**Revista Colombiana de Matemáticas**
Volumen 36 (2002), páginas 1–18

# Teoremas análogos de grupos finitos en grupos de rango de Morley finito

Luis Jaime Corredor
Fabio Ortiz
Universidad de los Andes, Bogotá, COLOMBIA

Abstract. A method used in finite group theory to deduce, among others, Thomsomp's and Timmesfeld's replacement theorems [4], is now developed in the context of groups of finite Morley rank and analogues results are obtained. This procedure then, allows to have an evidence on how the Morley rank behaves as a dimension for an infinite group.

*Keywords and phrases.* Finite groups, Groups of finite Morley rank, Ranked groups, Groups with dimension.

*2000 Mathematics Subject Classification.* Primary: 03C60. Secondary: 03C45, 20A15.

Resumen. Un método usado en grupos finitos para deducir, entre otros, los teoremas de reemplazo de Thompson y Timmesfeld [4], se desarrolla en versión de grupos de rango de Morley finito obteniéndose resultados análogos, lo que permite evidenciar cómo el rango de Morley funciona como una dimensión en un grupo infinito.

## 1. Introducción

En el estudio de teorías $\aleph_1$-categóricas en teoría de modelos surgen las estructuras de rango de Morley finito algunas de las cuales se presentan en la 'naturaleza', por ejemplo la teoría de campos algebráicamente cerrados. En particular, los grupos de rango de Morley finito son una generalización de los grupos algebráicos sobre tales campos[1]. En el caso de un grupo $\omega$-estable el rango de Morley se puede dar mediante unos axiomas dados por A. Borovik y esto hace posible desarrollar una teoría de tales grupos con métodos propios de las teorías de grupos finitos y algebráicos. Esto se evidencia en los resultados que desarrollamos a partir de [4], ahora en versión de grupos de rango de Morley finito.

## 2. Grupos con dimensión

Según la teoría de modelos es posible considerar una estructura en un lenguaje dado poniendo énfasis en conjuntos que son definibles ó interpretables en esta y asignarles 'dimensión' a tales conjuntos. Precisamos esto en seguida.

**2.1. Definibilidad e interpretabilidad.** En esta subsección seguimos los textos [2] y [3].

Entendemos por un grupo $G$ una estructura en un léxico $\mathcal{L}$, que contiene un símbolo de operación binaria $*$ y un símbolo de constante $e$ y posiblemente otros símbolos, tal que restringida al subléxico $\{*, e\}$, es un grupo; es decir, satisface los axiomas de grupo:

1. $\forall x \quad (x * y) * z = x * (y * z)$
2. $\forall x \quad x * e = e * x = e$
3. $\forall y \quad \exists x \quad x * y = y * x = e$

De otro lado, por un conjunto definible en $G$, entenderemos, un subconjunto $A$ de $G^n$ que es $\mathcal{L}$-definible posiblemente con parámetros de $G$; es decir, existe una $\mathcal{L}$-fórmula en $n$ variables libres $\beta(\overline{v})$=$\alpha(\overline{v}, \overline{a})$ , donde $\alpha(\overline{v}, \overline{w})$ es una $\mathcal{L}$-fórmula en $n + k$ variables libres y $\overline{a}$ es una $k$-tupla de elementos de $G$ tal que

$$A = \alpha(G^n, \overline{a}) = \beta(G^n) = \{\overline{m} \in G^n : G \models \alpha[\overline{m}, \overline{a}]\}$$

*Ejemplo* 2.1.1. Con los anteriores supuestos, si $G$ y $H$ son grupos, se tienen los siguientes hechos básicos:

(i) Si $X \subseteq G$ es definible , $C_G(X)$ y $N_G(X)$ son definibles
(ii) Si $A, B \subseteq G$ son definibles entonces $A \cap B$, $A \cup B$,$AB$ y $A \setminus B$ son definibles.
(iii) Si $\phi : G \longrightarrow H$ es un isomorfismo y $A \subseteq G$ es definible, $\phi(A)$ es definible.

*Ejemplo* 2.1.2. *Acciones de grupos.* Una acción de grupo $(G, X)$ puede ser vista como una estructura de primer orden de 2 suertes $G, X$ tomando
$\mathcal{L}$=$\{\cdot, ^{-1}, e, *\}$ en la que además se incluye:

1. $\langle G, \cdot, ^{-1}, e\rangle$ es un grupo.
2. $\forall x \in X \quad \forall g \in G \quad \forall h \in G[g{*}x \in X] \wedge [g{*}(h{*}x) = (gh){*}x] \wedge [e{*}x = x]$.

[1]Para un tal grupo algebraico el rango de Morley coincide con la dimensión de Zariski del grupo sobre el campo.

**Definición 2.1.3.** Sea $A \subseteq M^n$ un subconjunto definible en la estructura $M$. Una relación de equivalencia $\sim$ sobre $A$ es definible en $M$ si existe una $\mathcal{L}_M$-fórmula $\alpha(\overline{x}, \overline{y}, \overline{m})$ en $2n$ variables libres tal que para $\overline{a}, \overline{b} \in A$, $\overline{a} \sim \overline{b}$ si y solo si $M \models \alpha(\overline{x}, \overline{y}, \overline{m})$.

**Definición 2.1.4.** Si $A \subseteq M^n$ es un subconjunto definible en $M$ y $\sim$ es una relación de equivalencia sobre $A$, cualquier combinación booleana de conjuntos de la forma $\frac{A}{\sim}$ se llama conjunto interpretable en $M$. Si $B$ y $B_1$, son conjuntos interpretables en $M$ la función $f : B^k \longrightarrow B_1^l$ es interpretable en $M$ si su gráfico lo es.

**Definición 2.1.5.** Sea $M$ una $\mathcal{L}$-estructura y $N$ una $\mathcal{L}'$-estructura. Decimos que $N$ es interpretable en $M$ si:

(i) $N$ es un conjunto interpretable en $M$.
(ii) Para cada símbolo de relación $R \in \mathcal{L}'$ el conjunto $R_N$ es interpretable en $M$.
(iii) Para cada símbolo de función $f \in \mathcal{L}'$, la función $f_N$ es interpretable en $M$.

*Ejemplo* 2.1.6. Si $G$ es un grupo y $H$ es un subgrupo definible de $G$ entonces el espacio de coclases laterales $G/H$ es interpretable en $G$. Si $H \triangleleft G$ entonces el grupo $G/H$ es interpretable en $G$. Si $G$ es un grupo y $H \leq G$ es un subgrupo definible, entonces la acción de grupo $(G, G/H)$ es interpretable en $G$.

**2.2. Universo ranqueado.** Dada una $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{M}$, la clase de conjuntos interpretables en $M$ cumple unas propiedades que se pueden abstraer en unos axiomas como sigue.

**Definición 2.2.1.** Una colección $\mathcal{U}$ no vacía de conjuntos que cumplen los axiomas dados en seguida se llamará universo y los conjuntos de la colección se llamarán interpretables.

Axioma 1 (*Clausura bajo operaciones booleanas*). Si $A, B$ son conjuntos interpretables entonces $A \cup B$, $A \cap B$ y $A \smallsetminus B$ son interpretables.

Axioma 2 (*Clausura bajo productos*). Si $A$ y $B$ son conjuntos interpretables, su producto cartesiano $A \times B$ y las proyecciones canónicas

$$\pi_i : A \times B \longrightarrow A \qquad \pi_2 : A \times B \longrightarrow B$$

como también las imágenes de subconjuntos interpretables bajo $\pi_i (i = 1, 2)$ son interpretables. La diagonal $\triangle_2(A) = \{(a, a) : a \in A\}$ es interpretable.

Axioma 3. Si $A$ es interpretable y $a \in A$, $\{a\}$ es interpretable.

Axioma 4 (*Factorización*). Si $A$ es interpretable y $E(x, y)$ es una relación de equivalencia interpretable (es decir, el conjunto $E = \{(x, y) \in A^2 : E(x, y)\}$ es un subconjunto interpretable de $A^2$) entonces el conjunto $A/E$ de clases de equivalencia y la función canónica $\pi_E : A \longrightarrow A/E$ son interpretables.

**Definición 2.2.2.** Un universo $\mathcal{U}$ es ranqueado si existe una función $\mathrm{rk} : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{N}$ que satisface los siguientes axiomas:

Axioma A *(monotonicidad del rango).* $\mathrm{rk}(A) \geq n+1$ si y solo si hay infinitos subconjuntos de $A$ inerpretables no vacíos y mutuamente disjuntos cada uno de rango al menos $n$.

Axioma B *(definibilidad del rango).* Si $f$ es una función interpretable de $A$ en $B$ entonces para cada entero $n$ el conjunto $\{b \in B : \mathrm{rk}(f^{-1}(b) = n\}$ es interpretable.

Axioma C *(aditividad del rango).* Si $f$ es una función interpretable de $A$ sobre $B$ y si para todo $b \in B$, $\mathrm{rk}(f^{-1}(b)) = n$ entonces $\mathrm{rk}(A)$=$\mathrm{rk}(B) + n$.

Axioma D *(eliminación de cuantificadores infinitos).* Para cualquier función interpretable $f$ de $A$ en $B$ hay un entero $m$ tal que para cualquier $b \in B$ la preimágen $f^{-1}(b)$ es infinita siempre que contenga al menos $m$ elementos.

De acuerdo al axioma A el rango de un universo ranqueado queda determinado de forma única. Los conjuntos finitos tienen rango cero y se asume $\mathrm{rk}(\varnothing) = -1$.

*Hecho* 2.2.3. ([2], lema 4.1) Sea $\mathcal{U}$ un universo. Si $f : A \longrightarrow B$ es una función interpretable y $A_1 \subseteq A$ y $B_1 \subseteq B$ son subconjuntos interpretables entonces:

(i) la restricción de $f$ a $A_1$ y la preimagen $f^{-1}(B_1)$ son interpretables.
(ii) si $f$ es biyectiva entonces $f^{-1} : B \longrightarrow A$ es interpretable.

**Definición 2.2.4.** Si $\mathcal{M} = \langle G, \cdot, -1, e, \dots \rangle$ es un grupo y $\mathcal{M}$ es una estructura ranqueada decimos que $M$ es un grupo ranqueado ó más comunmente que $G$ es un grupo ranqueado y de acuerdo a lo dicho en la introducción, es equivalente decir que $G$ es un grupo de rango de Morley finito.

*Hecho* 2.2.5. ([2], sección 4.2) Sea $\mathcal{U}$ un universo ranqueado, y $A$ y $B$ conjuntos interpretables en $\mathcal{U}$. Entonces:

(i) $\mathrm{rk}(A) \geq 1$ si y solo si $A$ es infinito.
(ii) Si $A \subseteq B$ entonces $\mathrm{rk}(A) \leq \mathrm{rk}(B)$.
(iii) $\mathrm{rk}(A \cup B) = \text{máx}(\mathrm{rk}(A), \mathrm{rk}(B))$.

*Hecho* 2.2.6. ([2], ejercicio 4.2.12) *Identidad de Lascar.* Si $G$ es un grupo de rango de Morley finito y $H \leq G$ es un subgrupo definible, entonces $\mathrm{rk}(G) = \mathrm{rk}(G/H) + \mathrm{rk}(H)$. Además si $\phi$ es un homomorfismo interpretable del grupo $G$ entonces $\mathrm{rk}(G) = \mathrm{rk}(\phi(G)) + \mathrm{rk}(\ker \phi)$.

**2.3. Propiedades básicas.** Los siguientes son hechos básicos de los grupos de rango de Morley finito que serán usados frecuentemente. $G$ designa un grupo ranqueado, ([2], caps 4-6).

*Hecho* 2.3.1. Un grupo de rango de Morley finito satisface la condición de cadena descendente para subgrupos definibles y la condición de cadena ascendente para subgrupos definibles conexos.

*Hecho* 2.3.2. *Componente conexa.* Un grupo $G$ de rango de Morley finito tiene un subgrupo definible maximal de índice finito llamado *componente conexa* el cual es característico en $G$ y lo denotamos $G^{\circ}$. Decimos que $G$ es *conexo* si y solo si $G^{\circ}{=}G$.

*Hecho* 2.3.3. Si $K$ es un campo algebráicamente cerrado entonces $K^{+}$ y $K^{*}$ son conexos. Además $\mathrm{rk}(K^{+}) = 1$ y $\mathrm{rk}(K^{*}) = 1$.

*Hecho* 2.3.4. *Teorema de idecomponibilidad de Zil'ber.* El subgrupo generado por un conjunto de subgrupos definibles y conexos es definible y es el producto de un número finito de estos.

*Hecho* 2.3.5. Sean $H \leq G$ un subgrupo conexo y definible y $X \subseteq G$ cualquier subconjunto. Entonces el subgrupo $[H, X]$ es definible y conexo.

*Hecho* 2.3.6. *Clausura definible.* Dado cualquier subconjunto $X \subseteq G$ la intersección de todos los subgrupos definibles que contienen a $X$, por la condición de cadena descendente, es un subgrupo definible que denotamos por $d(X)$ y se llama clausura definible de $X$, el cual posee propiedades importantes que son conservadas al pasar de $X$ a $d(X)$. Citamos algunas:

(i) Si un subgrupo $A$ normaliza al conjunto $X$, $d(A)$ normaliza a $d(X)$.

(ii) Si $(X_i)_{i\in I}$ es una familia de subgrupos conexos de $G$,

$$d\Big(\bigcup_i X_i\Big) = \langle d(X_i) : i \in I\rangle$$

(iii) Si $A \leq G$ centraliza a $X \leq G$ también centraliza a $d(X)$.

(iv) Si $X \subseteq G$ entonces $C_G(X) = C_G(d(X))$.

(v) *Componente conexa de un subgrupo no definible.* Si $A \leq G$ es cualquier subgrupo de $G$, llamamos a $A^0{=}A \cap d(A)^0$ la componente conexa de $A$ y decimos que $A$ es *conexo* si $A{=}A^0$ y se tiene que $A$ es un subgrupo normal de índice finito en $A$ y es el subgrupo conexo maximal de $A$. Además $d(A^0){=}d(A)^0$ y $A^{\circ} \lhd N_G(A)$.

*Hecho* 2.3.7. *Sobre las acciones de grupo.* Si $(G, X)$ es una acción de grupo tal que $X$ es interpretable en $G$ y el grafo de la acción es interpretable en $G$, entonces decimos que la acción es de rango de Morley finito y tenemos:

(i) $(G, X)$ es interpretable en $G$.

(ii) Si $A \subseteq X$ entonces $Stab^{G}(A)$ es definible.

(iii) Si $H \leq G$ es definible, entonces $C_X(H)$ es definible.

## 3. El argumento de Chermak-Delgado

En este capítulo se desarrolla la versión del llamado argumento de medida de Chermak-Delgado que se usa en teoría de grupos finitos [4] para dar una prueba sencilla del *Teorema de Reemplazo de Thomson* y del *Teorema de Reemplazo de Timmesfeld.* Estos teoremas son usados en dicha teoría en casos en los que la fórmula de factorización de Thompson no es aplicable (en [4] se menciona un caso espacífico: la clasificación de $J$-módulos para pares $BN$-locales). Presentaremos algunos resultados análogos a los de [4] en el contexto de rango de Morley finito.

**Teorema 3.1.** *([4], teorema 2.1) Sea $G$ un grupo simple finito y no abeliano. Entonces, $|G| > |A||C_G(A)|$, para cualquier subgrupo propio no trivial. En particular, $|G| > |A|^2$ para cualquier subgrupo abeliano $A$ de $G$.*

En el caso de grupos de rango de Morley finito obtenemos un resultado análogo:

**Teorema 3.2.** *Sea $G$ un grupo simple de rango de Morley finito entonces $\mathrm{rk}(G) \geq \mathrm{rk}(A) + \mathrm{rk}(C_G(A))$ para cada subgrupo definible $A$ de $G$. Si $A$ es abeliano $\mathrm{rk}(G) \geq 2\,\mathrm{rk}(A)$.*

El siguiente teorema nos fue comunicado por A. Borovik, pero es debido a Muzichuk. Su prueba, no publicada, se puede deducir de la prueba del Teorema 3.4 abajo, es decir, la versión en rango de Morley finito.

**Teorema 3.3.** *Sea $G$ un grupo finito con un subgrupo abeliano $A$ tal que $|A|^2 > |G|$. Entonces, existe un subgrupo normal $N$ de $G$ tal que $|N||Z(N)| > |A|^2$. Además, si el índice de $A$ en $G$ es $n$, entonces existe un subgrupo abeliano y normal en $G$ de índice acotado por $n^2$.*

**Teorema 3.4.** *Sea $G$ un grupo infinito de rango de Morley finito y $A$ un subgrupo abeliano definible de $G$ tal que $\mathrm{rk}(G) < 2\,\mathrm{rk}(A)$. Entonces:*

- *(i) Existe un subgrupo definible y normal $N$ en $G$ tal que $\mathrm{rk}(N)+\mathrm{rk}(Z(N)) > 2\,\mathrm{rk}(A)$.*
- *(ii) Si $\mathrm{rk}(\frac{G}{A}) = n$ entonces existe un subgrupo $N$ abeliano, normal y definible en $G$ tal que $\mathrm{rk}(\frac{G}{N}) \leqslant 2n$.*

**Definición 3.5.** Sean $G, H$ grupos de rango de Morley finito y supongamos que $H$ es interpretable en $G$ y que hay una acción de $G$ sobre $H$ que es interpretable en $G$. Sea $D(G)$ la clase de subgrupos definibles no triviales de $G$ y $\alpha$ un numero real positivo. Definimos:

$$m_\alpha = m_\alpha(G, H) = \sup\{\alpha rk(A) + \mathrm{rk}(C_H(A)) : A \in D(G)\}.$$

En adelante, a menos que se diga lo contrario, supondremos que $G$ y $H$ no son finitos con el fin de tener $m_\alpha > 0$.

Observamos que $m_\alpha$ está bien definido y, más aún, que el conjunto sobre el que se toma el sup es finito. El análisis de los términos dados en la Definición 3.5 es lo que llamamos *Argumento de medida de Chermak-Delgado*. Sean

$$\alpha\mathcal{M} = \alpha\mathcal{M}(G, H) = \{A \in D(G) : \alpha\,\mathrm{rk}\,A + \mathrm{rk}\,C_H(A) = m_\alpha\}.$$

y $\alpha\mathcal{M}_*$ los miembros minimales de $\alpha\mathcal{M}$ con respecto a la inclusión.

**Lema 3.6.** *Sean $G$ y $H$ grupos de rango de Morley finito y supongamos que hay una acción interpretable de $G$ sobre $H$, respecto a la cual designamos, para $A \subseteq G$ y $X \leq H$,*

$$C_A(X) = \{a \in A : x^a = x \quad \text{para cada} \quad x \in X\};$$

$$C_X(A) = \{x \in X : x^a = x \quad \text{para cada} \quad a \in A\}.$$

*Entonces*

*(i)* $C_H(A) = C_H(d(A))$ *y es definible.*
*(ii)* $C_X(A)$ *es definible si* $X$ *es definible.*
*(iii)* $C_A(X)$ *es definible.*

*Demostración.* *(i)* Como $A \subseteq d(A)$; $C_H(d(A)) \subseteq C_H(A)$. De otra parte $A \leq Stab^G(C_H(A))$, pero $Stab^G(X)$ es definible para cada $X \subseteq H$ (Hecho 2.3.7); así $d(A) \leq Stab^G(C_H(A))$. Por lo tanto, $C_H(A) = C_H(Stab^G(C_H(A))) \subseteq C_H(d(A))$, lo que prueba la igualdad *(i)*.
*(ii)* $C_X(A) = C_H(A) \cap X$ es definible por *(i)*.
*(iii)* $C_A(X) = Stab^G(X) \cap A$ es definible (por el Hecho 2.3.7). ☑

*Hecho* 3.7. ([5], hecho 6.2.3) Si $G$ es grupo de rango de Morley finito y $A, B$ subgrupos definibles de $G$ entonces

$$\mathrm{rk}(AB) = \mathrm{rk}(A) + \mathrm{rk}(B) - \mathrm{rk}(A \cap B).$$

*Hecho* 3.8. ([5], Lema 6.2.4) Si $G$ es grupo de rango de Morley finito y $A, B$ son subgrupos definibles de $G$ entonces

$$\mathrm{rk}\left(\frac{AB}{A}\right) = \mathrm{rk}\left(\frac{B}{A \cap B}\right).$$

Tenemos las siguientes propiedades de $\alpha\mathcal{M}$:

**Proposición 3.9.** *Sean $G$ y $H$ como en la Definición 3.1 y $A, B \in \alpha\mathcal{M}$. Entonces:*

*(i)* *si $A$ no es finito,* $A^\circ \in \alpha\mathcal{M}$.
*(ii)* $A^g \in \alpha\mathcal{M}$ *para cada* $g \in G$
*(iii)* *si* $A \cap B \neq 1$ *entonces* $A \cap B \in \alpha\mathcal{M}$, *en particular si* $A^\circ \cap B^\circ \neq 1$, $A^\circ \cap B^\circ \in \alpha\mathcal{M}$. *Además* $\mathrm{rk}\, C_H(A \cap B) = \mathrm{rk}(C_H(A) \cdot C_H(B))$.
*(iv)* *Si* $A \cap B \neq 1$ *ó si* $\mathrm{rk}(H) \leq m_\alpha$ *entonces:* $d(AB)(= d(BA)) \in \alpha\mathcal{M}$ *y* $\mathrm{rk}(d(AB)) = \mathrm{rk}(AB)$.
*(v)* *Sea $X \leq G$, subgrupo definible y $\alpha\mathcal{N} = \alpha\mathcal{M}(X, H)$. Si $A \in \alpha\mathcal{M}_*$ entonces $A \in \alpha\mathcal{N}_*$.*

*Demostración.* *(i)* Sea $a \in \alpha\mathcal{M}$, y supongamos que $A$ no es finito. Vemos que $A^\circ \in D(G)$. Como $\mathrm{rk}(A^\circ) = \mathrm{rk}(A)$ y $\mathrm{rk}(A) + \mathrm{rk}(C_H(A)) \geq \mathrm{rk}(A^\circ) + \mathrm{rk}(C_H(A^\circ))$, entonces $\mathrm{rk}(C_H(A)) \geq (\mathrm{rk}(C_H(A^\circ))$ y como $A^\circ \leq A$ concluimos $\mathrm{rk}(C_H(A^\circ)) \geq \mathrm{rk}(C_H(A))$. Luego $A^\circ \in \alpha\mathcal{M}$.

*(ii)* Sea $g \in G, \mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A^g)$. Es fácil ver que $h \in C_H(A^g)$ sí y solo sí $g^h \in C_H(A)$; entonces hay una biyección definible entre $C_H(A^g)$ y $C_H(A)$ de donde $\mathrm{rk}(C_H(A)) = \mathrm{rk}(C_H(A^g))$ y así $A^g \in \alpha\mathcal{M}$.

*(iii)* Usando la identidad de $\mathrm{rk}(AB) = \mathrm{rk}(A) + \mathrm{rk}(B) - \mathrm{rk}(A \cap B)$ válida para subgrupos definibles de un grupo de rango de Morley finito (Hecho 3.7) y la identidad de Lascar obtenemos:

$$\begin{aligned} \alpha\,\mathrm{rk}\left(\frac{B}{B \cap A}\right) &= \alpha\,\mathrm{rk}\,B - \alpha\,\mathrm{rk}(A \cap B) \\ &= \alpha\,\mathrm{rk}(A) + \alpha\,\mathrm{rk}(B) - \alpha\,\mathrm{rk}(A \cap B) - \alpha\,\mathrm{rk}(A) \qquad (*) \\ &= \alpha\,\mathrm{rk}\left(\frac{AB}{A}\right) \leq \alpha\,\mathrm{rk}\left(\frac{d(AB)}{A}\right) \leq \mathrm{rk}\left(\frac{C_H(A)}{C_H(AB)}\right), \end{aligned}$$

teniéndose la última desigualdad de acuerdo al Lema 3.6 *(i)*. Ahora bien, como

$$C_H(AB) = C_H(A) \cap C_H(B)$$

entonces

$$\mathrm{rk}\left(\frac{C_H(A)}{C_H(AB)}\right) = \mathrm{rk}\left(\frac{C_H(A)C_H(B)}{C_H(B)}\right).$$

Pero como $C_H(A \cap B) \geq C_H(A) \cap C_H(B)$ obtenemos, aplicando el Lema 3.6 *(i)* y el Hecho 3.8,

$$\begin{aligned} \alpha\,\mathrm{rk}\left(\frac{B}{A \cap B}\right) &= \alpha\,\mathrm{rk}\left(\frac{AB}{A}\right) \leq \alpha\,\mathrm{rk}\left(\frac{d(AB)}{A}\right) \leq \mathrm{rk}\left(\frac{C_H(A)}{C_H(AB)}\right) \qquad (**) \\ &= \mathrm{rk}\left(\frac{C_H(A) \cap C_H(B)}{C_H(B)}\right) \leq \mathrm{rk}\left(\frac{C_H(A \cap B)}{C_H(B)}\right). \end{aligned}$$

De otra parte, si $A \cap B \neq 1$ entonces como $B \in \alpha\mathcal{M}$,

$$\alpha\,\mathrm{rk}(B) + \mathrm{rk}(C_H(B)) \geq \alpha\,\mathrm{rk}(A \cap B) + \mathrm{rk}\,C_H(A \cap B),$$

es decir,

$$\alpha\,\mathrm{rk}\left(\frac{B}{A \cap B}\right) \geq \mathrm{rk}\left(\frac{C_H(A \cap B)}{C_H(B)}\right).$$

Entonces las desigualdades (*) y (**) son realmente igualdades, probando que $A \cap B \in \alpha\mathcal{M}$.

*(iv)* Nótese que cuando $A \cap B \neq 1$ ó cuando $m_\alpha \geq \mathrm{rk}(H)$, es válido que $m_\alpha = \alpha\,\mathrm{rk}(B) + \mathrm{rk}(C_H(B)) \geq \alpha\,\mathrm{rk}(A \cap B) + \mathrm{rk}(C_H(A \cap B))$ y entonces es válido también que las desigualdades en (*) y en (**) son igualdades obteniéndose $m_\alpha = \alpha\,\mathrm{rk}(d(AB)) + \mathrm{rk}(C_H(d(AB))) = \alpha\,\mathrm{rk}(AB) + \mathrm{rk}(C_H(AB))$ y luego aplicando el Lema 3.6 *(i)* concluímos lo afirmado en *(iv)*

La prueba de *(v)* es trivial. ☑

*Observaciones:* Si en *(iii)* y *(vi)* reemplazamos la hipótesis $A \cap B \neq 1$ por $A \cap B$ no es finito, entonces se mantiene la conclusión.

Es interesante notar que si en la definición de $m_\alpha$ (Definición 3.5) tomamos $\alpha \operatorname{rk}(A) + \operatorname{rk}(C_H(A^\circ))$ en lugar de $\alpha \operatorname{rk}(A) + \operatorname{rk}(C_H(A))$ para $A \in D(G)$ también se mantienen los resultados anteriores y sobre la clase de los subgrupos conexos los números así definidos son coincidentes.

**Proposición 3.10.** *Sea $A \in \alpha\mathcal{M}_*$. Entonces:*

*(i)* *$A \cap A^g = 1$ para cada $g \in G \setminus N_G(A)$.*
*(ii)* *Si $m_\alpha > \operatorname{rk}(H)$ entonces $\alpha\mathcal{M}_*$ no tiene miembros finitos y tiene un único miembro que es $\bigcap_{X \in \alpha\mathcal{M}} X$.*
*(iii)* *Si $m_\alpha > \operatorname{rk}(H)$ entonces $A = A^\circ$.*

*Demostración.* *(i)* Si $A \in \alpha\mathcal{M}_*$ y $g \in G \setminus N_G(A)$ entonces $A^g \in \alpha\mathcal{M}$ por la Proposición 3.7 *(ii)* y por minimalidad $A^g \in \alpha\mathcal{M}_*$. Por la Proposición 3.9 *(iii)* si $A^g \neq A$ y $A \cap A^g \neq 1$ entonces $A \cap A^g \in \alpha\mathcal{M}$, lo que contradice la minimalidad de $A$ entonces $A^g \cap A = 1$.

*(ii)* Sean $A, B \in \alpha\mathcal{M}_*$ (es claro que hay miembros minimales de $\alpha\mathcal{M}$). Entonces si $A \cap B = 1$, de la desigualdad (**), $\alpha \operatorname{rk} B + \operatorname{rk} C_H(B) = m_\alpha \leq H$, lo cual es una contradicción; así $A = B$. Además si hubiera un miembro finito entonces $\operatorname{rk}(H) \geq m_\alpha$. Además

$$\bigcap_{X \in \alpha\mathcal{M}} X$$

se puede considerar como una intersección finita de conjuntos de $\alpha\mathcal{M}$ y como

$$\bigcap_{X \in \alpha\mathcal{M}} X \neq 1$$

porque ($m_\alpha > \operatorname{rk} H$) entonces

$$\bigcap_{X \in \alpha\mathcal{M}} X \in \alpha\mathcal{M}_*$$

es el único miembro minimal de $\alpha\mathcal{M}$.

*(iii)* Por *(ii)* $A$ no es finito y por La Proposición 3.9 *(i)*, $A^\circ \in \alpha\mathcal{M}$ y por minimalidad $A = A^\circ$ ☑

**Corolario 3.11.** *([5], Corolario 6.2.7) Si $\operatorname{rk}(H) < m_\alpha$ entonces*

$$\Big(\bigcap_{X \in \alpha\mathcal{M}} X\Big)^\circ \neq 1.$$

**Corolario 3.12.** *([5], Corolario 6.2.8) Si $A, B \in \alpha\mathcal{M}$; $A \cap B \neq 1$ y $\operatorname{rk}(H) < m_\alpha$ entonces $(A \cap B)^\circ \neq 1$.*

Hasta ahora hemos usado miembros minimales de $\alpha\mathcal{M}$; serán útiles también los miembros maximales. Sin embargo, es necesario tener en cuenta que en los grupos de rango de Morley finito las cadenas ascendentes se estabilizan cuando los subgrupos que las forman son conexos. Por esta razón introducimos los siguientes términos:

$$D(G)^\circ = \{A^\circ : A \in D(G), A^\circ \neq 1\}.$$

y $\alpha\mathcal{M}^*$ son los miembros maximales de $D(G)^\circ \cap \alpha\mathcal{M}$ con respecto a la inclusión.

**Proposición 3.13.** *Si $A \in \alpha\mathcal{M}^*$ entonces:*

*(i)* $A \cap A^g = 1$ *para* $g \in G \setminus N_G(A)$.

*(ii) Si* $m_\alpha \geq \mathrm{rk}(H)$ *entonces* $|\alpha\mathcal{M}^*| = 1$ *y el único miembro maximal de* $\alpha\mathcal{M} \cap D(G)^\circ$ *es* $\langle X : X \in \alpha\mathcal{M} \cap \mathcal{D}(G)^\circ \rangle$.

*Demostración.* *(i)* Sea $g \in G \setminus N_G(A)$ y supongamos $A^g \cap A \neq 1$. Como $A, A^g$ son conexos, por la Proposición 3.9 *(iv)* $d(AA^g) \in \alpha\mathcal{M} \cap D(G)^\circ$; pero $d(AA^g) \geq A$ de donde $d(AA^g) = A$ y $A = A^g$ lo cual es una contradicción.

*(ii)* Supóngase $m_\alpha \geq \mathrm{rk}(H)$ y $A, B \in \alpha\mathcal{M}^*$. Por la Proposición 3.9 *(iv)* $d(AB) \in \alpha\mathcal{M}$ y es conexo. Entonces $d(AB) = A$ y también $d(AB) = B$ por la maximalidad de $A$ y $B$. Así $A = B$. Por el teorema de Zil'ber $\langle X : X \in \alpha\mathcal{M} \cap D(G)^\circ \rangle$ es conexo y esta en la clase $\alpha\mathcal{M}$, luego es el único en $\alpha\mathcal{M}$. ☑

**Corolario 3.14.** *Sea $X$ subgrupo definible de $G$. Sean $\alpha\mathcal{N} = \alpha\mathcal{M}(X, H)$ y $A \in \alpha\mathcal{M}$ y $B \in \alpha\mathcal{N} \cap D(G)^\circ$ Entonces $B \subseteq A$ ó $A \cap B$ es finito. Si además* $\mathrm{rk}\, H \leq m_\alpha$ *debe ser $B \subseteq A$.*

*Demostración.* Sean $A, B$ como en la hipótesis. Por la Proposición 3.9 se puede suponer que $A$ es conexo. Si $\alpha\,\mathrm{rk}(\frac{B}{A\cap B}) \geq \mathrm{rk}(\frac{C_H(A)}{C_H(AB)})$ entonces por el Hecho 3.8, $\alpha\,\mathrm{rk}(\frac{AB}{A}) \geq \mathrm{rk}(\frac{C_H(A)}{C_H(AB)})$ de donde

$$\alpha\,\mathrm{rk}(AB) + \mathrm{rk}\, C_H(AB) \geq \alpha\,\mathrm{rk}(A) + \mathrm{rk}(C_H(A))$$

y así,

$$\alpha\,\mathrm{rk}(d(AB)) + \mathrm{rk}\, C_H(AB) \geq \alpha\,\mathrm{rk}(A) + \mathrm{rk}(C_H(A))$$

pero entonces $d(AB) \in \alpha\mathcal{M} \cap D(G)^\circ$ y por la maximalidad de $A$, $A = d(AB) \geq B$. Como

$$\alpha\,\mathrm{rk}\left(\frac{B}{A \cap B}\right) < \mathrm{rk}\left(\frac{C_H(A)}{C_H(AB)}\right) \leqslant \mathrm{rk}\left(\frac{C_H(A \cap B)}{C_H(B)}\right) \leq \mathrm{rk}\left(\frac{(C_H((A \cap B)^\circ)}{C_H(B)}\right)$$

(ver prueba de la Proposición 3.9 *(iii)*), se sigue que

$$\alpha\,\mathrm{rk}(B) + \mathrm{rk}\, C_H(B) < \alpha\,\mathrm{rk}(A \cap B) + \mathrm{rk}(C_H(A \cap B)^\circ).$$

Es decir,

$$\alpha\,\mathrm{rk}(B) + \mathrm{rk}(C_H(B)) < \alpha rk(A \cap B)^\circ + \mathrm{rk}\, C_H(A \cap B)^\circ.$$

Como $A \cap B \leq X$ y $B \in \alpha\mathcal{N} \cap D(G)^\circ$ entonces debe ser $(A \cap B)^\circ = 1$. Además, por lo anterior, si $A \cap B$ es finito $\alpha\,\mathrm{rk}(B) + (\mathrm{rk}\, C_H(B)) < \mathrm{rk}(H)$; así, dado que $\mathrm{rk}\, H \leq m_\alpha$ debemos tener $B \subseteq A$. ☑

**Corolario 3.15.** *([5], Corolario 6.2.11) Sea $X$ subgrupo definible de $G$ tal que* $\alpha\,\mathrm{rk}(X) + \mathrm{rk}(C_H(X)) \geq \mathrm{rk}(H)$ *y* $\{A\} = \alpha\mathcal{M}^*$ *entonces* $A \cap X \supseteq \langle \alpha\mathcal{M}(X, H) \rangle$.

Hasta este momento los resultados obtenidos son análogos de los presentados en el artículo de Chermak-Delgado [4]. Sin embargo, encontramos ahora un primer punto que no tiene un análogo por lo menos con las hipótesis que fijamos inicialmente. A fin de explicarlo mejor, daremos los análogos de los conceptos básicos para grupos finitos.

**Definición 3.16.** ([4], Sección 1) Sean $G, H$ grupos finitos y supóngase que $G$ actúa sobre $H$. Sea $\mathcal{G}$ la clase de subgrupos de $G$ distintos de $\{1\}$. Para $\alpha > 0$ definimos

$$m_\alpha = \mathcal{M}(G,H) = \sup\{|A||C_H(A)| : A \in \mathcal{G}\}$$

y

$$\alpha\mathcal{M} = \{A \in \mathcal{G} : |A||C_H(A)| = m_\alpha\}$$

y $\alpha\mathcal{M}_*$ los miembros minimales de $\alpha\mathcal{M}$ con respecto a la inclusión.

*Hecho* 3.17. ([4], Lema 1.6) Si $m_\alpha \geq |H|$ y $|\alpha\mathcal{M}_*| > 1$ (lo que en realidad se tiene si $m_\alpha = |H|$) entonces si $A, B$ son miembros distintos de $\alpha\mathcal{M}_*$, $[A, B] = 1$.

Con la notación y resultados previos para un grupo $G$ de rango de Morley finito se tiene el siguiente contraejemplo: sea $\alpha = 1$ y $G$ un grupo conexo de centro trivial y no nilpotente y además de rango 2. Tomemos $G = H$ y la acción de $G$ sobre $H$ por conjugación. Como $\mathrm{rk}(G) = 2$ entonces $G \in \alpha\mathcal{M}$ pues $\mathrm{rk}(G) + \mathrm{rk}(C_G(G)) = \mathrm{rk}(G) + \mathrm{rk}(Z(G)) = 2$. Por lo tanto si $X$ es subgrupo definible de $G$ y $X \neq \{1\}$ entonces $\mathrm{rk}(X) + \mathrm{rk}\, C_G(X) \leq 2$ pues como $G$ es conexo no tiene subgrupos del mismo rango, y como $Z(G) = 1$, $\mathrm{rk}(C_G(X)) \leq 1$. De otra parte, puesto que un grupo con estas hipótesis es isomorfo a $K^+ \rtimes K^*$, el producto semidirecto de $K^+$ por $K^*$ con la acción por multiplicación, para algún campo algebráicamente cerrado $K$, tomemos $A = K^+$, $B = K^*$; entonces $C_G(A) = A$, $C_G(B) = B$ y usando el Hecho 2.3.3 tenemos

$$\mathrm{rk}(A) + \mathrm{rk}\, C_G(A) = \mathrm{rk}(A) + \mathrm{rk}(A) = 1 + 1 = 2,$$
$$\mathrm{rk}(B) + \mathrm{rk}\, C_G(B) = \mathrm{rk}(B) + \mathrm{rk}(B) = 1 + 1 = 2.$$

$A, B \in \alpha\mathcal{M}$ y son minimales en esta clase. En efecto, suponiendo que $1 \neq A_1 < A$ debe ser $\mathrm{rk}(A_1) = 0$ pues $A$ y $B$ son conexos (Hecho 2.3.3) y si $A_1 \in \alpha\mathcal{M}$ entonces $\mathrm{rk}(A_1) + \mathrm{rk}(C_G(A_1)) = 2$ luego $C_G(A_1) = G$ (pues $G$ es conexo), contradiciendo el hecho de que $G$ es de centro trivial. En forma análoga $B$ es minimal en $\alpha\mathcal{M}$. Además, como $A \cap B = 1$ se tiene que $[A, B] \neq 1$ (pues si no, $B \leqslant C_G(A) = A$), lo cual muestra que el Hecho 3.17 tiene un contraejemplo $G$ en la versión de grupos de rango de Morley finito.

*Demostración del Teorema 3.2.* Si $G$ es finito la afirmación del teorema es trivial. Supóngase $\mathrm{rk}(G) \geq 1$. Tomemos $\alpha = 1$ y $H = G$ en la Definición 3.5 y como acción admitimos la conjugación. Como $G$ es simple, $Z(G) = 1$. Entonces $\mathrm{rk}(G) + \mathrm{rk}(Z(G)) \leq m_\alpha = m_1$. Por la Proposición 3.13 *(ii)*, $\alpha\mathcal{M}^*$ tiene un único miembro $A^*$ pero por la Proposición 3.9 *(i)* ese miembro sería normal en $G$; es decir $A^* = G$, $\mathrm{rk}(G) = m_1 \geq \mathrm{rk}(A) + \mathrm{rk}(C_G(A))$ para cada subgrupo definible $A$ de $G$. En particular, si $A$ es abeliano entonces $C_G(A) \geq A$, y $\mathrm{rk}(G) \geq 2\,\mathrm{rk}(A)$. ☑

*Demostración del Teorema 3.4.* *(i)* Consideremos la acción de $G$ sobre si mismo y $\alpha = 1$ en el argumento de Chermak-Delgado. Entonces por la Proposición 3.13 *(ii)* se tiene que hay un subgrupo definible conexo maximal en $1\mathcal{M}$; sea éste $N$. Por la Proposición 3.9 *(ii)* $N \lhd G$. Nótese que $C_G(N) \neq 1$ pues como $N \in 1\mathcal{M}$ entonces $\mathrm{rk}(N) + \mathrm{rk}(C_G(N)) = m_1$ y como $N \leq C_G(C_G(N))$ entonces

$$\mathrm{rk}(C_G(C_G(N))) + \mathrm{rk}(C_G(N)) \geq m_1 \qquad (*)$$

así que, si suponemos $C_G(N) = 1$, tenemos $G \in \mathcal{M}$, lo que implica que $\mathrm{rk}(G) \geq 2\,\mathrm{rk}(A)$ para $A$ subgrupo abeliano no trivial, contrario a la hipótesis. Si $C_G(N)$ es finito, entonces $Z(N)$ también y por lo tanto

$$m_1 = \mathrm{rk}(N) + \mathrm{rk}(C_G(N)) = \mathrm{rk}(N) + \mathrm{rk}(Z(N)) \geq \mathrm{rk}(A) + \mathrm{rk}(C_G(A)) \geq 2\,\mathrm{rk}(A)$$

para $A$ subgrupo abeliano definible. Si $C_G(N)$ es infinito vemos que $C_G(N) \in \mathcal{M}$ por $(*)$. Ahora, $C_G^\circ(N)N$ es subgrupo definible, conexo y está en la clase $\alpha\mathcal{M}$ así que, por la maximalidad de $N$, $C_G^\circ(N) \leq N$. Luego $C_G^\circ(N) \leq Z(N)$ y tenemos,

$$\begin{aligned} \mathrm{rk}(N) + \mathrm{rk}(Z(N)) &\geq \mathrm{rk}(N) + \mathrm{rk}(C_G^\circ(N)) \\ &= \mathrm{rk}(N) + \mathrm{rk}(C_G(N)) = m_1, \end{aligned}$$

de donde se obtiene $\mathrm{rk}(N) + \mathrm{rk}(Z(N)) \geq 2\,\mathrm{rk}(A)$ como se afirmó.

*(ii)* si $\mathrm{rk}(\frac{G}{A}) = n$ y suponemos $\mathrm{rk}(A) \leq n$ entonces $\mathrm{rk}(G) = n + \mathrm{rk}(A) \geq 2\,\mathrm{rk}(A)$, contrario a la hipótesis. Asumimos que $\mathrm{rk}(A) > n$ y entonces es aplicable *(i)*. Por tanto, tomamos $Z(N)$ (el cual es no trivial pues contiene a $C_G^\circ(N)$ que está en $1\mathcal{M}$) y, como $Z(N)\mathrm{Char}N \lhd G$, $Z(N) \lhd G$. Denotemos $\mathrm{rk}(\frac{G}{Z(G)}) = \alpha$; $\mathrm{rk}\,\frac{G}{N} = \beta$; $\mathrm{rk}\,\frac{N}{Z(N)} = \gamma$. Por *(i)* tenemos $\mathrm{rk}(N) + \mathrm{rk}(Z(N)) \geq 2\,\mathrm{rk}(A)$ de donde $\gamma + 2\,\mathrm{rk}(Z(N)) \geq 2\,\mathrm{rk}(A)$. De otra parte $n + \mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(G) = \mathrm{rk}(Z(N)) + \gamma + \beta$ con lo cual $n = \mathrm{rk}(Z(N)) + \gamma + \beta - \mathrm{rk}(A)$. Pero como $2\,\mathrm{rk}\,Z(N) + \gamma \geq 2\,\mathrm{rk}(A)$ y $\mathrm{rk}(\frac{G}{Z(N)}) = \beta + \gamma$ tenemos

$$2n = 2\,\mathrm{rk}(Z(N)) + 2\gamma + 2\beta - 2\,\mathrm{rk}(A) \geq \gamma + 2\beta \geq \gamma + \beta = \mathrm{rk}\left(\frac{G}{Z(N)}\right),$$

luego el grupo buscado es $Z(N)$. ☑

## 4. Otras aplicaciones

En esta sección se dan unas aplicaciones, entre ellas deducir los llamados teoremas de reemplazo de Timmesfeld y de Thomson en grupos de rango de Morley finito. Las pruebas siguen de cerca las de grupos finitos en [4].

**Lema 4.1.** *Sean $G, H$ grupos de rango de Morley finito y supongamos que hay acción interpretable de $G$ sobre $H$. Sea $A$ subgrupo conexo definible de $G$ , $M$ subgrupo definible de $H$ y $x \in M$. Entonces $[x, A]$ y $[M, A]$ son definibles.*

La prueba del lema anterior es paralela a las de los corolarios 5.29, 5.24 y 5.25 de [2].

**Teorema 4.2** (Teorema de Reemplazo de Thompson)**.** *Sea $G$ un grupo de Morley finito, $H$ un grupo abeliano de rango de Morley finito que admite una acción interpretable de $G$ y sea $A$ un subgrupo definible distinto de la identidad de $G$, tal que*

$$\mathrm{rk}(A) + \mathrm{rk}(C_H(A)) \geq \mathrm{rk}(B) + \mathrm{rk}(C_H(B))$$

*para cada subgrupo definible $B \geq A$ distinto de la identidad. Sea $x \in C_H([A, A])$ y hagamos $M = [x, A]$. Entonces: $C_A(M) = 1$ ó*

$$\begin{aligned}\mathrm{rk}(A) + \mathrm{rk}(C_H(A)) &= \mathrm{rk}(C_A(M)) + \mathrm{rk}(C_H(C_A(M))) \\ &= \mathrm{rk}(C_A(M)) + \mathrm{rk}(C_H(A)M).\end{aligned}$$

*Demostración.* Consideremos la función $\phi$ dada por

$$\begin{aligned}\phi : \frac{A}{C_A(M)} &\longrightarrow \frac{d(M)}{C_{d(M)}(A)} \\ C_A(M) &\longmapsto [x, a]C_{d(M)}(A).\end{aligned}$$

$\phi$ esta bien definida pues si $ab^{-1} \in C_A(M)$, $[x, a][x, b]^{-1} \in C_{d(M)}(A)$. En efecto, sea $x$ como en la hipótesis. Entonces $1 = [x, ab^{-1}] = [x, a]^{b^{-1}}[x, b^{-1}]$, de donde $[x, a] = ([x, b^{-1}]^b)^{-1}$. Luego $[x, a][x, b]^{-1} = ([x, b^{-1}]^b)^{-1}[x, b]^{-1} = 1$. Por el Lema 3.6 la función $\phi$ es definible. Veamos que $\phi$ es inyectiva. Sean $a, b \in A$ con $[x, b] \in [x, a]C_{d(M)}(A)$. Entonces:

$$\begin{aligned}[x, a]^{-1}[x, b] &\in C_{d(M)}(A) \\ (x^a x^{-1})^{-1}(x^b x^{-1}) &\in C_{d(M)}(A).\end{aligned}$$

Conjugando por $a^{-1}$, tenemos $x^{-1}x^{ba^{-1}} \in C_{d(M)}(A)$ y como $H$ es abeliano $[x, ba^{-1}] \in C_{d(M)}(A)$. Así, para cualquier $u \in A$, $[x, ba^{-1}, u] = 1$. Aplicando la identidad de Hall, tenemos:

$$[x, ba^{-1}, u]^{ab^{-1}}[ab^{-1}, u^{-1}, x]^u[u, x^{-1}, ab^{-1}]^x = 1$$

y puesto que $x \in C_H([A, A])$ obtenemos $[ab^{-1}, u^{-1}, x] = 1$. Por tanto $ab^{-1}$ centraliza a $[u, x^{-1}]$ porque los dos primeros factores dan la unidad. Pero $[u, x^{-1}] = [x^{-1}, u]^{-1} = [x, u]$, porque $H$ es abeliano; entonces $ab^{-1}$ centraliza a $[x, u]$ para todo $u \in A$, y así, $ab^{-1} \in C_A(M) = C_A(d(M))$. Por lo tanto $\phi$ es inyectiva y tenemos $\mathrm{rk}(d(M)/C_{d(M)}(A)) \geq \mathrm{rk}(A/C_A(M))$. Entonces

$\mathrm{rk}(A) + \mathrm{rk}(C_{d(M)}(A)) \geq \mathrm{rk}(C_A(M)) + \mathrm{rk}(d(M))$ de donde

$$\begin{aligned} \mathrm{rk}(A) + \mathrm{rk}(C_H(A)) &\leq \mathrm{rk}(C_A(M)) + \mathrm{rk}(d(M)) + \mathrm{rk}(C_H(A)) - \mathrm{rk}(C_{d(M)}(A)) \\ &\leq \mathrm{rk}(C_A(M)) + \mathrm{rk}(d(M)C_H(A)) \\ &\leq \mathrm{rk}(C_A(M)) + \mathrm{rk}(C_H(C_A(d(M)))). \qquad (\dagger) \end{aligned}$$

Por tanto, si $C_A(d(M))$ es no trivial entonces es definible (Lema 3.6) y por la hipótesis sobre $A$ se tiene la igualdad en el teorema. ☑

A continuación, damos la versión del teorema de reemplazo de Thompson en el presente contexto.

**Teorema 4.3** (Teorema de reemplazo de Timmesfeld). *Sea $G$ un grupo de rango de Morley finito y $H$ un grupo abeliano de rango de Morley finito, que admite una acción definible de $G$. Sea $A$ un subgrupo definible conexo de $G$ distinto de la identidad, tal que*

$$\mathrm{rk}(A) + \mathrm{rk}(C_H(A)) \geq \mathrm{rk}(B) + \mathrm{rk}(C_H(B))$$

*para cada $B$ subgrupo definible de $A$ distinto de la identidad. Finalmente, sea $M = [C_H([A,A]), A]$. Entonces $C_A(M) = 1$ ó se cumple que*

$$\mathrm{rk}(A) + \mathrm{rk}(C_H(A)) = \mathrm{rk}(C_A(M) + \mathrm{rk}(C_H(C_A(M)).$$

*Demostración.* Por el Lema 3.6, $W = C_H([A,A])$ es definible y por el Lema 4.1 $\mathcal{U} = [W,A]C_H(A)^\circ$ también ($H$ es abeliano). Usando la notación de la Definición 3.5 con $\alpha = 1$ tomemos $m = m_1(A,H)$ y $n = m_1(A,\mathcal{U}^\circ)$; $\mathcal{C} = \mathcal{M}(A,H)$; $\mathcal{D} = 1(A,\mathcal{U}^\circ)$. Tenemos entonces

$$\mathrm{rk}(A) + \mathrm{rk}(C_H(A)) = \mathrm{rk}(A) + \mathrm{rk}(C_{U^\circ}(A))$$

ya que $C^\circ_{\mathcal{U}^\circ}(A) = C^\circ_H(A)$. Por tanto $m = n$. En particular, como $A \in C$ se tiene que $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$. Para $x \in W$ tomemos $M_x = [x,A]$ y $A_x = C_A(M_x)$. Si suponemos $C_A(M) \neq 1$ entonces $A_x \neq 1$ pues $C_A(M) = \cap_{x\in W} A_x$. Por el teorema de reemplazo de Thompson $A_x \in \mathcal{C}$ y $C^\circ_H(A_x) = C^\circ_H(C_A(M_x)) = (C_H(A)M_x)^\circ$ (porque $(C_H(A)M_x)^\circ \leq C^\circ_H(C_A(M_x))$ y por ser este último conexo y ambos del mismo rango, según (†) en el teorema de Thompson 4.2, entonces se tiene la igualdad). Por tanto $C^\circ_H(A_x) = C^\circ_{\mathcal{U}^\circ}(A_x)$ y entonces $A_x \in \mathcal{D}$. Pero $C_A(M) = \cap_{x\in W} A_x$; entonces por el Hecho 3.7 *(iii)*, $C_A(M) \in \mathcal{D}$. Por tanto $C_A(M) \in \mathcal{C}$ y además $\mathrm{rk}(C_H(C_A(M))) = \mathrm{rk}(C_{U^\circ}(C_A(M))) = \mathrm{rk}(U)$. ☑

**4.1. Subgrupos característicos de $p$-grupos nilpotentes.** En esta subsección suponemos que $S$ es un $p$-grupo nilpotente de rango de Morley finito. Estas hipótesis nos permiten asegurar que $Z(S)$ es infinito, lo cual como veremos es fundamental en el argumento de Chermak-Delgado que vamos a aplicar.

Sea $\alpha$ un número real positivo y definamos

$$n_\alpha = \sup\{\mathrm{rk}(X) + \alpha\, \mathrm{rk}(C_S(X)) \mid X \in D(S)\}.$$

Obsérvese la variación con la Definición 3.5. Sin embargo, $n_\alpha = \alpha m_{1/\alpha}$ con lo cual los resultados 3.9-3.15 son válidos para $n_\alpha$ si hacemos los cambios en $\alpha\mathcal{M}^*$ y $\alpha\mathcal{M}_*$. Sea

$$\alpha\mathcal{N} = \{X \in D(S) : \operatorname{rk}(X) + \alpha \operatorname{rk} C_S(X) = n_\alpha\}$$

y $\alpha\mathcal{N}^*$ los miembros maximales de $\alpha N$ y $\alpha\mathcal{N}_*$ los miembros minimales de $\alpha\mathcal{N}$. Lo interesante ahora es que tenemos $n_\alpha > \alpha \operatorname{rk}(S)$ (tomando $X = Z(S)$), y entonces $\alpha\mathcal{N}^*$ tiene un único miembro (Proposición 3.13 *(ii)*) que es conexo:

$$M^\alpha(S) = \langle \cup \alpha\mathcal{N} \rangle$$

y $\alpha\mathcal{N}_*$ tiene un único miembro (Proposición 3.10 *(ii)*) que también es conexo (Corolario 3.11).

$$M_\alpha(S) = \cap \alpha\mathcal{N}.$$

Además $M^\alpha(S)$ y $M_\alpha(S)$ son característicos en $S$ (en el sentido que son invariantes bajo automorfismos definibles de $S$).

Se mostraran a continuación algunas propiedades de la colección

$$\{M^\alpha(S), M_\alpha(S) : \alpha > 0\}$$

de subgrupos característicos de $S$.

**Lema 4.1.1.** *Sea $X \in \alpha\mathcal{N}$.*

*(i) Sea $W \in D(S)$, entonces $\alpha \operatorname{rk}(\frac{W}{C_W(X)}) \leq \operatorname{rk}(\frac{X}{C_X(W)})$*

*(ii) Si $\alpha > 1$ entonces $X^\circ \leq Z(J(S))$ en donde $J(S)$ es el subgrupo de Thompson de $S$, es decir, el subgrupo generado por todos los subgrupos abelianos definibles de $S$ de rango de Morley maximal.*

*(iii) Si $X^\circ \neq 1$, $X^\circ = C_S^\circ(C_S(X)) = C_S^\circ(C_S(X^\circ))$.*

*Demostración.* Supongamos por el contrario que *(i)* no se cumple. Entonces para algún $W \in D(S)$

$$\operatorname{rk}\left(\frac{X}{C_X(W)}\right) < \alpha \operatorname{rk}\left(\frac{W}{C_W(X)}\right) = \alpha \operatorname{rk}\left(\frac{C_S(X)W}{C_S(X)}\right)$$

de donde

$$\begin{aligned}&\operatorname{rk}(X) + \alpha \operatorname{rk}(C_S(X)) < \\ &\qquad \operatorname{rk}(C_X(W)) + \alpha \operatorname{rk}(C_S(X)W) \leq \operatorname{rk}(C_X(W)) + \alpha \operatorname{rk}(C_S(C_X(W)))\end{aligned}$$

lo que contradice que $X \in \alpha N$ (nótese que $C_S(X) \neq 1$ porque $Z(S)$ es infinito).

*(ii)* Sea $A$ subgrupo abeliano definible conexo de $S$ de rango maximal y $\alpha > 1$. Tomando en *(i)* $W = X^\circ$ y reemplazando $X$ por $X^\circ$ (Corolario 3.12) tenemos $\alpha \operatorname{rk}(\frac{X^\circ}{Z(X^\circ)}) \leq \operatorname{rk}(\frac{X^\circ}{Z(X^\circ})$ de donde $\operatorname{rk}(\frac{X^\circ}{Z(X^\circ)}) = 0$ y así $X^\circ = Z(X^\circ)$, es decir, $X^\circ$ es abeliano. Ahora, el subgrupo $C_A(X^\circ)X^\circ$ es abeliano y como $A$ es de rango maximal entonces

$$\begin{aligned}\operatorname{rk}(A) &\geq \operatorname{rk}(C_A(X^\circ)X^\circ) = \operatorname{rk}(X^\circ) + \operatorname{rk}(C_A(X^\circ)) - \operatorname{rk}(A \cap X^\circ) \\ &\geq \operatorname{rk}(X^\circ) + \operatorname{rk} C_A(X^\circ) - \operatorname{rk}(C_{X^\circ}(A))\end{aligned}$$

pues $A \cap X^\circ \leqslant C_{X^\circ}(A)$; por lo tanto $\mathrm{rk}(\frac{A}{C_A(X^\circ)}) \geq \mathrm{rk}(\frac{X^\circ}{C_{X^\circ}(A)})$. Tomando en *(i)* $W = A$ tenemos que $\alpha\,\mathrm{rk}(\frac{A}{C_A(X^\circ)}) \leq \mathrm{rk}(\frac{X^\circ}{C_{X^\circ}(A)})$ y puesto que $\alpha > 1$ debe ser $\mathrm{rk}(\frac{A}{C_A(X^\circ)}) = 0$. Como $A$ es conexo, $A = C_A(X^\circ)$.

*(iii)* Puesto que $X \leq C_S(C_S(X))$ tenemos $1 \neq X^\circ \leq C_S^\circ(C_S(X))$. Además, $C_S(X) \leq C_S(C_S(C_S(X)))$; entonces $n_\alpha = \mathrm{rk}(X) + \alpha\,\mathrm{rk}(C_S(X))$. De otra parte

$$\begin{aligned}\mathrm{rk}(X^\circ) + \alpha\,\mathrm{rk}(C_S(X)) &= \mathrm{rk}(X^\circ) + \alpha\,\mathrm{rk}(C_S^\circ(X))\\ &\leq \mathrm{rk}(C_S^\circ(C_S(X))) + \alpha\,\mathrm{rk}(C_S^\circ(C_S(C_S(X))))\\ &\leq \mathrm{rk}(C_S(C_S(X))) + \alpha\,\mathrm{rk}(C_S(C_S(C_S(X)))),\end{aligned}$$

de donde obtenemos que $C_S(C_S(X)) \in \alpha\mathcal{N}$ y por tanto también $C_{S^\circ}(C_S(X)) \in \alpha\mathcal{N}$ (nótese que como $Z(S)$ es infinito, estos subgrupos no son triviales). Finalmente como $X^\circ \leq C_S^\circ(C_S(X))$ y $C_S^\circ(X) \leq C_S^\circ(C_S(C_S(X)))$ y

$$\mathrm{rk}(X^\circ) + \alpha\,\mathrm{rk}(C_S^\circ(X)) = \mathrm{rk}(C_S^\circ(C_S(X))) + \alpha\,\mathrm{rk}(C_S^\circ(C_S(C_S(X))))$$

entonces $\mathrm{rk}(X^\circ) = \mathrm{rk}(C_S^\circ(C_S(X)))$ de donde $X^\circ = C_S^\circ(C_S(X))$. Ahora, en la prueba de iii) podemos argumentar de la misma forma con $X^\circ \leq C_S^\circ(C_S(X^\circ))$ para concluir que $X^\circ = C_S^\circ(C_S(X^\circ))$. ☑

**Lema 4.1.2.** *Con la notación dada al iniciar esta subsección se tiene:*

*(i)* $n_\alpha = \alpha n_{1/\alpha}$.
*(ii)* $C_S(M^\alpha(S)) = M_{1/\alpha}(S)$ *y* $C_S(M_{1/\alpha}) = M^\alpha(S)$.

*Demostración.* *(i)* Sea $X \in \alpha N$ y $Y \in \frac{1}{\alpha}N$, entonces

$$\begin{aligned}n_\alpha &= \mathrm{rk}(X) + \alpha\,\mathrm{rk}(C_S(X))\\ &= \alpha[\frac{1}{\alpha}\,\mathrm{rk}(X) + \mathrm{rk}(C_S(X))]\\ &\leq \alpha[\frac{1}{\alpha}\,\mathrm{rk}(C_S(C_S(X)))] + \mathrm{rk}(C_S(X))\\ &\leq \alpha[\mathrm{rk}(Y) + \frac{1}{\alpha}\,\mathrm{rk}(C_S(Y))]\\ &\leq \alpha n_{\frac{1}{\alpha}}\\ &\leq \alpha[\mathrm{rk}(C_S(C_S(Y))) + \frac{1}{\alpha}\,\mathrm{rk}(C_S(Y))]\\ &= \alpha\,\mathrm{rk}(C_S(C_S(Y))) + \mathrm{rk}(C_S(Y))\\ &\leq n_\alpha\end{aligned}$$

*(ii)* De *(i)* vemos que la desigualdad pasa a ser igualdad y entonces $C_S(X) \in \frac{1}{\alpha}\mathcal{N}$ y $C_S(Y) \in \alpha\mathcal{N}$. Por lo tanto $C_S(X) \supseteq M_{\frac{1}{\alpha}}(S)$ que es el único miembro minimal de $\frac{1}{\alpha}\mathcal{N}$. Análogamente, $C_S(Y) \subseteq M_\alpha(S)$ ya que este último es el único miembro maximal de $\alpha\mathcal{N}^*$.

Tomemos $X = M^\alpha(S)$, recordemos que por por la Proposición 3.13 *(ii)*, éste es conexo. Entonces por el Lema 4.1.1 *(iii)*,

$$M^\alpha(S) = C_S(C_S(M^\alpha(S)))$$

y como

$$M_{\frac{1}{\alpha}}(S) \subseteq C_S(M^\alpha)$$

entonces

$$C_S(M_{\frac{1}{\alpha}}(S)) \supseteq C_S(C_S(M^\alpha)) = M^\alpha$$

de donde

$$C_S(M_{\frac{1}{\alpha}}(S)) = M^\alpha.$$

Análogamente, por la Proposición 3.10 *(iii)*, $M_{\frac{1}{\alpha}}(S)$ es conexo y por el Lema 4.1.1 $M_{\frac{1}{\alpha}}(S) = C_S(C_S(M_{\frac{1}{\alpha}}(S)))$; pero $C_S(M_{\frac{1}{\alpha}}) \subseteq M^\alpha(S)$ de donde

$$C_S(C_S(M_{\frac{1}{\alpha}})) \supseteq C_S(M^\alpha(S))$$

y por minimalidad $M_{\frac{1}{\alpha}} = C_S(M^\alpha(S))$. ☑

**Lema 4.1.3.** *Si* $0 < \alpha < \beta$ *entonces*

$$M^\alpha(S) \supseteq M^\beta(S) \quad y \quad M_\alpha(S) \supseteq M_\beta(S).$$

*Demostración.* Por el Lema 4.1.1 *(i)*, tomando $W = M_{\frac{1}{\alpha}}(S)$ tenemos:

$$\beta\,\mathrm{rk}(M_{\frac{1}{\alpha}}(S)/C_{M_{\frac{1}{\alpha}}(S)}(M^\beta(S))) \leq \mathrm{rk}(M^\beta(S)/C_{M^\beta(S)}(M_{\frac{1}{\alpha}}(S)))$$

y ahora con $W = M^\beta(S)$ y $X = M_{\frac{1}{\alpha}}(S)$ tenemos que

$$\frac{1}{\alpha}\,\mathrm{rk}(M^\beta(S)/C_{M^\beta(S)}(M_{\frac{1}{\alpha}}(S))) \leq \mathrm{rk}(M_{\frac{1}{\alpha}}(S)/C_{M_{\frac{1}{\alpha}}(S)}(M^\beta)(S))$$

de donde

$$\mathrm{rk}(M_{\frac{1}{\alpha}}(S)) = \mathrm{rk}(C_{M_{\frac{1}{\alpha}}(S)}(M^\beta(S)))$$

y al ser $M_{\frac{1}{\alpha}}(S)$ conexo, se tiene que éste centraliza a $M^\beta(S)$. Por esto

$$M^\beta(S) \leq C_S(M_{\frac{1}{\alpha}}(S)) = M^\alpha(S).$$

Como $0 < \frac{1}{\beta} < \frac{1}{\alpha}$, entonces $M^{\frac{1}{\alpha}}(S) \subseteq M^{\frac{1}{\beta}}(S)$, de donde $C_S(M^{\frac{1}{\alpha}}(S)) \supseteq C_S(M^{\frac{1}{\beta}}(S))$ pero según Lema 4.1.2 *(ii)*, esto equivale a $M_\alpha(S) \supseteq M_\beta(S)$. ☑

## Referencias

[1] M. Aschbacher, *Finite Group Theory*, Cambridge University Press, 1986.

[2] A. Borovik & A. Nesin, *Groups of finite Morley rank*, Oxford Logic Guides, Londres, 1996.

[3] X. Caicedo, *Elementos de lógica y calculabilidad*, 2da. edición, Universidad de los Andes, Bogotá, 1990.

[4] A. Chermak & A. Delgado, *A measuring argument for finite groups*, Proc. Amer. Math. Soc., **107** (1989), 907–914.

[5] F. Ortiz, *Sobre la clasificicación de grupos de rango de Morley finito de tipo par y aplicaciones de grupos finitos*, Tesis de Magister, Universidad de los Andes, Bogotá, 2001.

(Recibido en octubre de 2001)

Departamento de Matemáticas
Universidad de los Andes
Bogotá

*e-mail:* lcorredo@uniandees.edu.co
*e-mail:* fa-ortiz@uniandes.edu.co