Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen 33 (1999), páginas 51–76

Operadores hipercíclicos en espacios de Fréchet

Félix Martínez-Giménez
Universidad Politécnica de Valencia, España

Abstract. This is an expository survey in Spanish about hypercyclic operators on Fréchet spaces. Basic concepts on hypercyclicity, classical examples of hypercyclic operators, and important properties of hypercyclic operators on locally convex spaces are presented.

Keywords and phrases. Hypercyclic operators, transitive maps, Fréchet spaces, locally convex spaces.

1991 Mathematics Subject Classification. Primary 47B07. Secondary 47B37.

Resumen. En este artículo divulgativo se presentan los conceptos básicos sobre hiperciclidad, ejemplos clásicos de operadores hipercíclicos en espacios de Fréchet y propiedades importantes de operadores hipercíclicos en espacios localmente convexos.

Introducción

En un espacio vectorial topológico, diremos que un vector del espacio es hipercíclico para un operador si la órbita del vector respecto de dicho operador es densa en el espacio. Un operador es hipercíclico si tiene un vector hipercíclico. La importancia de los operadores hipercíclicos está históricamente motivada por el estudio de los subespacios invariantes. La clausura de la envoltura lineal de la órbita de un vector es el menor subespacio cerrado invariante que contiene al vector. Por lo tanto, *un operador no tiene subconjuntos cerrados invariantes no triviales si y sólo si cada vector no nulo es hipercíclico.*

Por otro lado, recientemente, el estudio de los operadores hipercíclicos ha aparecido en el análisis de los sistemas dinámicos discretos. Una de las definiciones más aceptadas de aplicación caótica es la propuesta por Devaney [12]: *una aplicación continua en un espacio métrico es caótica si es transitiva, el conjunto de puntos periódicos es denso en el espacio y tiene dependencia sensible de las condiciones iniciales.* Para aplicaciones continuas en espacios métricos completos separables, transitividad es equivalente a hiperciclicidad y el estudio de la transitividad es el principal escalón para establecer que una aplicación es caótica. Además, en 1991 Godefroy y Shapiro [14] demuestran que, en espacios de Fréchet (espacios localmente convexos, metrizables y completos), un operador hipercíclico tiene dependencia sensible de las condiciones iniciales. Por tanto para operadores hipercíclicos sólo resta estudiar la existencia de un conjunto denso de puntos periódicos. Posteriormente, en 1992 Banks et al. [3] demuestran que en espacios métricos, una aplicación continua y transitiva con un conjunto denso de puntos periódicos tiene necesariamente dependencia sensible de las condiciones iniciales.

Los vectores y operadores hipercíclicos aparecen por primera vez en los trabajos de Birkhoff, MacLane y Rolewicz.

En 1929 G. B. Birkhoff [9] estableció un interesante resultado sobre las órbitas de funciones por operadores traslación en el conjunto de las funciones enteras. Concretamente si consideramos el espacio de Fréchet $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ dotado de la topología de convergencia uniforme sobre los conjuntos compactos del plano complejo, y el operador traslación $T_a : \mathcal{H}(\mathbb{C}) \to \mathcal{H}(\mathbb{C})$ definido como

$$T_a f(z) = f(z+a) \qquad (f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) \ , \ z \in \mathbb{C} \ , \ a \in \mathbb{C}) \ ,$$

Birkhoff demuestra que si $a \neq 0$, entonces existe una función $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ cuya órbita $\{T^n f\}_{n=0}^{\infty}$ es densa en $\mathcal{H}(\mathbb{C})$. Este resultado se puede interpretar de varias maneras, por un lado nos asegura la existencia de una función "universal" que, en todo conjunto compacto, sus traslaciones se aproximan a cualquier función entera tanto como se desee; por otro lado, desde el punto de vista de los sistemas dinámicos obtenemos que el operador traslación es transitivo.

En 1952 G. R. MacLane [18] demuestra que el operador derivada $D : \mathcal{H}(\mathbb{C}) \to \mathcal{H}(\mathbb{C})$ también es hipercíclico.

El estudio de los operadores hipercíclicos en espacios de Hilbert apareció por primera vez en 1969 de la mano de S. Rolewicz [20], quien prueba que si σ es el operador "backward shift" en l_2 definido como

$$\sigma(a_1, a_2, a_3, \dots) = (a_2, a_3, \dots),$$

entonces $\lambda\sigma$ es hipercíclico para todo número complejo λ de módulo mayor que la unidad.

En 1982 C. Kitai [16] obtiene en su tesis doctoral, una condición suficiente de hiperciclicidad, conocida como *criterio de hiperciclicidad*. Lamentablemente este resultado nunca fue publicado y en 1987 R. M. Gethner y J. H. Shapiro [13] demuestran el mismo criterio. Además, utilizando este criterio deducen los resultados citados de Birkhoff, Maclane y Rolewicz de forma casi automática. J. P. Bes [6] mejora el resultado de Gethner, Shapiro y Kitai al imponer unas condiciones más débiles al criterio de hiperciclicidad.

Es preciso mencionar uno de los más recientes e importantes resultados de hiperciclicidad, obtenido independientemente por L. Bernal [5] y S. I Ansari [2], el cual asegura que en todo espacio de Banach separable de dimensión infinita se puede definir un operador hipercíclico. Referimos a [10] para la prueba en espacios de Fréchet y otros resultados relacionados en espacios localmente convexos.

En el presente trabajo se generalizarán a espacios localmente convexos algunos resultados sobre operadores hipercíclicos, ya conocidos para espacios de Banach. Por otra parte, también se aportan las modificaciones necesarias en las demostraciones, para obtener la correspondiente propiedad en el caso en el que el cuerpo de escalares es $\mathbb{R}$, a partir del caso en el que el cuerpo es $\mathbb{C}$.

El trabajo se estructura en tres partes. En la primera se dan las definiciones y resultados necesarios para establecer el criterio de hiperciclicidad. En la segunda parte se enumeran varios ejemplos clásicos de operadores hipercíclicos. Se probará la hiperciclicidad de los mismos utilizando el criterio demostrado en la primera parte. En la tercera se utilizará la complexificación de un espacio para establecer el correspondiente resultado en el caso real y se demostrarán algunas propiedades en el marco de los espacios localmente convexos.

La notación utilizada para espacios localmente convexos es estándar y referimos al lector a los textos [17] o [19].

Finalmente, es necesario señalar que este artículo es parte de la tesina de licenciatura realizada por el autor bajo la dirección del profesor A. Peris. Quiero también agradecer a J. Bonet sus sugerencias y la lectura de la versión final.

1. Operadores hipercíclicos y el criterio de hiperciclicidad

Definición 1.1. Sea X un espacio topológico y $T : X \longrightarrow X$ una aplicación. Para cada x de X, la *órbita* de x por T es el conjunto

$$\mathrm{Orb}(T,x) := \{x, Tx, T^2x, \dots\}.$$

Definición 1.2. Sea X un espacio vectorial topológico y T un operador lineal y continuo en X. Un punto x de X es *hipercíclico* (de T) si $\mathrm{Orb}(T,x)$ es densa en X. Un *operador hipercíclico* es aquel que tiene un punto hipercíclico.

Definición 1.3. Sea X un espacio topológico. Una aplicación $T : X \longrightarrow X$ es *transitiva* si para todo U y V subconjuntos abiertos no vacíos de X existe m número natural tal que $T^m(U) \cap V \neq \varnothing$.

A continuación probaremos que en espacios métricos de Baire, separables y sin puntos aislados, un punto tiene órbita densa para una aplicación continua si, y sólo si, la aplicación es transitiva. En la demostración se utiliza el hecho de que el espacio es de Baire, por tanto deduciremos la existencia de un punto con órbita densa sin tener un método constructivo para encontrarlo. Más adelante volveremos sobre esta cuestión ofreciendo un método constructivo de vectores hipercíclicos.

Proposición 1.4. *Sea X espacio métrico de Baire perfecto (i.e., sin puntos aislados) y separable y $T : X \longrightarrow X$ continua. Entonces existe $z \in X$ cuya órbita respecto de T es densa en X si, y sólo si, T es transitiva.*

Demostración. Por hipótesis sea $z \in X$ tal que $\{T^n z \ : \ n \in \mathbb{N}_0\}$ es denso en X. Sean U y V abiertos no vacíos de X. Existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $T^k z \in U$. Como X no tiene puntos aislados, $\{T^m z \ : \ m > k\}$ también es denso en X, luego existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^{k+n} z = T^n\left(T^k z\right) \in V$. Tomamos $y := T^k z \in U$ y tenemos que $T^n y \in V$, por tanto $T^n\left(U\right) \cap V \neq \varnothing$.

Recíprocamente, como X es espacio métrico separable cumple el segundo axioma de numerabilidad, podemos por tanto tomar una base $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de abiertos para la topología de X. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$G_n := \{x \in X \ \ / \ \ \exists\, m \in \mathbb{N} \ \ : \ \ T^m x \in V_n\}.$$

Veamos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, G_n es abierto en X. Dado $x \in G_n$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $T^m x \in V_n$. Por ser T continua, $W := \left(T^m\right)^{-1}\left(V_n\right)$ es abierto en X. Tenemos que $x \in W$ y además $T^m(W) \subset V_n$; esto es, $W \subset G_n$. Veamos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, G_n es denso en X. Sea U abierto en X. Como T es transitiva, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $T^m(U) \cap V_n \neq \varnothing$, esto es, existe $x \in U$ tal que $T^m x \in V_n$; de donde $x \in U \cap G_n$. Por ser X espacio de Baire tenemos que

$$G := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$$

es denso en X.

Veamos que cada punto z de G tiene órbita, respecto de T, densa en X. Sea $z \in G$ y U abierto no vacío cualquiera de X. Por la elección de $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $V_{n_0} \subset U$. Como $z \in G \subset G_{n_0}$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $T^m z \in V_{n_0} \subset U$, luego $\mathrm{Orb}(T, z) = \{T^m z \ : \ m \in \mathbb{N}_0\}$ es denso en X. ☑

El siguiente teorema es el criterio de hiperciclicidad de C. Kitai [16] y R. M. Gethner-J. H. Shapiro [13]. C. Kitai lo formuló para espacios de Banach, R. M.

Gethner y J. H. Shapiro lo hicieron para espacios de Fréchet. No demostraremos el teorema ya que éste queda incluido como un caso particular de un criterio más general formulado por J. P. Bes [7] (ver Teorema 1.6).

Teorema 1.5 (C. Kitai y R. M. Gethner-J. H. Shapiro)**.** *Sea X un espacio de Fréchet separable y $T : X \longrightarrow X$ un operador lineal y continuo. Si existen X_0 subconjunto denso de X y una aplicación $S : X_0 \longrightarrow X_0$, (no necesariamente lineal ni continua) tal que:*

(i) $T \circ S = I_{X_0}$,
(ii) $S^n x \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $\forall\, x \in X_0$,
(iii) $T^n x \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $\forall\, x \in X_0$,

entonces T es hipercíclico en X.

El teorema anterior ha sufrido varias generalizaciones imponiéndole cada vez hipótesis más débiles. Por ejemplo, G. Godefroy y J. H. Shapiro [14] obtienen una versión más general en la que S está definida en un subconjunto Y_0 denso en X (posiblemente diferente de X_0) tal que $T \circ S = I_{Y_0}$ y $S^n y \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, para todo $y \in Y_0$.

La versión que presentamos ahora es la más general que se conoce y se debe a J. P. Bes [7]. Por otro lado se demostrará de dos maneras distintas. La primera utiliza transitividad, es decir, la caracterización que se demostró en la Proposición 1.4, siendo por tanto una demostración no constructiva (la original en [7]). La segunda es una demostración constructiva, sugerida por A. Montes, en la que iremos construyendo una sucesión convergente a un vector hipercíclico. Para encontrar la sucesión haremos uso de la separabilidad del espacio y de una sucesión fundamental creciente de seminormas que definan la topología del espacio.

Teorema 1.6 (Criterio de hiperciclicidad)**.** *Sea E un espacio de Fréchet separable y $T : E \longrightarrow E$ un operador lineal y continuo. Si existen subconjuntos densos X e Y de E, una sucesión creciente $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ de naturales y aplicaciones $S_{m_k} : Y \longrightarrow E$, $k \in \mathbb{N}$, (no necesariamente lineales ni continuas) tales que:*

(i) $(T^{m_k} \circ S_{m_k})y \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} y$, $\forall\, y \in Y$,
(ii) $S_{m_k} y \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $\forall\, y \in Y$,
(iii) $T^{m_k} x \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $\forall\, x \in X$,

entonces existe un vector z tal que $\{T^{m_k} z\}_{k=1}^{\infty}$ es denso en E.

Demostración. (Vía transitividad). Veamos que el operador T es transitivo. Por densidad de X e Y en E, bastará con probar que, dados U, V dos 0-entornos absolutamente convexos en E, $x \in X$, $y \in Y$, existe un natural m tal que $T^m(x+U)\cap(y+V)\neq\varnothing$. Por (i), (ii) y (iii) existe $m\in\mathbb{N}$ tal que

$$(T^m\circ S_m)\,y\in y+\frac{1}{2}V,\quad S_my\in U,\quad T^mx\in\frac{1}{2}V.$$

Entonces

$$T^m(x+S_my)=T^mx+T^mS_my\in\frac{1}{2}V+y+\frac{1}{2}V\subset y+V,$$

luego $T^m(x+U)\cap(y+V)\neq\varnothing$. Como T es operador transitivo, por la Proposición 1.4 obtenemos la existencia de un vector z con órbita densa. ☑

Demostración. (Constructiva). Por ser E separable e Y denso en E, existe $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}\subset Y$ denso en E. Sea $\{\|\cdot\|_k\}_{k=1}^{\infty}$ sucesión fundamental creciente de seminormas en E que generan la topología del espacio E. Dado $x_1\in X$, tomamos $n_1\in\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ tal que

$$\|\,T^{n_1}x_1\,\|_1<\frac{1}{2},\quad \|\,S_{n_1}y_1\,\|_1<\frac{1}{2},\quad \|\,T^{n_1}S_{n_1}y_1-y_1\,\|_1<\frac{1}{2},$$

definimos $z_1:=x_1+S_{n_1}y_1$. Sea $x_2\in X$ tal que

$$\|\,x_2-z_1\,\|_2<\frac{1}{2^2},\quad \|\,T^{n_1}(x_2-z_1)\,\|_2<\frac{1}{2^2};$$

tomamos $n_2\in\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$, $n_2>n_1$, tal que

$$\|\,T^{n_2}x_2\,\|_2<\frac{1}{2^2},\quad \|\,S_{n_2}y_2\,\|_2<\frac{1}{2^2},$$
$$\|\,T^{n_2}S_{n_2}y_2-y_2\,\|_2<\frac{1}{2^2},\quad \|\,T^{n_1}S_{n_2}y_2\,\|_2<\frac{1}{2^2},$$

y definimos $z_2:=x_2+S_{n_2}y_2$. Supongamos que tenemos $\{x_1,x_2,\dots,x_k\}\subset X$ y $n_1<n_2<\cdots<n_k$ pertenecientes a $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ tales que

$$\|\,T^{n_j}x_j\,\|_j<\frac{1}{2^j},\quad \|\,S_{n_j}y_j\,\|_j<\frac{1}{2^j},\quad \|\,T^{n_j}S_{n_j}y_j-y_j\,\|_j<\frac{1}{2^j},\quad j=1,\dots,k$$
$$\|\,T^{n_i}S_{n_j}y_j\,\|_j<\frac{1}{2^j}\ ,\ \ i=1,\dots,j-1\ ;\ \ j=2,\dots,k,$$

y además

$$\|\,x_j-z_{j-1}\,\|_j<\frac{1}{2^j}\ ,\ \ j=2,\dots,k,$$
$$\|\,T^{n_i}(x_j-z_{j-1})\,\|_j<\frac{1}{2^j}\ ,\ \ i=1,\dots,j-1\ ;\ \ j=2,\dots,k,$$

siendo $z_j=x_j+S_{n_j}y_j$, $j=1,\dots,k$. Para completar inducción sea $x_{k+1}\in X$ tal que

$$\|\,x_{k+1}-z_k\,\|_{k+1}<\frac{1}{2^{k+1}},\quad \|\,T^{n_i}(x_{k+1}-z_k)\,\|_{k+1}<\frac{1}{2^{k+1}},\quad i=1,\dots,k.$$

Tomamos $n_{k+1} \in \{m_k\}_{k=1}^{\infty}$, $n_{k+1} > n_k$, tal que

$$\| T^{n_{k+1}} x_{k+1} \|_{k+1} < \frac{1}{2^{k+1}}, \quad \| S_{n_{k+1}} y_{k+1} \|_{k+1} < \frac{1}{2^{k+1}},$$
$$\| T^{n_{k+1}} S_{n_{k+1}} y_{k+1} - y_{k+1} \|_{k+1} < \frac{1}{2^{k+1}},$$
$$\| T^{n_i} S_{n_{k+1}} y_{k+1} \|_{k+1} < \frac{1}{2^{k+1}} \ , \ \ i = 1, \dots, k,$$

y definimos entonces $z_{k+1} := x_{k+1} + S_{n_{k+1}} y_{k+1}$.

Veamos en primer lugar que la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente, para ello probaremos que para cada seminorma $\| \cdot \|_k$, $k = 1, 2, \dots$ la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy. Dado $k \in \mathbb{N}$, sean $p, q \in \mathbb{N}$ con $p > q > k$, tenemos

$$\begin{aligned}
\| z_p - z_q \|_k &\leq \| z_p - z_{p-1} \|_k + \cdots + \| z_{q+1} - z_q \|_k \\
&= \| x_p + S_{n_p} y_p - z_{p-1} \|_k + \cdots + \| x_{q+1} + S_{n_{q+1}} y_{q+1} - z_q \|_k \\
&\leq \| x_p - z_{p-1} \|_k + \| S_{n_p} y_p \|_k + \cdots \\
&\quad \cdots + \| x_{q+1} - z_q \|_k + \| S_{n_{q+1}} y_{q+1} \|_k \\
&\leq \| x_p - z_{p-1} \|_p + \| S_{n_p} y_p \|_p + \cdots \\
&\quad \cdots + \| x_{q+1} - z_q \|_{q+1} + \| S_{n_{q+1}} y_{q+1} \|_{q+1} < \frac{2}{2^q}.
\end{aligned}$$

Sabiendo que $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente, sea

$$z := \lim_{n \to \infty} z_n = z_k + \sum_{j=k}^{\infty} (z_{j+1} - z_j) \ .$$

Por último, veamos que $\lim_{k \to \infty} \| T^{n_k} z - y_k \|_k = 0$, lo cual implicaría que $\mathrm{Orb}(T, z)$ es densa.

$$\begin{aligned}
\| T^{n_k} z - y_k \|_k &= \| T^{n_k} (z_k + \sum_{j=k}^{\infty} (z_{j+1} - z_j)) - y_k \|_k \\
&= \| T^{n_k} z_k + \sum_{j=k}^{\infty} T^{n_k} (z_{j+1} - z_j) - y_k \|_k \\
&\leq \| T^{n_k} z_k - y_k \|_k + \sum_{j=k}^{\infty} \| T^{n_k} (z_{j+1} - z_j) \|_k \\
&= \| T^{n_k} (x_k + S_{n_k} y_k) - y_k \|_k + \\
&\quad \sum_{j=k}^{\infty} \| T^{n_k} \left(x_{j+1} + S_{n_{j+1}} y_{j+1} - z_j \right) \|_k
\end{aligned}$$

$$\leq \| T^{n_k} x_k \|_k + \| T^{n_k} S_{n_k} y_k - y_k \|_k + \sum_{j=k}^{\infty} \| T^{n_k} (x_{j+1} - z_j) \|_{j+1} + \sum_{j=k}^{\infty} \| T^{n_k} S_{n_{j+1}} y_{j+1} \|_{j+1} < \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} = \frac{4}{2^k}. \quad \boxtimes$$

De ahora en adelante operador siempre significará operador lineal y continuo. Cuando digamos que un operador $T : E \longrightarrow E$ (con E espacio de Fréchet separable) satisface el criterio de hiperciclicidad entenderemos que T satisface todas las hipótesis del Teorema 1.6. El criterio de hiperciclicidad que acabamos de probar es una condición suficiente para la hiperciclicidad de un operador, más adelante volveremos sobre él y hablaremos del recíproco del criterio de hiperciclicidad.

L. Bernal [4] demuestra otra condición suficiente para establecer la hiperciclicidad de un operador, concretamente, si un operador cumple que: *el conjunto de autovectores con autovalor de módulo mayor que la unidad y el conjunto de autovectores con autovalor de módulo menor que la unidad tienen ambos envoltura lineal densa en el espacio, entonces el operador es hipercíclico.* Nosotros demostraremos que si un operador cumple la condición que acabamos de mencionar, entonces satisface el criterio de hiperciclicidad y por lo tanto es hipercíclico. Recordamos que, en un espacio vectorial topológico, un subconjunto se dice que es total si su envoltura lineal es densa. Si T es un operador y u es un autovector de T, denotaremos por $\lambda(T, u)$ al autovalor correspondiente a u. Si no existe ambigüedad omitiremos T y escribiremos $\lambda(u)$.

Proposición 1.7. *Sea E un espacio de Fréchet separable y $T : E \longrightarrow E$ un operador. Si existen dos subconjuntos totales A y B de E tales que:*

(a) *todo vector de A es un autovector de T y $| \lambda(a) | < 1$, para todo $a \in A$,*
(b) *todo vector de B es un autovector de T y $| \lambda(b) | > 1$, para todo $b \in B$,*

entonces T satisface el criterio de hiperciclicidad (Teorema 1.6).

Demostarción. De los subespacios LIN A y LIN B extraemos bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, respectivamente. Tomamos

$$X := \text{LIN } \mathcal{A} = \text{LIN } A \quad \text{e} \quad Y := \text{LIN } \mathcal{B} = \text{LIN } B.$$

Para cada $b \in \mathcal{B}$, definimos

$$Sb := \frac{1}{\lambda(b)} b,$$

y extendemos S por linealidad a todo Y. Veamos que X, Y y S satisfacen las hipótesis del Teorema 1.6 para $\{m_k\}_{k=1}^{\infty} = \{k\}_{k=1}^{\infty}$ y $S_k = S^k$. Obviamente, X e Y son densos en E por ser A y B subconjuntos totales.

(i) Dado $b \in \mathcal{B}$ tenemos

$$(T \circ S)b = T\ \frac{1}{\lambda(b)} b = b,$$

luego $(T^k \circ S_k)y = y$ para todo $y \in Y$.

(ii) Sea $\{\| \cdot \|_i\}_{i=1}^{\infty}$ sucesión fundamental creciente de seminormas en E que generan la topología del espacio. Para cada seminorma $\| \cdot\|_i$ y cada $b \in \mathcal{B}$ se tiene

$$\| S_k b\|_i = \left| \frac{1}{\lambda(b)} \right|^k \| b\|_i \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0\ .$$

luego $S_k y \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ para todo $y \in Y$.

(iii) Para cada seminorma $\| \cdot \|_i$ y cada $a \in \mathcal{A}$ se tiene

$$\| T^k a\|_i = |\lambda(a)|^k \| a\|_i \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

por tanto $T^k x \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ para todo $x \in X$. ☑

Un problema todavía abierto es demostrar si es cierto el recíproco del criterio de hiperciclicidad, es decir,

(P1) ¿Todo operador hipercíclico satisface el criterio de hiperciclicidad?

Se han hecho avances recientes para intentar contestar a la pregunta anterior. El resultado que probaremos a continuación (se debe a J. P. Bes [7]) caracteriza a los operadores que satisfacen el criterio de hiperciclicidad.

Teorema 1.8. *Sea E un espacio de Fréchet separable y un operador $T : E \to E$. Equivalen:*

(i) *T satisface el criterio de hiperciclicidad.*

(ii) *Para todo número natural $r \geq 1$, el operador $T \oplus \overset{(r)}{\cdots} \oplus T$ es hipercíclico en $E \times \overset{(r)}{\cdots} \times E$.*

(iii) *Para todo número natural $r \geq 1$ y abiertos no vacíos $U_1, \dots, U_r, V_1, \dots, V_r$ de E, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(U_1) \cap V_1 \neq \varnothing, \dots, T^n(U_r) \cap V_r \neq \varnothing$.*

Demostración. (i) $\Longrightarrow$ (ii) Denotemos $\tilde{T} := T \oplus \overset{(r)}{\cdots} \oplus T$. Si X, Y, $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ y S_{m_k} son como en el Teorema 1.6, tomamos

$$\tilde{X} := X \times \overset{(r)}{\cdots} \times X, \quad \tilde{Y} := Y \times \overset{(r)}{\cdots} \times Y, \quad \tilde{S}_{m_k} := S_{m_k} \oplus \overset{(r)}{\cdots} \oplus S_{m_k}.$$

$\tilde{X}$ e $\tilde{Y}$ son densos en $E \times \overset{(r)}{\cdots} \times E$ y entonces $\tilde{T}$ satisface las hipótesis del criterio de hiperciclicidad (Teorema 1.6) para $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$, $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $\tilde{S}_{m_k}$, por tanto $\tilde{T}$ es hipercíclico.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Fijamos un número natural $r \geq 1$, si $U_1, \ldots, U_r$, $V_1, \ldots, V_r$ son abiertos no vacíos de E, aplicando la Proposición 1.4 al operador $T \oplus \overset{(r)}{\cdots} \oplus T$ y a los abiertos (en $E \times \overset{(r)}{\cdots} \times E$) $U := U_1 \times \overset{(r)}{\cdots} \times U_r$ y $V := V_1 \times \overset{(r)}{\cdots} \times V_r$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(T \oplus \overset{(r)}{\cdots} \oplus T)^n(U) \cap V \neq \varnothing$ de donde

$$T^n(U_1) \cap V_1 \neq \varnothing, \ldots, T^n(U_r) \cap V_r \neq \varnothing.$$

(iii) $\Longrightarrow$ (i) Sea $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ una base numerable para la topología de E. Fijando $r = 1$ en (iii) obtenemos que T es hipercíclico por la Proposición 1.4, sea por tanto $z \in E$ vector hipercíclico para T.

Consideramos $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión fundamental decreciente de 0-entornos abx y abiertos en E. Para cada $i = 1, 2, \ldots$, tomamos $V_i := z + W_i$. Consideramos los pares de abiertos en E (W_1, V_1) y (B_1, W_1), por (iii), existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $T^{n_1}(W_1) \cap V_1 \neq \varnothing$ y $T^{n_1}(B_1) \cap W_1 \neq \varnothing$. Existen $w_1 \in W_1$, $b_{1,1} \in B_1$ y, por continuidad de T^{n_1}, W_{m_1} tales que

$$\begin{gathered} T^{n_1} w_1 \in V_1, \quad T^{n_1}(b_{1,1} + \overline{W}_{m_1}) \subset W_1 \\ B_{1,1} := b_{1,1} + W_{m_1} \subset b_{1,1} + \overline{W}_{m_1} \subset B_1. \end{gathered}$$

Consideramos los pares de abiertos (W_2, V_2), (B_2, W_2) y $(B_{1,1}, W_2)$, por (iii), existe $n_2 \in \mathbb{N}$, $n_2 > n_1$, tal que

$$T^{n_2}(W_2) \cap V_2 \neq \varnothing, \quad T^{n_2}(B_2) \cap W_2 \neq \varnothing, \quad T^{n_2}(B_{1,1}) \cap W_2 \neq \varnothing.$$

Existen $w_2 \in W_2$, $b_{2,1} \in B_2$, $b_{1,2} \in B_{1,1}$ y, por continuidad de T^{n_2}, W_{m_2}, $m_2 > m_1$, tales que

$$\begin{gathered} T^{n_2} w_2 \in V_2, \quad T^{n_2}(b_{2,1} + \overline{W}_{m_2}) \subset W_2, \quad T^{n_2}(b_{1,2} + \overline{W}_{m_2}) \subset W_2, \\ B_{2,1} := b_{2,1} + W_{m_2} \subset b_{2,1} + \overline{W}_{m_2} \subset B_2, \\ B_{1,2} := b_{1,2} + W_{m_2} \subset b_{1,2} + \overline{W}_{m_2} \subset B_{1,1}. \end{gathered}$$

Supongamos que tenemos $\{w_1, \ldots, w_k\} \subset E$, naturales $n_1 < \cdots < n_k$, $m_1 < \cdots < m_k$ y vectores $b_{s,j}$ $(s, j \in \mathbb{N}, s + j \leq k + 1)$ tales que para $r = 1, 2, \ldots, k$ se cumple

$$\begin{gathered} w_r \in W_r, \quad T^{n_r} w_r \in V_r, \\ T^{n_r}(b_{s,r-s+1} + \overline{W}_{m_r}) \subset W_r, \quad \text{para todo } s \leq r, \\ B_{r,1} := b_{r,1} + W_{m_r} \subset b_{r,1} + \overline{W}_{m_r} \subset B_r, \\ B_{s,r-s+1} := b_{s,r-s+1} + W_{m_r} \subset b_{s,r-s+1} + \overline{W}_{m_r} \subset b_{s,r-s} + W_{m_{r-1}} =: B_{s,r-s}, \end{gathered}$$

para todo $s < r$. Para completar inducción consideramos los pares de abiertos (W_{k+1}, V_{k+1}), (B_{k+1}, W_{k+1}), $(B_{k,1}, W_{k+1})$, $(B_{k-1,2}, W_{k+1})$, $\ldots$, $(B_{2,k-1}, W_{k+1})$,

$(B_{1,k}, W_{k+1})$. Por (iii), existe $n_{k+1} \in \mathbb{N}$, $n_{k+1} > n_k$, tal que

$$T^{n_{k+1}}(W_{k+1}) \cap V_{k+1} \neq \varnothing, \quad T^{n_{k+1}}(B_{k+1}) \cap W_{k+1} \neq \varnothing,$$
$$T^{n_{k+1}}(B_{k,1}) \cap W_{k+1} \neq \varnothing, \quad T^{n_{k+1}}(B_{k-1,2}) \cap W_{k+1} \neq \varnothing,$$
$$\vdots$$
$$T^{n_{k+1}}(B_{2,k-1}) \cap W_{k+1} \neq \varnothing, \quad T^{n_{k+1}}(B_{1,k}) \cap W_{k+1} \neq \varnothing.$$

Existen $w_{k+1} \in W_{k+1}$, $b_{k+1,1} \in B_{k+1}$, $b_{k,2} \in B_{k,1}$, …, $b_{2,k} \in B_{2,k-1}$, $b_{1,k+1} \in B_{1,k}$ y $W_{m_{k+1}}$, $m_{k+1} > m_k$, tales que

$$T^{n_{k+1}} w_{k+1} \in V_{k+1}, \quad T^{n_{k+1}}(b_{k+1,1} + \overline{W}_{m_{k+1}}) \subset W_{k+1},$$
$$T^{n_{k+1}}(b_{k,2} + \overline{W}_{m_{k+1}}) \subset W_{k+1}$$
$$\vdots$$
$$T^{n_{k+1}}(b_{2,k} + \overline{W}_{m_{k+1}}) \subset W_{k+1}, \quad T^{n_{k+1}}(b_{1,k+1} + \overline{W}_{m_{k+1}}) \subset W_{k+1}$$
$$B_{k+1,1} := b_{k+1,1} + W_{m_{k+1}} \subset b_{k+1,1} + \overline{W}_{m_{k+1}} \subset B_{k+1}$$
$$B_{k,2} := b_{k,2} + W_{m_{k+1}} \subset b_{k,2} + \overline{W}_{m_{k+1}} \subset B_{k,1}$$
$$\vdots$$
$$B_{2,k} := b_{2,k} + W_{m_{k+1}} \subset b_{2,k} + \overline{W}_{m_{k+1}} \subset B_{2,k-1}$$
$$B_{1,k+1} := b_{1,k+1} + W_{m_{k+1}} \subset b_{1,k+1} + \overline{W}_{m_{k+1}} \subset B_{1,k},$$

Para cada $s \geq 1$ tenemos que

$$b_{s,1} + \overline{W}_{m_s} \supset b_{s,2} + \overline{W}_{m_{s+1}} \supset b_{s,3} + \overline{W}_{m_{s+2}} \supset \cdots$$

Como el espacio E es completo, existe un único x_s tal que

$$x_s \in \bigcap_{j \geq 1} b_{s,j} + \overline{W}_{m_{s+j-1}}.$$

Consideramos $X := \{x_s, \; s \geq 1\}$, $Y := \{z, Tz, T^2 z, \dots\}$ y aplicaciones $S_{n_k} : Y \longrightarrow E$ definidas como $S_{n_k}(T^r z) := T^r w_k$, $r \geq 0$, $k \geq 1$. Veamos que para X, Y y S_{n_k} así definidos se cumplen las hipótesis del criterio de hiperciclicidad. Y es obviamente denso en E. X es denso en E ya que para cada $s \geq 1$ $x_s \in B_s$. Falta por tanto comprobar que

(1) $(T^{n_k} \circ S_{n_k})y \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} y$, para todo $y \in Y$,
(2) $S_{n_k} y \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, para todo $y \in Y$,
(3) $T^{n_k} x \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, para todo $x \in X$.

Por construcción tenemos que $T^{n_k} w_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} z$, luego

$$(T^{n_k} \circ S_{n_k})(T^r z) = T^{n_k}(S_{n_k}(T^r z)) = T^{n_k}(T^r w_k) = T^r(T^{n_k} w_k) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} T^r z,$$

y tenemos la propiedad (1). Por la eleción tomada de w_k tenemos que

$$w_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

luego $S_{n_k}(T^r z) = T^r w_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, y tenemos la propiedad (2). Fijamos $x_s \in X$. Para $k \geq s$, se cumple que

$$x_s \in \bigcap_{j\geq 1} b_{s,j} + \overline{W}_{m_{s+j-1}} \subset b_{s,k-s+1} + W_{m_k} =: B_{s,k-s+1},$$

y entonces $T^{n_k} x_s \in T^{n_k}(b_{s,k-s+1} + \overline{W}_{m_k}) \subset W_k$, luego $T^{n_k} x_s \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ y obtenemos la propiedad (3). Por consiguiente, T satisface el criterio de hiperciclicidad. ☑

La suma directa de dos operadores hipercíclicos no es en general un operador hipercíclico (ver [22], corolario 2.6). También tenemos que si un operador T satisface el criterio de hiperciclicidad, entonces $T \oplus T$ es hipercíclico, sin embargo un problema todavía abierto es si puede sustituirse, en la afirmación anterior, la hipótesis de que T satisfaga el criterio de hiperciclicidad por la aparentemente más débil de que T sea hipercíclico, es decir,

(P2) ¿ $T \oplus T$ es hipercíclico si T es hipercíclico? ([15], p. 97)

En [7] también se muestra que los dos problemas (P1) y (P2) son de hecho equivalentes. Necesitaremos para ello el siguiente lema.

Lema 1.9. *Sean operadores $T_i : X \longrightarrow X$, $i = 1, \dots, n$, donde X es un espacio vectorial topolólogico. Si $T_1 \oplus \cdots \oplus T_n$ es hipercíclico, entonces $T_1 \oplus \cdots \oplus T_r$ es hipercíclico para todo natural $1 \leq r \leq n$.*

Demostración. Sea $(z_1, \dots, z_n) \in X \times \overset{(n)}{\cdots} \times X$ vector hipercíclico para $T_1 \oplus \cdots \oplus T_n$. Veamos que $(z_1, \dots, z_r)$ es hipercíclico para $T_1 \oplus \cdots \oplus T_r$. Dados $x := (x_1, \dots, x_r)$ y U 0-entorno abierto en $X \times \overset{(r)}{\cdots} \times X$, consideramos

$$\widehat{x} := (x_1, \dots, x_r, 0, \overset{(n-r)}{\dots}, 0) \quad \text{y} \quad \widehat{U} := U \times X \times \overset{(n-r)}{\cdots} \times X.$$

Obviamente, $\widehat{x} + \widehat{U}$ es entorno abierto de $\widehat{x}$ y como $(z_1, \dots, z_n)$ es hipercíclico, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $(T_1 \oplus \cdots \oplus T_n)^m(z_1, \dots, z_n) \in \widehat{x} + \widehat{U}$; de donde

$$(T_1 \oplus \cdots \oplus T_r)^m(z_1, \dots, z_r) \in x + U. \qquad ☑$$

Corolario 1.10. *Sea E un espacio de Fréchet separable. Equivalen:*

(i) *Todo operador hipercíclico en E satisface el criterio de hiperciclicidad.*

(ii) *Si $T : E \longrightarrow E$ es hipercíclico, entonces $T \oplus T : E \times E \longrightarrow E \times E$ es hipercíclico.*

Demostración. (i) $\Longrightarrow$ (ii) Basta aplicar el Teorema 1.8 con $r = 2$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Sea un operador $T : E \longrightarrow E$ hipercíclico, veamos que cumple la caracterización (iii) del Teorema 1.8. Dado un número natural $r \geq 1$, sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $r \leq 2^n$. Utilizando n veces (ii) reiteradamente

$$T \oplus T, \quad T \oplus T \oplus T \oplus T, \quad T \oplus \overset{(2^n)}{\cdots} \oplus T$$

son hipercíclicos. Por el Lema 1.9 tenemos que $T \oplus \overset{(r)}{\cdots} \oplus T$ es hipercíclico. ☑

2. Ejemplos de operadores hipercíclicos

A continuación estudiaremos tres operadores hipercíclicos; el operador derivada, el operador traslación y el operador "backward shift". Respecto a este último, lo estudiaremos en diferentes espacios de sucesiones; el espacio de Hilbert l_2 y en espacios de Köthe.

2.1. El operador "backward shift" (Rolewicz)

Este operador fue estudiado por S. Rolewicz [20] en 1969. Es el primer operador hipercíclico conocido en espacios de Hilbert. En el espacio de sucesiones l_2 definimos el operador *backward shift* σ como

$$\sigma(a_1, a_2, a_3, \dots) = (a_2, a_3, \dots).$$

Entonces $T := \lambda\sigma$ es hipercíclico para $\mid \lambda \mid > 1$. Tomamos

$$e_i := (0, \dots, 0, \overset{(i)}{1}, 0, \dots) \quad \text{y} \quad X_0 := \mathrm{LIN}\{e_i, \ i \geq 1\}.$$

Sabemos que X_0 es denso en l_2 y como para cada i fijo $T^n e_i$ es eventualmente cero tenemos que $T^n x \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, para todo $x \in X_0$.

Sea la aplicación u definida como $u(e_i) = e_{i+1}$, $i \geq 1$, y extendida por linealidad a todo X_0. Sea $S : X_0 \longrightarrow X_0$ definida por $S := \lambda^{-1} u$. Se comprueba sin dificultad que $(T \circ S)x = x$, para todo $x \in X_0$.

Por otra parte, $\parallel S^n \parallel = \mid \lambda \mid^{-n} \parallel u \parallel = \mid \lambda \mid^{-n}$, luego $S^n x \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, para todo $x \in X_0$. Por el criterio de hiperciclicidad (Teorema 1.5) tenemos que $T = \lambda\sigma$ es hipercíclico. Nótese que el operador σ tiene norma uno y no puede por tanto ser hipercíclico por sí sólo.

2.2. **El operador "backward shift" en espacios escalonados de Köthe**

Pretendemos extender el estudio del operador σ a espacios de sucesiones más generales que l_2. Concretamente estudiaremos la hiperciclicidad del operador backward shift en espacios escalonados de sucesiones de Köthe. La notación y terminología que utilizaremos es la misma que [8] o [19]. Recordemos que una matriz de Köthe $A = (a_{j,k})_{j,k\in\mathbb{N}}$ satisface las condiciones:

(1) $a_{j,k} > 0$ para todo $j, k \in \mathbb{N}$,
(2) $a_{j,k} \leq a_{j,k+1}$ para todo $j, k \in \mathbb{N}$.

Para $1 \leq p < \infty$ consideramos

$$\lambda_p(A) := \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \ : \ \| \, x \, \|_k := \left(\sum_{j=1}^{\infty} | \, x_j \ a_{j,k} \, |^p \right)^{1/p} < \infty \ , \ \forall \ k \in \mathbb{N} \right\} ,$$

para $p = \infty$ y $p = 0$ consideramos

$$\lambda_\infty(A) := \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \ : \ \| \, x \, \|_k := \sup_{j\in\mathbb{N}} | \, x_j \, | \, a_{j,k} < \infty \ , \ \forall \ k \in \mathbb{N} \right\},$$

$$\lambda_0(A) := \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \ : \ \lim_{j\to\infty} x_j \ a_{j,k} = 0 \ , \ \forall \ k \in \mathbb{N} \right\} \ ,$$

respectivamente. $\mathbb{K}$ puede ser el cuerpo de los números reales o el de los complejos.

Para $1 \leq p \leq \infty$ consideramos $\lambda_p(A)$ con la topología generada por la familia de seminormas $\{\| \, . \, \|_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. $\lambda_0(A)$ es un subespacio de $\lambda_\infty(A)$ y consideramos la topología inducida por la correspondiente familia de seminormas. Sabemos que para $1 \leq p < \infty$, $\lambda_p(A)$ y $\lambda_0(A)$ son espacios de Fréchet separables. $\lambda_\infty(A)$ es espacio de Fréchet. Para cada $j \in \mathbb{N}$, tomaremos

$$e_j := (0, \dots, 0, \overset{(j)}{1}, 0, \dots) = (\delta_{j,i})_{i\in\mathbb{N}},$$

Para $1 \leq p < \infty$, tenemos que $e_j \in \lambda_p(A)$ (resp. $\lambda_0(A)$) para cada $j \in \mathbb{N}$. Además

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j \text{ para todo } x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \lambda_p(A) \text{ (resp. } \lambda_0(A)) \ ,$$

es decir, $\mathrm{LIN}\{e_j \ , \ j \in \mathbb{N}\}$ es denso en $\lambda_p(A)$ para $1 \leq p < \infty$ (resp. $\lambda_0(A)$).

Sea el operador backward shift definido como

$$\sigma(x_1, x_2, x_3, \dots) := (x_2, x_3, x_4, \dots);$$

también definimos, para cada $j \in \mathbb{N}$ $u(e_j) := e_{j+1}$. Nótese que para $n \in \mathbb{N}$

$$\sigma^n(e_j) = \begin{cases} \bar{0} & \text{si } j \leq n \\ e_{j-n} & \text{si } j > n \end{cases} \quad ; \quad u^n(e_j) = e_{j+n}.$$

Necesitamos que $\sigma : \lambda_p(A) \longrightarrow \lambda_p(A)$ ($p = 0,\ 1 \leq p \leq \infty$) esté bien definido y sea continuo. Si σ es continuo, entonces

$$\forall x \in \lambda_p(A),\ \forall n \in \mathbb{N},\ \exists\ m > n,\ \exists\ \varepsilon > 0\ :\ \|\ \sigma x\|_n \leq \varepsilon\ \|\ x\|_m\ .$$

Si tomamos en particular $x = e_j$, con $j = 1, 2, \ldots$ obtenemos

$$\|\ e_j\|_n \leq \varepsilon\ \|\ e_{j+1}\|_m,\ j = 1, 2, \ldots\ ,$$

luego $a_{j,n} \leq \varepsilon\ a_{j+1,m},\ j = 1, 2, \ldots$; de donde

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \frac{a_{j,n}}{a_{j+1,m}} < \infty.$$

Recíprocamente, si la matriz de Köthe A satisface que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists\ m > n\ :\ \sup_{j\in\mathbb{N}} \frac{a_{j,n}}{a_{j+1,m}} < \infty\ , \tag{1}$$

entonces

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists\ m > n,\ \exists\ \varepsilon > 0\ :\ a_{j,n} \leq \varepsilon\ a_{j+1,m},\ j = 1, 2, \ldots\ .$$

Dada una seminorma $\|\cdot\|_n$ y $x \in \lambda_p(A)$, existe $m > n$ tal que si $1 \leq p < \infty$,

$$\|\ \sigma x\|_n = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_{j+1}\ a_{j,n}|^p\right)^{1/p} \leq \varepsilon \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_{j+1}\ a_{j+1,m}|^p\right)^{1/p} \leq \varepsilon\ \|\ x\|_m,$$

(respectivamente, para $p = 0$ tenemos

$$\|\ \sigma x\|_n = \sup_{j\in\mathbb{N}} |x_{j+1}| a_{j,n} \leq \varepsilon\ \sup_{j\in\mathbb{N}} |x_{j+1}| a_{j+1,m} \leq \varepsilon\ \|\ x\|_m\ ),$$

y entonces $\sigma : \lambda_p(A) \longrightarrow \lambda_p(A)$ es continua.

Nótese también que si la matriz A satisface (1), entonces trivialmente σ está bien definido. Supondremos a partir de ahora que las matrices de Köthe con las que trabajaremos satisfacen la condición (1).

Proposición 2.1. *Sea A matriz de Köthe, $\lambda \in \mathbb{K}$ y $T := \lambda\ \sigma$.*

(1) *Si $\lim_{j\to\infty} \frac{a_{j,k}}{|\lambda|^j} = 0$ para cada $k \in \mathbb{N}$, entonces $T : \lambda_p(A) \longrightarrow \lambda_p(A)$ ($1 \leq p < \infty$; $p = 0$) es hipercíclico.*

(2) *Si existe una sucesión $(C_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset (0, \infty)$ tal que $\sup_{j\in\mathbb{N}} a_{j,k} \leq C_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$, entonces $T : \lambda_p(A) \longrightarrow \lambda_p(A)$ ($1 \leq p < \infty$; $p = 0$) es hipercíclico si $|\ \lambda\ | > 1$.*

Demostración. (1) Sabemos que $X_0 := \mathrm{LIN}\{e_i\ ,\ i \in \mathbb{N}\}$ es denso en $\lambda_p(A)$ (resp. $\lambda_0(A)$). Definimos (extendiendo u por linealidad)

$$S : X_0 \longrightarrow X_0\ :\ S := \lambda^{-1} u.$$

Veamos que se cumplen (i), (ii) y (iii) del criterio de hiperciclicidad (Teorema 1.5).

(i) Se comprueba sin dificultad que $T \circ S = I_{X_0}$.
(iii) Dada una seminorma $\| \cdot \|_k$, para cada $i \in \mathbb{N}$ fijo $T^n e_i$ es eventualmente cero; luego

$$\| T^n x \|_k \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

(ii) Dada una seminorma $\| \cdot \|_k$, para cada $i \in \mathbb{N}$ fijo

$$\begin{aligned}
\| S^n e_i \|_k &= \| \lambda^{-n} u^n(e_i) \|_k = | \lambda |^{-n} \| u^n(e_i) \|_k = | \lambda |^{-n} \| e_{i+n} \|_k \\
&= | \lambda |^{-n} \left(\sum_{j=1}^{\infty} | \delta_{i+n,j} \ a_{j,k} |^p \right)^{1/p} \quad (\text{resp.} \ \ | \lambda |^{-n} \left(\sup_{j\in\mathbb{N}} | \delta_{i+n,j} \mid a_{j,k} \right)) \\
&= | \lambda |^{-n} \ a_{i+n,k} = | \lambda |^i \ \frac{a_{i+n,k}}{| \lambda |^{i+n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, T es hipercíclico.
(2) Para cada $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{j\to\infty} \frac{a_{j,k}}{| \lambda |^j} \leq \lim_{j\to\infty} \frac{C_k}{| \lambda |^j} = 0,$$

ahora basta aplicar (1). ☑

El caso $\lambda_\infty(A)$ no puede ser estudiado como los casos anteriores ya que $\mathrm{LIN}\{e_i, i \in \mathbb{N}\}$ no es denso, en general, en $\lambda_\infty(A)$. Sí observaremos que si la matriz de Köthe A satisface la propiedad de que para cada conjunto infinito $I \subset \mathbb{N}$ y cada $n \in \mathbb{N}$ existe $k \in \mathbb{N}$, $k > n$, tal que

$$\inf_{j\in I} \frac{a_{j,n}}{a_{j,k}} = 0 \ ,$$

entonces $\lambda_\infty(A)$ cumple lo mismo que $\lambda_0(A)$. Efectivamente basta tener en cuenta que si A cumple la propiedad anterior, entonces $\lambda_\infty(A) = \lambda_0(A)$ (ver [19, Teorema 27.9]).

2.3. **El operador derivada (MacLane)**

Este operador fue estudiado por G. R. MacLane [18] en 1952. Sea $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ el espacio de las funciones enteras en $\mathbb{C}$ con la topología de convergencia uniforme sobre los compactos de $\mathbb{C}$. En este espacio consideramos el operador derivada $D : \mathcal{H}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Veamos que D es hipercíclico.

Sabemos que los polinomios son densos en $\mathcal{H}(\mathbb{C})$, sea por tanto $X_0 := \mathrm{LIN}\left\{z^i \ , \ \ i \geq 0\right\}$. Obviamente, $D^n x \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, para todo $x \in X_0$. Sea la aplicación S definida como

$$Sz^i := \frac{z^{i+1}}{i+1} \ , \ \ i \geq 0,$$

y extendida por linealidad a X_0. Se comprueba sin dificultad que $D \circ Sx = x$ para todo $x \in X_0$. Por otra parte, sea K compacto de $\mathbb{C}$; existe $R > 0$ tal que $| z | \leq R$ para todo $z \in K$. Por tanto para cada $i \geq 0$ y para todo $z \in K$ tenemos que

$$| S^n z^i | = \frac{| z |^{i+n}}{(i+1)\cdots(i+n)} \leq \frac{R^{i+n}}{(i+1)\cdots(i+n)} = i!R^i \frac{R^n}{(n+i)!} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

luego $S^n x \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ para todo $x \in X_0$. Por el criterio de hiperciclicidad (Teorema 1.5) tenemos que D es hipercíclico.

2.4. **El operador traslación (Birkhoff)**

Este operador fue estudiado por G. D. Birkhoff en 1929. Como ya se mencionó en la introducción el resultado de G. D. Birkhoff es sorprendente ya que nos asegura la existencia de una función universal que, en todo conjunto compacto, sus traslaciones se aproximan a cualquier función entera tanto como se desee. Comenzaremos por un lema técnico sobre subespacios densos en el conjunto de las funciones holomorfas.

Lema 2.2. *Para todo U abierto (no vacío) de $\mathbb{C}$ se cumple que*

$$H = LIN\left\{e^{\lambda z} \text{ tal que } \lambda \in U\right\}$$

es denso en $\mathcal{H}(\mathbb{C})$.

Demostración. Es suficiente probar que toda forma lineal y continua que se anula en H es idénticamente nula. Sea por tanto $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{C})'$ tal que $\varphi_{|_H} = \overline{0}$. Por la continuidad de φ se cumple que

$$| \varphi(f) | \leq M \sup \{| f(z) | : \ | z | \leq R\},$$

para ciertos $M > 0$ y $R > 0$.

Sea $K = \{z : | z | \leq R\}$. Consideramos $\varphi_{|_{C(K)\cap\mathcal{H}(\mathbb{C})}}$ y por el teorema de Hahn-Banach existe $\tilde{\varphi} : C(K) \longrightarrow \mathbb{C}$ lineal y continua que extiende a $\varphi_{|_{C(K)\cap\mathcal{H}(\mathbb{C})}}$. Por el teorema de representación de Riesz existe μ, medida de Borel regular tal que

$$\tilde{\varphi}(g) = \int_K g(w)\, d\mu(w), \quad \text{para todo } g \in C(K),$$

luego

$$\tilde{\varphi}(e^{\lambda z}) = \varphi(e^{\lambda z}) = \int_K e^{\lambda w}\, d\mu(w) = 0, \quad \text{para todo } \lambda \in U.$$

Definimos $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ como

$$F(\lambda) := \int_K e^{\lambda w}\, d\mu(w);$$

la función F es entera y se anula en el abierto U, por tanto $F = \overline{0}$ (principio ceros aislados). Como F es idénticamente nula tenemos que $D^j F(\lambda) = 0$ para todo $j = 0, 1, \ldots,$ y por derivación bajo el signo integral

$$D^j F(\lambda) = \int_K w^j e^{\lambda w} \, d\mu(w) = 0, \quad \text{para todo } j = 0, 1, \ldots,.$$

Particularizando en $\lambda = 0$,

$$0 = D^j F(0) = \int_K w^j \, d\mu(w) = \tilde{\varphi}(w^j) = \varphi(w^j)$$

para todo $j = 0, 1, \ldots$. Al ser los polinomios densos en $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ tenemos que $\varphi = \overline{0}$. ☑

Consideramos el *operador traslación* $T_a : \mathcal{H}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{H}(\mathbb{C})$ con $a \neq 0$, definido como $T_a(f(z)) := f(z + a)$. Veamos que T_a es hipercíclico. Sea

$$X := \text{LIN}\left\{e^{\lambda z} \ : \ | \, e^{\lambda a} \, | < 1\right\}, \quad Y := \text{LIN}\left\{e^{\lambda z} \ : \ | \, e^{\lambda a} \, | > 1\right\},$$

por el Lema 2.2 tenemos que X e Y son densos en $\mathcal{H}(\mathbb{C})$. Sea K un conjunto compacto de $\mathbb{C}$; tomamos $R > 0$ tal que $| \, z \, | \leq R$ para todo z de K. Para cada función $e^{\lambda z}$ de X y para todo z de K tenemos que

$$| \, T_a^n e^{\lambda z} \, | = | \, e^{\lambda(z+na)} \, | = | \, e^{\lambda z} \, || \, e^{\lambda a} \, |^n \leq e^{|\lambda| R} \, | \, e^{\lambda a} \, |^n \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0,$$

luego $T_a^n x \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ para todo x de X.

Tomamos $S_n := (T_{-a})^n$ y análogamente obtenemos que para cada función $e^{\lambda z}$ de Y y para todo z de K se cumple que

$$| \, S_n e^{\lambda z} \, | = | \, e^{\lambda(z-na)} \, | \leq e^{|\lambda| R} \, | \, e^{\lambda a} \, |^{-n} \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0,$$

luego $S_n y \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ para todo y de Y. Por otro lado es obvio que $(T_a^n \circ S_n) y = y$ para todo y de Y. Por el criterio de hiperciclicidad (Teorema 1.6) T_a es hipercíclico.

Obsérvese que la hiperciclicidad de este operador también puede deducirse fácilmente a partir de la Proposición 1.7. Basta tomar

$$A = \{e^{\lambda z} \ : \ |e^{\lambda a}| < 1\} \quad \text{y} \quad B = \{e^{\lambda z} \ : \ |e^{\lambda a}| > 1\}.$$

A y B son subconjuntos totales por el Lema 2.2 y todo vector de A (resp. B) es un autovector para T_a ya que $T_a e^{\lambda z} = e^{\lambda a} e^{\lambda z}$.

3. Algunas propiedades de los operadores hipercíclicos

En resultados posteriores resultará conveniente, por lo que a demostraciones respecta, trabajar con espacios sobre el cuerpo $\mathbb{C}$. El caso real se tratará generalmente aparte considerando su complexificación. Recordamos a continuación este concepto y algunas propiedades básicas.

Definición 3.1. Dado E e.l.c. real, denotamos por $\tilde{E} := E + i\,E$ su complexificación. En ese caso $\tilde{E}' = E' + i\,E'$, donde si $v_1' + i\,v_2' \in \tilde{E}'$ y $v_1 + i\,v_2 \in \tilde{E}$, entonces

$$\langle v_1 + i\,v_2, v_1' + i\,v_2'\rangle := \langle v_1, v_1'\rangle - \langle v_2, v_2'\rangle + i\left(\langle v_1, v_2'\rangle + \langle v_2, v_1'\rangle\right).$$

Si T es un operador en E, su complexificación $\tilde{T}$ es el operador en $\tilde{E}$ definido como

$$\tilde{T}(v) = \tilde{T}(v_1 + i\,v_2) := Tv_1 + i\,Tv_2\ ,\ \ \forall\ v = v_1 + i\,v_2 \in \tilde{E}.$$

En 1982 C. Kitai [16] demostró que los operadores traspuestos de operadores hipercíclicos en espacios de Banach complejos no tienen valores propios. Probaremos a continuación que el resultado también es cierto para espacios localmente convexos, y en el caso real demostraremos que quien no admite valores propios es el traspuesto de la complexificación del operador.

Proposición 3.2. *Sea E un espacio localmente convexo complejo (resp. real) y $T : E \to E$ un operador hipercíclico. Entonces el operador traspuesto $T^* : E' \to E'$ (resp. $\tilde{T}^* : \tilde{E}' \to \tilde{E}'$) no tiene valores propios.*

Demostración. En el caso complejo, supongamos que λ es un valor propio de T^* y $v' \in E'$ un vector propio de T^* de autovalor λ. Se tiene que, dado $x \in E$ hipercíclico para T, $\{\langle T^n x, v'\rangle\}_{n\in\mathbb{N}}$ es denso en $\mathbb{C}$, pero

$$\{\langle T^n x, v'\rangle\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\langle x, (T^*)^n v'\rangle\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\langle x, \lambda^n v'\rangle\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\lambda^n \langle x, v'\rangle\}_{n\in\mathbb{N}}\,,$$

que no es denso en $\mathbb{C}$; luego T^* no tiene valores propios.

Si E es real y $\tilde{v}' \in \tilde{E}'$ fuera un vector propio de $\tilde{T}^*$ de valor propio $\lambda \in \mathbb{C}$, se tiene que, dado $x \in E$ hipercíclico para T

$$\{|\ \langle T^n x, \tilde{v}'\rangle\ |\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\left|\langle \tilde{T}^n x, \tilde{v}'\rangle\right|\right\}_{n\in\mathbb{N}} = \{|\ \lambda\ |^n |\ \langle x, v'\rangle\ |\}_{n\in\mathbb{N}}\,.$$

La primera expresión en densa en $\mathbb{R}^+$ (basta considerar $y \in E$ tal que $|\ \langle y, v'\rangle\ | = 1$ y tener en cuenta que $\{\alpha y\ :\ \alpha \in \mathbb{R}^+\} \subset \overline{\{T^n x\}_{n\in\mathbb{N}}}$), pero no la última, lo cual sería una contradicción. ☑

Como consecuencia de la propiedad anterior se obtiene el siguiente corolario para espacios de dimensión finita. El caso real fue probado por J. P. Bes [6] con un argumento distinto del que aquí ofrecemos.

Corolario 3.3. *Si un espacio localmente convexo E tiene dimensión finita, entonces no existe ningún operador hipercíclico en E.*

Demostración. Basta tener en cuenta que E' (resp. $\tilde{E}'$) tiene dimensión finita y por tanto todo $T \in L(E')$ (resp. $T \in L(\tilde{E}')$) tiene valores propios. ☑

Pretendemos a continuación encontrar un subespacio denso e invariante de vectores hipercíclicos (excepto el cero) para un operador hipercíclico. La propiedad que demostramos a continuación nos permitirá encontrar vectores hipercíclicos para un operador una vez conocido un vector hipercíclico. Nuevamente necesitamos tratar por separado el caso real y el complejo. El resultado siguiente fue probado por P. S. Bourdon [11] para espacios de Banach complejos.

También aquí el caso real fue demostrado por J. P. Bes [6] utilizando técnicas distintas. Nosotros nos basaremos en la complexificación del espacio y en el argumento de Bourdon.

Proposición 3.4. *Sea E un espacio localmente convexo y $T : E \to E$ un operador hipercíclico. Sea $x \in E$ vector hipercíclico de T. Entonces $p(T)x$ es vector hipercíclico de T para todo p polinomio (no nulo).*

Demostración. Si E es espacio complejo, tenemos que por hipótesis $\mathrm{Orb}(T, x) = \{x, Tx, T^2x, \dots\}$ es densa en E. Como T conmuta con $p(T)$ tenemos que

$$T^n p(T)x = p(T)T^n x, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

luego $\mathrm{Orb}(T, p(T)x) = p(T)\mathrm{Orb}(T, x)$; es decir, la órbita por T del vector $p(T)x$ es la imagen por $p(T)$ de la órbita por T del vector x. Obsérvese primero que $(T - \lambda I)$ debe tener rango denso en E para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, ya que si no lo tuviera tomaríamos $F := \overline{\mathrm{Im}(T - \lambda I)}$, el cual es un subespacio propio cerrado de E. Luego existe $v' \in E'$ no nulo tal que v' se anula sobre F; por tanto

$$\langle Tv - \lambda v, v' \rangle = 0, \quad \text{para todo } v \in E,$$

de donde

$$\langle Tv, v' \rangle \ = \ \langle \lambda v, v' \rangle, \quad \text{para todo } v \in E.$$

Así que

$$\langle v, T^* v' \rangle \ = \lambda \langle v, v' \rangle \ = \ \langle v, \lambda v' \rangle, \quad \text{para todo } v \in E.$$

Se tendría $T^* v' = \lambda v'$ y λ sería valor propio de T^*, lo cual no puede ocurrir por la Proposición 3.2.

Si $p(T)$ tuviera rango denso tendríamos que $\mathrm{Orb}(T, p(T)x)$ sería densa al ser la imagen del conjunto denso $\mathrm{Orb}(T, x)$ por un operador con rango denso. Si expresamos $p(T)$ como producto de factores lineales de la forma $T - \lambda I$, por el comentario anterior cada factor tiene rango denso y entonces $p(T)$ también lo tiene al ser producto de operadores con rango denso.

Si E es espacio real, consideramos $R : \tilde{E} \to E$ definido como $R(v_1 + i\, v_2) := v_1$, el cual es continuo (y sobreyectivo) si consideramos $\tilde{E}$ como $\mathbb{R}$-espacio. Observamos que

$$\begin{aligned}\mathrm{Orb}(T, p(T)x) &= R\left(\mathrm{Orb}(T, p(T)x) + i\ \mathrm{Orb}(T, p(T)x)\right)\\ &= R\left(p(T)\mathrm{Orb}(T, x) + i\ p(T)\mathrm{Orb}(T, x)\right)\\ &= R\left(p(\tilde{T})\left(\mathrm{Orb}(T, x) + i\ \mathrm{Orb}(T, x)\right)\right).\end{aligned}$$

Por lo visto para el caso complejo $p(\tilde{T})$ tiene rango denso (en $\tilde{E}$), ya que $\tilde{T}^*$ no tiene valores propios, y $\mathrm{Orb}(T, x) + i\ \mathrm{Orb}(T, x)$ es denso, luego $\mathrm{Orb}(T, p(T)x)$ es denso en E. ☑

Corolario 3.5. *Sea E un espacio de localmente convexo y $T : E \to E$ un operador hipercíclico. Entonces existe un subespacio de E denso e invariante por T, cuyos vectores, excepto el cero, son hipercíclicos respecto de T.*

Demostración. Sea $x \in E$ vector hipercíclico respecto de T. Basta tomar

$$V := \{p(T)x \ :\ \ p \text{ es polinomio}\}.$$

V es, obviamente, subespacio de E invariante por T. Es denso ya que contiene la órbita del vector x. Para cada polinomio no nulo p, el vector $p(T)x$ es hipercíclico respecto de T por la proposición anterior. ☑

A continuación probaremos que cualquier potencia de un operador hipercíclico es hipercíclico. Además, si un vector es hipercíclico para un operador, entonces también lo es para cualquiera de sus potencias. Este resultado se debe a S. I. Ansari [1], aunque hay que mencionar que se basaba en el resultado de Bourdon sobre la existencia de subespacios invariantes densos consistentes en vectores hipercíclicos (salvo el vector nulo) en el caso complejo. Posteriormente Ansari [2] modificó el argumento para adaptarlo también al caso real. Una vez conocida la existencia de subespacio invariante denso de vectores hipercíclicos (excepto el vector nulo) para el caso real (Bes [6]), es válida la prueba original de Ansari en ambos casos y esa es la que presentamos.

Proposición 3.6. *Sean E un espacio localmente convexo, $T : E \to E$ un operador hipercíclico y $x \in E$ vector hipercíclico de T. Entonces T^n es hipercíclico y x es vector hipercíclico para T^n, para todo n número natural.*

Demostración. Sea

$$V := \{p(T)x \ :\ \ p \text{ es polinomio}\}.$$

Por corolario 3.5 V es un subespacio denso e invariante por T tal que todo vector no nulo de V es hipercíclico para T. Denotamos $A := T_{|V}$ y definimos

$$S := \{x, A^n x, A^{2n} x, \dots\} = \mathrm{Orb}(A^n, x) = \mathrm{Orb}(T^n, x),$$

probaremos que $\overline{S}^V = V$ ya que al ser V denso en E tendremos que $\overline{S} = E$. Para cada k tal que $1 \le k \le n$ definimos

$$S_k := \bigcup \left\{ \overline{A^{i_1} S}^V \cap \cdots \cap \overline{A^{i_k} S}^V \ :\ 0 \le i_1 < \cdots < i_k \le n-1 \right\};$$

es decir,

$$\begin{aligned}
&S_1 = \overline{A^0 S}^V \cup \cdots \cup \overline{A^{n-1} S}^V,\\
&S_2 = (\overline{A^0 S}^V \cap \overline{A^1 S}^V) \cup \cdots \cup (\overline{A^0 S}^V \cap \overline{A^{n-1} S}^V) \cup\\
&\qquad (\overline{A^1 S}^V \cap \overline{A^2 S}^V) \cup \cdots \cup (\overline{A^1 S}^V \cap \overline{A^{n-1} S}^V) \cup \cdots \cup (\overline{A^{n-2} S}^V \cap \overline{A^{n-1} S}^V),\\
&\quad \vdots\\
&S_n = \overline{A^0 S}^V \cap \cdots \cap \overline{A^{n-1} S}^V.
\end{aligned}$$

Obviamente S_k es cerrado en V y $S_n \subset S_{n-1} \subset \cdots \subset S_1$. Veamos que

(i) S_k es invariante por A para cada k,
(ii) $0 \in S_n$,
(iii) $S_n = V$.

Tendremos entonces que $V = S_n \subset \overline{A^0 S}^V = \overline{S}^V \subset V$, de donde $\overline{S}^V = V$, como queremos probar.

(i) Sea $0 \le i_1 < \cdots < i_k \le n-1$, entonces

$$\begin{aligned}
A(\overline{A^{i_1} S}^V \cap \cdots \cap \overline{A^{i_k} S}^V) &\subset \overline{A^{i_1+1} S}^V \cap \cdots \cap \overline{A^{i_k+1} S}^V\\
&\subset \overline{A^{j_1} S}^V \cap \cdots \cap \overline{A^{j_k} S}^V \subset S_k,
\end{aligned}$$

tomando $j_1 = i_1 + 1, \dots, j_k = i_k + 1$ (si $i_k = n-1$, tomaría $j_1 = 0$ y $j_l = i_{l-1} + 1$ para $1 < l \le k$).

(ii) Nótese que

$$\begin{aligned}
S_1 &= \overline{A^0 S}^V \cup \cdots \cup \overline{A^{n-1} S}^V\\
&= \overline{\{x, A^n x, A^{2n} x, \dots\}}^V \cup \overline{\{Ax, A^{n+1} x, A^{2n+1} x, \dots\}}^V \cup \cdots\\
&\quad \cup \overline{\{A^{n-1} x, A^{n+n-1} x, A^{2n+n-1} x, \dots\}}^V = V,
\end{aligned}$$

ya que

$$\{x, A^n x, A^{2n} x, \dots\} \cup \cdots \cup \{A^{n-1} x, A^{n+n-1} x, A^{2n+n-1} x, \dots\} = \mathrm{Orb}(T, x).$$

Como $0 \in V = S_1$ tendremos que $0 \in \overline{A^i S}^V$ para cierto i entre 0 y $n-1$, pero

$$A(\overline{A^i S}^V) \subset \overline{A^{i+1} S}^V \quad \text{y} \quad \overline{A^n S}^V \subset \overline{S}^V = \overline{A^0 S}^V,$$

luego $0 \in \overline{A^j S}^V$ para todo $j = 0, 1, \ldots, n-1$ y por tanto $0 \in S_n$.

(iii) Sabemos que $S_1 = V$. Por inducción supongamos que $S_k = V$ con $1 \leq k < n$ y probemos que $S_{k+1} = V$. Si $S_{k+1} \neq V$, como cada vector no nulo de V es hipercíclico para A y S_{k+1} es cerrado e invariante por A, tenemos que necesariamente $S_{k+1} = \{0\}$.

Por otra parte si $\{i_1, \ldots, i_k\} \neq \{j_1, \ldots, j_k\}$ se cumple que

$$\left(\overline{A^{i_1} S}^V \cap \cdots \cap \overline{A^{i_k} S}^V\right) \bigcap \left(\overline{A^{j_1} S}^V \cap \cdots \cap \overline{A^{j_k} S}^V\right) \subset S_{k+1},$$

así que

$$\left[\left(\overline{A^{i_1} S}^V \cap \cdots \cap \overline{A^{i_k} S}^V\right) \setminus \{0\}\right] \bigcap \left[\left(\overline{A^{j_1} S}^V \cap \cdots \cap \overline{A^{j_k} S}^V\right) \setminus \{0\}\right] \subset S_{k+1} \setminus \{0\},$$

y $S_{k+1} \setminus \{0\} = \varnothing$. Como el conjunto $S_k = V$ se define como unión de conjuntos de la forma $\left(\overline{A^{i_1} S}^V \cap \cdots \cap \overline{A^{i_k} S}^V\right)$ con $0 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n-1$ tenemos que $V \setminus \{0\}$ es unión finita de cerrados disjuntos (relativos a $V \setminus \{0\}$). Por ser $V \setminus \{0\}$ un conjunto conexo necesariamente algún

$$\left[\left(\overline{A^{i_1} S}^V \cap \cdots \cap \overline{A^{i_k} S}^V\right) \setminus \{0\}\right] = V \setminus \{0\}$$

y los otros son vacíos. Por el razonamiento utilizado en (i) existen $0 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n-1$ ($(j_1, \ldots, j_k) \neq (i_1, \ldots, i_k)$) tales que

$$A(V) = A\left(\overline{A^{i_1} S}^V \cap \cdots \cap \overline{A^{i_k} S}^V\right) \subset \left(\overline{A^{j_1} S}^V \cap \cdots \cap \overline{A^{j_k} S}^V\right) = \{0\},$$

lo cual no puede ocurrir al ser $A(V)$ denso en V. Por lo tanto $S_{k+1} = V$ lo que completa inducción y acaba la demostración. ☑

Finalmente estudiaremos la existencia o no de operadores hipercíclicos que sean acotados, Montel o compactos en espacios localmente convexos. Recordamos que si E es un espacio localmente convexo, un operador $T : E \longrightarrow E$ es acotado si la imagen por T de algún 0-entorno en E es un conjunto acotado de E. Si X es un espacio de Banach, un operador $S : X \longrightarrow X$ es compacto si la imagen por S de la bola unidad es un conjunto relativamente compacto en X. Hay dos maneras de generalizar el concepto de operador compacto para espacios localmente convexos. Un operador T en un espacio localmente convexo E se dice que es Montel si la imagen por T de todo conjunto acotado de E es un conjunto relativamente compacto en E; se dice que T es compacto si la imagen de algún 0-entorno en E es un conjunto relativamente compacto en E. Todo operador compacto es Montel y el recíproco es cierto en espacios de Banach. Además, como todo operador (continuo) en un espacio de Banach es acotado, estudiaremos tan solo operadores acotados en espacios localmente convexos no normables.

Respecto a la compacidad e hiperciclicidad de un operador, veremos que ningún operador compacto en un espacio localmente convexo es hipercíclico. Esto generaliza el correspondiente resultado de Kitai [16] formulado para espacios de Banach complejos. Comenzaremos demostrando que ningún operador compacto en un espacio de Banach es hipercíclico y después generalizaremos este resultado a operadores compactos en espacios localmente convexos. Como en anteriores resultados, ofrecemos en primer lugar la demostración para cuando el espacio es complejo.

Teorema 3.7. *Sea X un espacio de Banach y $T : X \longrightarrow X$ operador compacto, entonces T no es hipercíclico.*

Demostración. En primer lugar tratamos el caso en que X es complejo. Si T fuera hipercíclico, entonces T^* no tendría valores propios. Además T^* es compacto, luego $\sigma(T^*) = \{0\}$, ya que T^* es operador compacto que no tiene valores propios (ver [21, Theorem 4.25, (b)]). Por tanto, $\sigma(T) = \sigma(T^*) = \{0\}$. Por la fórmula del radio espectral tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \| T^n \|^{1/n} = 0,$$

por lo cual existe n_0 tal que $\| T^n \| \leq 1$ para todo $n \geq n_0$, lo que contradice que T sea hipercíclico. Si X es real, tomamos la complexificación $\tilde{T}$ de T, que sigue siendo compacto y del cual sabemos que $\tilde{T}^*$ no tiene valores propios. Según lo anterior, existe n_0 natural tal que $\| T^n \| \leq \| \tilde{T}^n \| \leq 1$ para todo $n \geq n_0$. Llegamos así a una contradicción con la hiperciclicidad de T. ☑

El siguiente resultado se encuentra en [10].

Teorema 3.8. *Sea E un espacio localmente convexo y $T : E \longrightarrow E$ operador compacto, entonces T no es hipercíclico.*

Demostración. T es compacto, luego existe U 0-entorno abx en E tal que $\overline{T(U)}$ es compacto en E. Sea $p := p_U$ el calibrador de Minkowski de U, sabemos que p es una seminorma en E y considerando $E_U := (E/\ker p, p)$ es un espacio normado. Tomamos $\widehat{E}_U$ la completación del espacio normado E_U y $q : E \longrightarrow E$ la aplicación cociente. El operador T induce un operador, $\widehat{T} : E_U \longrightarrow E_U$ definido como $\widehat{T}\,(q(x)) := q\,(T(x))$ (el cual está bien definido al ser $\ker p = \ker q \subset \ker T$). Extendemos este operador por completación a $\widehat{E}_U$. Veamos que $\widehat{T}$ es operador compacto. Sea B la bola unidad en $\widehat{E}_U$, se tiene que

$$\overline{\widehat{T}\,(B)} \subset \overline{\widehat{T}\,(q(U))} = \overline{q\,(T\,(U))}$$

que es compacto en $\widehat{E}_U$, por tanto $\widehat{T}$ es compacto. Supongamos que T es hipercíclico en E, entonces existe $x \in E$ tal que $\{x, Tx, T^2x, \dots\}$ es denso en E, pero entonces $\{q(x), \widehat{T}(q(x)), \widehat{T}^2(q(x)), \dots\}$ es denso en $\widehat{E}_U$, lo cual no puede ocurrir ya que por el Teorema 3.7, $\widehat{T}$ no puede ser hipercíclico en $\widehat{E}_U$. ☑

El Teorema 3.8 no es cierto para operadores Montel o acotados. J. Bonet y A. Peris [10] demuestran que todo espacio de Fréchet separable de dimensión infinita admite un operador hipercíclico; basta tomar un espacio de Fréchet que sea Montel (todo acotado es relativamente compacto) para obtener un operador Montel hipercíclico.

Para el caso de operadores acotados Bonet y Peris [10] construyen un operador acotado hipercíclico en un espacio de Fréchet sin norma continua.

Referencias

[1] S. I. Ansari, *Hypercyclic and cyclic vectors*, J. Funct. Anal. **128** (1995), no. 2, 374–383.

[2] ———, *Existence of hypercyclic operators on topological vector spaces*, J. Funct. Anal. **148** (1997), no. 2, 384–390.

[3] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G Davis, and P. Stacey, *On Devaney's definition of chaos*, Amer. Math. Monthly **99** (1992), no. 4, 332–334.

[4] L. Bernal-González, *Hypercyclic sequences of differential and antidifferential operators*, J. Approx. Theory, to appear.

[5] L. Bernal González, *On hypercyclic operators on Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., to appear.

[6] J. P. Bès, *Invariant manifolds of hypercyclic vectors for the real scalar case*, Proc. Amer. Math. Soc., to appear.

[7] ———, *Three problems on hypercyclic operators*, Ph.D. thesis, Kent State University, 1998.

[8] K. D. Bierstedt, R. G. Meise, and W. H. Summers, *Köthe sets and Köthe sequence spaces*, Functional Analysis, Holomorphy and Approximation Theory (Amsterdam-New York) (J. A. Barroso, ed.), North-Holland Mathematics Studies, vol. 71, North-Holland, 1982, pp. 27–91.

[9] G. D. Birkhoff, *Démonstration d'un théoréme elémentaire sur les fonctions entiéres*, C. R. Acad. Sci. Paris **189** (1929), 473–475.

[10] J. Bonet and A. Peris, *Hypercyclic operators on non-normable Fréchet spaces*, J. Funct. Anal., to appear.

[11] P. S. Bourdon, *Invariant manifolds of hypercyclic vectors*, Proc. Amer. Math. Soc. **118** (1993), no. 3, 845–847.

[12] R. L. Devaney, *An introduction to chaotic dinamycal systems*, second ed., Addison Wesley, Reading, MA, 1989.

[13] R. M. Gethner and J. H. Shapiro, *Universal vectors for operators on spaces of holomorphic functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **100** (1987), no. 2, 281–288.

[14] G. Godefroy and J. H. Shapiro, *Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds*, J. Funct. Anal. **98** (1991), no. 2, 229–269.

[15] D. A. Herreo, *Hypercyclic operators and chaos*, J. Operator Theory **28** (1992), no. 1, 93–103.
[16] C. Kitai, *Invariant closed sets for linear operators*, Ph.D. thesis, University of Toronto, 1982.
[17] G. Köthe, *Topological vector spaces, I*, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1969.
[18] G. R. MacLane, *Sequences of derivatives and normal families*, J. Analyse Math. **2** (1952), 72–87.
[19] R. Meise and D. Vogt, *Introduction to functional analysis*, Oxford University Press, Oxford-New York, 1997.
[20] S. Rolewicz, *On orbits of elements*, Studia Math. **32** (1969), 17–22.
[21] W. Rudin, *Functional analysis*, McGraw-Hill, New York, 1973.
[22] H. N. Salas, *A hypercyclic operator whose adjoint is also hypercyclic*, Proc. Amer. Math. Soc. **112** (1991), no. 3, 765–770.

(Recibido en enero de 1999)

E.T.S.I. Agrónomos
Universidad Politécnica de Valencia
Departamento de Matemática Aplicada
Valencia 46071, España (Spain)
fmarting@mat.upv.es