Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen 37 (2003), páginas 1–9

Una nota sobre el problema de la deformación conforme de métricas en la bola unitaria

Carlos Escudero
Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira, COLOMBIA

Gonzalo García*
Universidad del Valle, Cali, COLOMBIA

Abstract. In this paper we show the existence of a family of functions R and h for which does not exist a conformal metric to the Euclidean metric on the unit ball in $\mathbb{R}^n$ such that R is not its scalar curvature and h is not its mean curvature. To find this family, we use the moving spheres method and the maximum principle for elliptic operators.

Keywords and phrases. Conformal deformation of metrics, moving spheres method, maximum principle.

2000 Mathematics Subject Classification. Primary: 53C21. Secondary: 35J60, 35J65.

Resumen. En este trabajo mostramos la existencia de una clase de funciones R y h para las cuales no existe una métrica conforme a la métrica usual en la bola unitaria de $\mathbb{R}^n$ tal que R sea su curvatura escalar y h sea su curvatura media. El resultado se obtiene usando el método de mover esferas y el principio del máximo para operadores elípticos.

1. Introducción

La bola unitaria B^n con la métrica euclidiana g_o tiene curvatura escalar nula sobre la bola, y curvatura media constante $h_o = 1$ sobre la frontera, ∂B^n, de B^n. Un problema importante de geometría diferencial es el de la caracterización

*Apoyado por la Universidad del Valle y parcialmente por Colciencias con el proyecto 1106-05-10283, CT-220-2000.

de las parejas de funciones R, definidas sobre la bola, y h, definidas sobre su frontera, tales que exista una métrica g, conforme a la métrica g_o, con curvatura escalar prescrita R sobre la bola y curvatura media prescrita h sobre la frontera de la bola.

Dadas las funciones R y h, la existencia de tal métrica g es equivalente a la existencia de una función suave u que satisface las siguientes ecuaciones diferenciales parciales elípticas en el exponente crítico de Sobolev. En el caso $n \geq 3$,

$$\begin{cases} \Delta u + \frac{n-2}{4(n-1)} R u^{\frac{n+2}{n-2}} = 0 \text{ y } u > 0, & \text{en } B^n, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{n-2}{2} u = \frac{n-2}{2} h u^{\frac{n}{(n-2)}}, & \text{sobre } \quad \partial B^n, \end{cases} \tag{1.1}$$

donde $g = u^{\frac{4}{(n-2)}} g_0$. La primera ecuación nos dice que la curvatura escalar con la métrica g es $R_g = R$ y la segunda ecuación nos dice que la curvatura media con la métrica g es $h_g = h$.

En el caso $n = 2$,

$$\begin{cases} \Delta u = -Re^{2u}, & \text{en } \quad B^2, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} + 1 = he^u, & \text{sobre } \quad \partial B^2 \ , \end{cases} \tag{1.2}$$

donde $g = e^{2u} g_o$. La primera ecuación nos dice que la curvatura gaussiana de B^2 con la métrica g es $R_g = R$, y la segunda ecuación nos dice que la curvatura de la frontera ∂B^n con la métrica g es $h_g = h$.

Este problema ha recibido gran atención en la literatura y varios autores han encontrado condiciones suficientes sobre las funciones R y h para la existencia de g (ver [2], [5], [6], [7], [8]). Sin embargo, existen todavía grandes diferencias entre esas condiciones suficientes y las condiciones necesarias.

Por el principio del máximo, si las ecuaciones (1.1) ((1.2)) tienen solución, entonces una de las funciones R o h debe ser positiva en algún punto.

Si las funciones x_i, $i = 1, 2, \cdots, n$, son las restricciones de las funciones coordenadas a la esfera S^n, Hamza [11] demostró que si el problema (1.1) tiene solución entonces la condición integral siguiente es válida:

$$\int\limits_{B^n} \frac{\left(1+ \mid y \mid^2\right)^2}{4} u^{\frac{2n}{(n-2)}} \nabla(x_{i0}\tau).\nabla R d\mathrm{v}_{g_0} + 2n \int\limits_{\partial B^n} u^{\frac{2(n-1)}{(n-2)}} \nabla x_i.\nabla h d\sigma_{g_0} = 0, \tag{1.3}$$

mientras que si el problema (1.2) tiene solución se tiene que

$$\int\limits_{B^2} \frac{\left(1+ \mid y \mid^2\right)^2}{4} e^{2u} \nabla(x_{i0}\tau).\nabla R d\mathrm{v}_{g_0} + 2 \int\limits_{\partial B^n} e^u \nabla x_i.\nabla h d\sigma_{g_0} = 0, \tag{1.4}$$

donde τ es la inversa de la proyección estereográfica con polo en $s = (0, \cdot\cdot, 0, -1)$. En el caso $n \geq 3$, una obstrucción mas fuerte fue encontrada por Escobar en

[6], donde él demostró, en un contexto más general, que si el problema de la deformación conforme de métricas (1.1) tiene solución entonces

$$\frac{n-2}{2n}\int_{B^n} X.\nabla R d\mathrm{v}_g + (1-n)\int_{\partial B^n} X^T.\nabla h d\sigma_g = \int_{\partial B^n} \langle X,\eta\rangle E(\eta,\eta) d\sigma_g \tag{1.5}$$

donde X es un campo vectorial *killing* conforme sobre B^n, el campo X^T es la proyección del campo vectorial X sobre el espacio tangente de ∂B^n, $g = u^{\frac{4}{(n-2)}} g_0$, $E(Y,Z) = Ric(Y,Z) - \frac{R}{n}\langle Y,Z\rangle$, $d\mathrm{v}_g = u^{\frac{2n}{(n-2)}} d\mathrm{v}_{g_o}$, y $d\sigma_g = u^{\frac{2(n-1)}{(n-2)}} d\sigma_{g_o}$.

Las condiciones integrales (1.3) y (1.4) dán muchos ejemplos de funciones R y h para las cuales los problemas (1.1) y (1.2) no tienen solución. Esto ocurre particularmente si R es nula y h es monótona rotacionalmente simétrica. Si $k = 0$ y $h = h(\theta)$, donde θ es la distancia desde el polo norte, las condiciónes de integrabilidad de Escobar y Hamza toman la forma: $h > 0$ en algún punto y h' cambia de signo.

Puesto que la bola B^n y $\mathbb{R}_n^+$ son conformes, el problema (1.1) se transforma en un problema de la forma

$$\begin{cases} \Delta \mathrm{v} = -Rv^{\frac{n+2}{n-2}}, & \text{en } \mathbb{R}^n_+, \\ \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \eta} = h\mathrm{v}^{\frac{n}{n-2}}, & \text{en } \partial\mathbb{R}^n_+, \end{cases} \tag{1.6}$$

donde el comportamiento asintótico de las soluciones en el infinito es $\sim c \mid x \mid^{2-n}$, c es una constante positiva.

Similarmente, el problema (1.2) se transforma en un problema de la forma

$$\begin{cases} -\Delta \mathrm{v} = Re^{2u}, & \text{en } \mathbb{R}^2_+, \\ \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \eta} = he^{\mathrm{v}}, & \text{en } \partial\mathbb{R}^2_+. \end{cases} \tag{1.7}$$

donde el comportamiento asintótico de las soluciones en el infinito es $\sim -4\ln|x|$.

Nosotros consideraremos funciones $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, donde X es ó $\mathbb{R}^n_+$ ó su frontera $\partial\mathbb{R}^n_+$, las cuales satisfacen la condición $(\star)$ siguiente:

$$(\star) \qquad \begin{cases} \text{(i) } f(x) > 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial r}(x) \le 0, & \text{si } |x| < 1, \\ \text{(ii) } f(x) \le 0, & \text{si } |x| \ge 1, \end{cases}$$

donde $\frac{\partial f}{\partial r}$ es la derivada radial de la función f.

En este artículo nosotros presentamos el resultado siguiente, el cual implica la existencia de una familia de funciones que satisfacen las condiciones integrales de Escobar y Hamza y que no son curvatura escalar o curvatura media de una métrica g conforme a la métrica usual en la bola euclidiana.

Teorema 1.1. *Sean $R : \mathbb{R}^n_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ y $h : \partial\mathbb{R}^n_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones diferenciables y acotadas, tales que satisfacen una de las tres condiciones siguientes*

$$\begin{cases} \textit{(i)} & R \equiv 0 \text{ y } h \text{ satisface la condición } (\star). \\ \textit{(ii)} & h \equiv 0 \text{ y } R \text{ satisface la condición } (\star). \\ \textit{(iii)} & R \text{ y } h \text{ satisfacen la condición } (\star). \end{cases} \tag{1.8}$$

Entonces los problemas (1.6) y (1.7) no tienen solución.

Se sigue inmediatamente del Teorema 1.1 que si la función u es solución del problema (1.1) ó (1.2), entonces la derivada radial de una de las funciones R o h debe cambiar de signo en la región donde es positiva.

Nosotros utilizamos en este trabajo el método usado por Chen y Lin [4], en el problema de la curvatura escalar prescrita sobre la esfera S^n.

2. Resultado principal

En este sección demostramos el Teorema 1.1, el cual implica la existencia de una familia de funciones que no son curvatura escalar o curvatura media de una métrica g conforme a la métrica usual en la bola euclidiana. Este teorema se sigue de los tres lemas que demostraremos a continuación. En el primero de ellos usamos el principio del máximo fuerte mientras que en los otros usamos el método de mover esferas.

Lema 2.1. *Sean $w \in C^2\left(B_1^+\right) \cap C^1\left(\partial B_1^+\right)$ una función no negativa, donde B_1^+ es la n-bola unitaria en $\mathbb{R}^n_+$, $D(x)$ es una función continua y acotada en B^1_+, y $C(x)$ es una función continua y acotada en $\partial' B_1^+ = \partial B_1^+ \cap \partial\mathbb{R}^n_+$. Si $w \not\equiv 0$, $w = 0$ en $\partial'' B_1^+ = \partial B_1^+ \cap \mathbb{R}^n_+$ y w es solución del problema*

$$\begin{cases} \Delta w + D(x)w \leq 0, & \text{en } \; B_1^+, \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} + C(x)w \geq 0, & \text{sobre } \; \partial' B_1^+, \end{cases} \tag{2.1}$$

entonces $w > 0$ en B_1^+.

Demostración. Sea $u(x) = e^{\alpha x_n}$ en B_1^+ donde $\alpha > 0$ con $\alpha \geq \max_{x\in\partial' B_1^+}\{C(x)\}$ y $\alpha^2 \geq \min_{x\in B_1^+}\{-D(x)\}$. Entonces $\Delta u = \alpha^2 e^{\alpha x_n}$ en B_1^+ y $\dfrac{\partial u}{\partial \eta} = -\alpha e^{\alpha x_n}$ en $\partial' B_1^+$. Si $v = \dfrac{w}{u}$ entonces v es no negativa, no identicamente cero en B_1^+, se anula en $\partial'' B_1^+$, y satisface la ecuación

$$\Delta w = u\Delta v + 2\nabla v \nabla u + v\Delta u,$$

lo cual implica que

$$\Delta v + \left(2\frac{\nabla u}{u}\right)\nabla v + \left(\frac{\Delta u}{u} + D(x)\right)v = \frac{\Delta w}{u} + \frac{D(x)}{u}w \leq 0 \quad \text{en } B_1^+,$$

donde

$$\frac{\Delta u}{u} + D(x) = \alpha^2 + D(x) \geq 0.$$

De aquí tenemos que

$$\Delta v + \left(2\frac{\nabla u}{u}\right)\nabla v \leq 0 \quad \text{en } B_1^+.$$

Aplicando el principio del mínimo se tiene que el mínimo de la función v está en la frontera de B_1^+. Como en $\partial' B_1^+$

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{\frac{\partial w}{\partial \eta}u - w\frac{\partial u}{\partial \eta}}{u^2} \geq (-C(x) + \alpha)v \geq 0,$$

se sigue del Lema de Hopf que el mínimo de v está en $\partial'' B_1^+$. Dado que $w = 0$ en $\partial'' B_1^+$, entonces $v = 0$ en $\partial'' B_1^+$ y por tanto $v > 0$ en B_1^+. Por consiguiente $w > 0$ en B_1^+, como queríamos demostrar. ☑

Lema 2.2. *Sean h y R funciones diferenciables definidas en $\partial\mathbb{R}_+^n$ y $\mathbb{R}_n^+$ respectivamente, las cuales satisfacen (1.8). Sea u una solución del problema (1.6), entonces*

$$u(\lambda x) > |x|^{2-n}\, u\left(\frac{\lambda x}{|x|^2}\right); \quad \forall x \in B_1^+; \quad 0 < \lambda \leq 1 \tag{2.2}$$

Demostración. Demostremos primero la desigualdad para $\lambda = 1$; es decir

$$u(x) > |x|^{2-n}\, u\left(\frac{x}{|x|^2}\right); \quad \forall x \in B_1^+$$

Sean $v(x) = |x|^{2-n}\, u\left(\frac{x}{|x|^2}\right)$ la transformada de Kelvin y $w = u - v$. Entonces $v(x)$ satisface el problema

$$\begin{cases} -\Delta \mathrm{v} = R(\frac{x}{|x|^2})v^{\frac{n+2}{n-2}}, & \text{en } B_1^+, \\ \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \eta} = h(\frac{x}{|x|^2})\mathrm{v}^{\frac{n}{n-2}}, & \text{en } \partial B_1^+, \end{cases} \tag{2.3}$$

y por lo tanto w satisface

$$\begin{cases} \Delta w = -R(x)u^{n+2/n-2} + R\left(\frac{x}{|x|^2}\right)v^{n+2/n-2} \leq 0, & \text{en } B_1^+, \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} = h(x)u^{n/n-2} - h\left(\frac{x}{|x|^2}\right)v^{n/n-2} \geq 0, & \text{en } \partial' B_1^+, \end{cases}$$

donde al menos una de las desigualdades es estricta.

Por el principio del máximo y el Lema de Hopf, el mínimo de w pertenece a $\partial'' B_1^+$. Como $w = 0$ en $\partial'' B_1^+$ y $w \not\equiv 0$, entonces $w > 0$ en B_1^+, con lo cual queda demostrado el lema para $\lambda = 1$.

Ahora demostraremos la desigualdad (2.2) para todo $\lambda \in (0,1]$. Sea $u_\lambda(x) = \lambda^{\frac{n}{2}-1}u(\lambda x)$. Entonces

$$\begin{cases} -\Delta \mathrm{u}_\lambda = R(\lambda x) u_\lambda^{\frac{n+2}{n-2}}, & \text{en } \mathbb{R}^n_+, \\ \frac{\partial \mathrm{u}_\lambda}{\partial \eta} = h(\lambda x) \mathrm{u}_\lambda{}^{\frac{n}{n-2}}, & \text{en } \partial\mathbb{R}^n_+. \end{cases} \tag{2.4}$$

Sea $v_\lambda(x) = |x|^{2-n} u_\lambda \left(\frac{x}{|x|^2}\right)$; la transformada de Kelvin de u_λ. Entonces v_λ satisface el problema

$$\begin{cases} -\Delta \mathrm{v}_\lambda = R(\frac{\lambda x}{|x|^2}) v_\lambda^{\frac{n+2}{n-2}}, & \text{en } \mathbb{R}^n_+, \\ \frac{\partial \mathrm{v}_\lambda}{\partial \eta} = h(\frac{\lambda x}{|x|^2}) \mathrm{v}_\lambda{}^{\frac{n}{n-2}}, & \text{en } \partial\mathbb{R}^n_+. \end{cases} \tag{2.5}$$

Sea $w_\lambda = u_\lambda - v_\lambda$. Entonces de (2,4) y (2,5) tenemos

$$\begin{cases} \Delta w_\lambda + R(\frac{\lambda x}{|x|^2})\Psi_\lambda w_\lambda = \left[R(\frac{\lambda x}{|x|^2}) - R(\lambda x)\right] u_\lambda^{\frac{n+2}{n-2}}, & \text{en } \mathbb{R}^n_+, \\ \frac{\partial \mathrm{w}_\lambda}{\partial \eta} + h(\frac{\lambda x}{|x|^2})\Phi_\lambda w_\lambda = -\left[h(\frac{\lambda x}{|x|^2}) - h(\lambda x)\right] u_\lambda^{\frac{n}{n-2}}, & \text{en } \partial\mathbb{R}^n_+, \end{cases} \tag{2.6}$$

donde Ψ_λ es una función con valores entre $\frac{n+2}{n-2}u_\lambda^{\frac{4}{n-2}}$ y $\frac{n+2}{n-2}v_\lambda^{\frac{4}{n-2}}$ y Φ_λ es una función con valores entre $\frac{n}{n-2}u_\lambda^{\frac{2}{n-2}}$ y $\frac{n}{n-2}v_\lambda^{\frac{2}{n-2}}$.

La hipótesis (1,8) implica que $R(\frac{\lambda x}{|x|^2}) - R(\lambda x) \leq 0$ y $h(\frac{\lambda x}{|x|^2}) - h(\lambda x) \leq 0$, si $\lambda \leq 1$ y $x \leq 1$. Se sigue de (2,6) que

$$\begin{cases} \Delta w_\lambda + D_\lambda(x) w_\lambda \leq 0, & \text{en } B_1^+, \\ \frac{\partial \mathrm{w}_\lambda}{\partial \eta} + C_\lambda(x) w_\lambda \geq 0, & \text{en } \partial' B_1^+, \end{cases} \tag{2.7}$$

donde $D_\lambda(x) = R(\frac{\lambda x}{|x|^2})\Psi_\lambda$ y $C_\lambda(x) = h(\frac{\lambda x}{|x|^2})\Phi_\lambda$, y tanto $C_\lambda(x)$ como $D_\lambda(x)$ son acotadas si $\lambda \in [\lambda', 1]$ para algún $\lambda' > o$.

Si $\lambda > |x|$, entonces $h(\frac{\lambda x}{|x|^2}) \leq 0$, $R(\frac{\lambda x}{|x|^2}) \leq 0$, $h(\lambda x) \geq 0$ y $R(\lambda x) \geq 0$, donde al menos una de las dos últimas desigualdades es estricta. Por lo tanto para todo λ, una de las desigualdades de (2,7), es estricta en alguna región, lo cual implica que w_λ no es idénticamente cero. Ahora (2.2) es equivalente a

$$w_\lambda > 0 \qquad \text{en} \qquad B_1^+. \tag{2.8}$$

Se sabe que (2.8) es verdadero para $(x, \lambda) \in B_1^+ \times \{1\}$. Ahora hacemos decrecer λ. Supongamos que (2.8) no se da para todo $\lambda \in (0,1]$ y que $\lambda_o > 0$ es el número más pequeño tal que la desigualdad es verdadera para todo $(x, \lambda) \in B_1^+ \times [\lambda_o, 1]$. Llegaremos a una contradición mostrando que para valores de λ muy cercanos y menores a λ_o la desigualdad sigue siendo verdadera. De lo anterior y la demostración del lema (2.1) tenemos que

$$w_{\lambda_o} > 0 \quad \text{en} \quad B_1^+ \quad \text{y} \quad \frac{\partial w_{\lambda_o}}{\partial \eta} < 0 \quad \text{sobre} \quad \partial'' B_1^+.$$

Lo anterior combinado con el hecho que $w_\lambda = 0$ sobre $\partial'' B_1^+$ implica que $w_\lambda > 0$ en B_1^+ para λ muy cercano a λ_o. De esta manera queda demostrado el lema (2.2). ☑

Lema 2.3. *Sean h y R funciones diferenciables definidas en $\partial\mathbb{R}^2_+$ y $\mathbb{R}^2_+$ respectivamente las cuales satisfacen (1.8). Sea u una solución de (1.7). Entonces*

$$u(\lambda x) > u\left(\frac{\lambda x}{|x|^2}\right) - 4\ln|x|\,, \qquad \forall x \in B_1^+(0), \qquad 0 < \lambda \leq 1 \tag{2.9}$$

Demostración. Demostraremos primero la desigualdad para $\lambda = 1$. Es decir

$$u(x) > u\left(\frac{x}{|x|^2}\right) - 4\ln|x|\,, \qquad \forall x \in B_1^+(0).$$

Sean $v(x) = u\left(\frac{x}{|x|^2}\right) - 4\ln|x|$ y $w = u - v$. Entonces $v(x)$ satisface el problema

$$\begin{cases} -\Delta \mathrm{v} = R\left(\frac{x}{|x|^2}\right)e^{2v}, & \text{en } \mathbb{R}^2_+, \\ \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \eta} = h\left(\frac{x}{|x|^2}\right)e^{\mathrm{v}}, & \text{en } \partial\mathbb{R}^2_+, \end{cases} \tag{2.10}$$

y por lo tanto w satisface

$$\begin{cases} \Delta \mathrm{w} = -R(x)e^{2u} + R\left(\frac{x}{|x|^2}\right)e^{2u} < 0, & \text{en } B_1^+, \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} = h(x)e^{u} - h\left(\frac{x}{|x|^2}\right)e^{u} > 0 & , \text{ en } \partial B_1^+, \end{cases}$$

por el principio del máximo y el Lema de Hopf, el mínimo de w pertenece a $\partial'' B_1^+$. Como $w = 0$ en $\partial'' B_1^+$ y $w \not\equiv 0$, entonces $w > 0$ en B_1^+, con lo cual queda demostrado el lema para $\lambda = 1$.

Sean $u_\lambda(x) = u(\lambda x) + 2\ln\lambda$ y $v_\lambda(x) = u_\lambda\left(\frac{x}{|x|^2}\right) - 2\ln|x|$. Entonces u_λ satisface el problema

$$\begin{cases} -\Delta u_\lambda = R(\lambda x)e^{2u_\lambda}, & \text{en } \mathbb{R}^2_+, \\ \frac{\partial \mathrm{u}_\lambda}{\partial \eta} = h(\lambda x)e^{u_\lambda}, & \text{en } \partial\mathbb{R}^2_+, \end{cases} \tag{2.11}$$

y v_λ satisface el problema

$$\begin{cases} -\Delta v_\lambda = R\left(\frac{\lambda x}{|x|^2}\right)e^{2v_\lambda}, & \text{en } \mathbb{R}^2_+, \\ \frac{\partial \mathrm{v}_\lambda}{\partial \eta} = h\left(\frac{\lambda x}{|x|^2}\right)e^{v_\lambda}, & \text{en } \partial\mathbb{R}^2_+. \end{cases} \tag{2.12}$$

Sea $w_\lambda = u_\lambda - v_\lambda$. Entonces de (2,11) y (2,12) tenemos

$$\begin{cases} \Delta w_\lambda + R\left(\frac{\lambda x}{|x|^2}\right)\Psi_\lambda w_\lambda = \left[R\left(\frac{\lambda x}{|x|^2}\right) - R(\lambda x)\right]e^{2u_\lambda}, & \text{en } \mathbb{R}^2_+, \\ \frac{\partial \mathrm{w}_\lambda}{\partial \eta} + h\left(\frac{\lambda x}{|x|^2}\right)\Phi_\lambda w_\lambda = -\left[h\left(\frac{\lambda x}{|x|^2}\right) - h(\lambda x)\right]e^{u_\lambda}, & \text{en } \partial\mathbb{R}^2_+, \end{cases} \tag{2.13}$$

donde Ψ_λ es una función con valores entre e^{2u_λ} y e^{2v_λ} y Φ_λ es una función con valores entre e^{u_λ} y e^{v_λ}. Por (1,8) se tiene que

$$R\left(\frac{\lambda x}{|x|^2}\right) - R(\lambda x) \ \leq\ 0 \quad \text{y} \quad h\left(\frac{\lambda x}{|x|^2}\right) - h(\lambda x) \ \leq\ 0 \quad \text{si} \quad \lambda \leq 1 \text{ y } r \leq 1.$$

Se sigue de (2,13) que

$$\begin{cases} \Delta w_\lambda + C_\lambda(x) w_\lambda \leq 0, & \text{en } B_1^+, \\ \frac{\partial \mathrm{w}_\lambda}{\partial \eta} + D\lambda(x) w_\lambda \geq 0, & \text{en } \partial B_1^+. \end{cases}$$

La demostración se concluye con un razonamiento similar al que se hizo para demostrar el lema (2.2). ☑

Demostración del Teorema 1.1. Argumentando por contradicción, supongamos que u es solución de (1.6). Si $\lambda \to 0$ en (2.2) entonces $u(0) >\mid x \mid^{2-n} u(0)$. Como $u(0) > 0$, entonces $\mid x \mid^{2-n} < 1$ para todo x en B_1^+, lo cual es una contradicción. Supongamos ahora que u es solución de (1.7). Si $\lambda \to 0$ en (2,9) entonces $\ln |x| > 0$ para $|x| < 1$, lo cual es imposible. ☑

Con lo anterior demostramos que si h y R satisfacen la condición (1.8), entonces los problemas (1.1) y (1.2) no tienen solución.Así, en este caso no existe una métrica conforme a la métrica euclidiana tal que, con dicha métrica, las funciones h y R dadas en los problemas (1.1) sean, respectivamente, la curvatura media de ∂B^n y la curvatura escalar de B^n. También se concluye que, en tal caso, no existe una métrica conforme a la métrica euclidiana tal que, con dicha métrica, h sea la curvatura de la curva ∂B^2 y R sea la curvatura gaussiana del disco B^2.

Referencias

[1] J. Bourguignon & J. Ezin, *Scalar curvature functions in a conformal class of metric and conformal transformations*, Tran. Amer. Math. Soc., **301** (1987), 723–736.

[2] A. Chang, X. Xu & P. Yang, *A perturbation result for prescribing mean curvature*, Math. Ann. **310**, no 3 (1998), 473–496.

[3] W. Chen & C. Li, *A note on the Kazdan-Warner type condiction*, Journal of Differential Geometry, **41** (1995), 259–268.

[4] W. Chen & C. Li, *A neccesary and sufficient condiction for the Nirenberg problem*, Comm. Pure Appl. Math., **48** (1995), 657–667.

[5] P. Cherrier, *Problèmes de Newman non linéaires sur les varietés Riemanniennes*, J. Functional Analysis, **57** (1984), 154–206.

[6] J. Escobar, *Conformal metrics with prescribed mean curvature on the boundary*, Cal. Var. **4** (1996), 559–592.

[7] J. Escobar, *Uniqueness theorems on conformal deformations of metrics, Sobolev inequalities, and an eigenvalue estimate*, Comm. Pure Appl. Math., **43** (1990), 867–883.

[8] J. Escobar & G. García, *Conformal metrics on the ball with zero scalar curvature and prescribed mean curvature on the boundary*, por aparecer en Journal of Functional Analysis.

[9] Evans & Lawrence, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society Providence, Vol 19 Rhode Island, 1998.

[10] G. García & R. Quintero, *Simetría y un estudio cualitativo de soluciones de algunos problemas elípticos con condición de Newman*, Matemáticas Enseñanza Universitaria, **3** (1993), 17–30.

[11] H. Hamza, *Sur les transformations conformes des variétés riemannienes à bord*, Journal of Functional Analysis, **92** no 2(1990), 403–447.

[12] Z. Han, *Prescribing Gaussian curvature on S^2*, Duke Math. J., **61** (1990), 679–703.

[13] Z. Han & Y. Li, *A note on the Kazdan-Warner type condiction*, Ann. Inst. Henry Poincaré, **13** (1996), 283–292.

[14] P. Yang & X. Xu, *Remarks on prescribing Gauss curvature*, Trans. Amer. Math. Soc., **336** (1993), 831–840.

(Recibido en marzo de 2003)

Departamento de Matemáticas
Universidad Tecnológica de Pereira
Pereira, Colombia.
e-mail: carlos10@utp.edu.co

Departamento de Matemáticas
Universidad del Valle
Cali, Colombia.
e-mail: ggarcia@univalle.edu.co