j}G$ desarrollada en la Proposición 3.2, permite afirmar que la cantidad de bloques de dicha matriz es igual al cociente entre el número de vértices y la regularidad del mismo. Luego el número de bloques es $\dfrac{n \cdot k^h}{k^{(h-j)}}$, es decir, existen $n \cdot k^j$ bloques en la matriz P'. Por lo tanto el número de arcos de cada uno de los bloques, surge al realizar el cociente entre el número total de arcos del ${}^{h,j}G$ (definido como $n \cdot k^{2h-j}$ y demostrado en Proposición 3.3) y el número total de bloques dado por $n \cdot k^j$. Podemos afirmar entonces, que existen k^{2h} elementos en cada una de las submatrices A.

Como estas submatrices son cuadradas podemos comprobar que son de orden k^h.

Teniendo en cuenta la definición del permanente de una matriz y que cada bloque de la matriz P' esta formado por unos, resulta que el permanente de cada uno de los bloques es $k^{h-j}!$, por lo tanto el permanente de la matriz bloque diagonal, que resulta del producto de los permanentes de los bloques, es igual a $[k^{(h-j)}!]^{n \cdot k^j}$. Como fue observado en la Sección 2, el permanente de una matriz coincide con el número de 1-difactores distintos del digrafo asociado a la misma, resulta entonces que el digrafo ${}^{h,j}G$ tiene exactamente $[k^{(h-j)}!]^{n \cdot k^j}$ 1-difactores regulares distintos. Por ello y teniendo en cuenta que si al digrafo ${}^{h,j}G$ le quitamos todos los arcos correspondientes a un 1-difactor, cada uno de los vértices del mismo disminuye en una unidad su grado de entrada y también en una unidad el grado de salida, formándose un subdigrafo recubridor $(k^{(h-j)}-1)$-regular. Luego existen $[k^{(h-j)}!]^{n \cdot k^j}$ subdigrafos recubridores $(k^{(h-j)}-1)$-regular distintos, quedando así concluida la demostración. ☑

Corolario 4.2. *Los digrafos adjuntos de multidigrafos k-regulares de n vértices tienen exactamente $[k^{(1-0)}!]^{n \cdot k^0} = k!^n$ subdigrafos recubridores $(k-1)$-regulares distintos.*

Demostración. De las definiciones dadas al final de la Sección 2 se desprende que el digrafo adjunto del multidigrafo G, al que denotamos por G^*, es un caso particular del digrafo ${}^{h,j}G$. El mismo surge cuando se toma $h = 1$ y $j = 0$. Aplicando estos valores en el resultado obtenido en el Teorema 4.1 se obtiene el resultado deseado. ☑

Referencias

[1] R. Hemminger and L Beineke, *Line graphs and line digraphs* Selected Topics in Graph Theory, Ch. 10, Ed. Beinike - Wilson. Academis Press. (1978) 271-305.

[2] R. A. Chiappa, *Palabras circulares equilibradas. Grafos adjuntos* , INMABB-CONICET (1982).

[3] W. Beineke and F. Harary *Binary matrices with equal determinant and permanent*, Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica I, (1966), 179-183.

[4] M. V. Ramanath , *Factors in a Class of Regular Digraphs*, Journal Graph Theory Vol. 9 (1985).

(Recibido en febrero de 2003)

Departamento de Matemáticas
Facultad de Economia
Universidad Nacional del Comahue
Pcia. de Neuquén - Argentina.

e-mail: eosi@uncoma.edu.ar
e-mail: tbraico@uncoma.edu.ar
e-mail: cbernard@uncoma.edu.ar
e-mail: lponchia@uncoma.edu.ar