Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen **31** *(1997), páginas 63–70*

Una analogía no-arquimediana de los espacios c-infratonelados

Miguel Caldas Cueva

Universidade Federal Fluminense, BRASIL

Abstract. The purpose of this paper is to develop a non-archimedean version of c-infrabarrelled locally convex spaces which is analogous to that of the classical theory of locally convex spaces over $\mathbb{C}$ or $\mathbb{R}$. The relations with other meaningful non-archimedean classes of locally convex spaces are established. We discuss the permanence properties of these spaces, in special those inherited by subspaces.

Resumen. El propósito de este trabajo es presentar una versión no-arquimediana de los espacios localmente convexos c-infratonelados. Discutimos la relación con otros espacios no-arquimedianos localmente convexos y sus propiedades hereditarias, con especial énfasis en aquellas relacionadas con los subespacios.

Keywords and phrases. Equicontinuity, locally K-convex non-Arquimedian barreled an infrabarreled spaces.

1991 Mathematics Subject Classification Primary 46P05.

1. Introducción

En el presente trabajo analizamos dos nuevas clases de espacios localmente convexos no-arquimedianos, análogas a las introducidas en el caso clásico por J. Mazon [4]. Para estas nuevas clases se estudian en especial las propiedades hereditarias.

Adoptaremos la notación y terminología de [1], [3] y [8]. En especial, $(K, |\cdot|)$ denotará un cuerpo K dotado de una valuación no aquimediana $|\cdot|$ y (E, τ)

será un espacio vectorial no-aquimediano E sobre K dotado de una topología τ localmente K-convexa y de Hausdorff.

Como en [8], si A es un subconjunto de E, la pseudo-polar A^P (resp. la pseudo-bipolar A^{PP}) de A se define como $A^P = \{g \in E' : |g(A)| < 1\}$ (resp. $A^{PP} = \{x \in E : |A^P(x)| < 1\}$). Tenemos entonces que $A = A^{PP}$ si y solamente si A es K-convexo y cerrado ([8], Proposition 2).

Para las nociones y los hechos básicos sobre los espacios localmente K-convexos referimos al lector a [7] y [8] en la bibliografía.

Definición 1.1. *Se dice que un espacio localmente K convexo (E, τ) sobre K es c-K-infratonelado (abreviadamente, c-KIT), si para toda sucesión $(A_n)_{n\geq 1}$ de subconjuntos equicontinuos de E' que converge fuertemente a cero (esto es, tal que para toda vecindad W de cero en E'_β existe $n_\circ \in \mathbb{N}$ tal que $A_n \subset W$ para todo $n \geq n_\circ$) se tiene que su reunión es equicontinua.*

Definición 1.2. *Un espacio localmente K-convexo (E, τ) sobre K es c-K tonelado (abreviadamente, c-KT), si para toda sucesión $(A_n)_{n\geq 1}$ de subconjuntos equicontinuos de E' que converge debilmente a cero, su reunión es equicontinua.*

Observación 1.1. *Es claro de las definiciones que un espacio c-K-tonelado es c-K-infratonelado.*

Para ubicar estas nuevas clases dentro del contexto, recordamos las siguientes nociones introducidas en [1]:

(i) E es enumerablemente K-tonelado (*d-KT*) (respectivamente, enumerablemente K-infratonelado (*d-KIT*), si todo subconjunto $\sigma(E', E)$-acotado (respectivamente, $\beta(E', E)$-acotado) de E', el cual sea unión enumerable de subconjuntos equicontinuos de E', es equicontinuo.

(ii) E es secuencialmente K-tonelado (*s-KT*) (respectivamente, secuencialmente K-infratonelado (*s-KIT*)), si toda sucesión $\sigma(E', E)$-convergente (respectivamente, $\beta(E', E)$-convergente) en E' es equicontinua.

Las siguientes relaciones de dependencia se verifican fácilmente:

$$\begin{array}{ccccccc}
KT & \longrightarrow & d\text{-}KT & \longrightarrow & c\text{-}KT & \longrightarrow & s\text{-}KT \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
KIT & \longrightarrow & d\text{-}KIT & \longrightarrow & c\text{-}KIT & \longrightarrow & s\text{-}KIT
\end{array}$$

Observación 1.2. *Es bien conocido (teorema de Banach-Mackey no-arquimediano) que si E es un espacio de Hausdorff K-convexo y casi-completo, todo subconjunto de su dual E', el cual sea $\sigma(E', E)$-acotado, es también $\beta(E', E)$-acotado. La siguiente proposición (parte (i)) establece la misma propiedad para un espacio s-K-tonelado E.*

Proposición 1.1. *Para un espacio s-K-tonelado E son válidas las siguientes afirmaciones:*

(i) *Todo subconjunto $\sigma(E', E)$-acotado de E' es $\beta(E', E)$-acotado.*
(ii) *E es c-K-tonelado si y sólo si es c-K-infratonelado.*
(iii) *E es d-K-tonelado si y sólo si es d-K-infratonelado.*
(iv) *E es K-tonelado si y sólo si es K-infratonelado.*

Demostración. (i) (Veáse [2], Proposition 1.5). Sea B un subconjunto $\sigma(E', E)$-acotado de E' y supongamos que B no es fuertemente acotado. Fijemos $\mu \in K$ con $|\mu| > 1$. Entonces la sucesión escalar $\lambda_n = \mu^n (n \in \mathbb{N})$ es tal que $|\lambda_\circ| < |\lambda_1| < \cdots < |\lambda_n| < \cdots$ y $\lim |\lambda_n| = +\infty$. Como B no es fuertemente acotada en E', existe un subconjunto debilmente acotado $A \subset E$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos encontrar $x_n \in A, y_n \in B$ con $|\langle x_n, y_n \rangle| > |\lambda_n|^2$. Consideremos ahora la sucesión $z_n = y_n/\lambda_n, n \in \mathbb{N}$, en E'. Como $(z_n : n \in \mathbb{N})$ converge a cero en E'_σ y E es s-KT, tal sucesión es equicontinua. Por lo tanto, $(z_n : n \in \mathbb{N})$ es fuertemente acotada. Como, por otro lado, $|\langle x_n, z_n \rangle| > |\lambda_n|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo cual es una contradición, esto completa la demostración de (i).

Las demostraciones de las otras afirmaciones resultan fácilmente de (i). ☑

Como todo espacio c-K-tonelado es s-K-tonelado, y todo espacio metrizable localmente K-convexo es K-bornológico (ver [7]), de lo cual, K- infratonelado, tenemos que:

Lema 1.1. *Todo espacio metrizable (y, en particular, K bornológico) que sea c-K-tonelado es necesariamente K-tonelado.*

Definición 1.3. *Una sucesión $(U_n)_{n \geq 1}$ de subconjuntos de un espacio $(E; \tau)$ es casi-bornívora, si para todo subconjunto acotado B de (E, τ) existe $n_\circ \in \mathbb{N}$ tal que $B \subset U_n$ para todo $n \geq n_\circ$.*

El siguiente teorema da una caracterización intrínseca de los espacios c-K-infratonelados.

Teorema 1.1. *Sea $(E; \tau)$ un espacio localmente K-convexo. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

(i) *$(E; \tau)$ es c-K-infratonelado.*
(ii) *La intersección de una sucesión casi-bornívora $(U_n)_{n \geq 1}$ de vecindades K-convexas de cero en (E, τ) es una vecindad de cero.*

Demostración. (i) $\Rightarrow$ (ii). Sea $(U_n)_{n \geq 1}$ una sucesión que verifica las hipotesis de (ii). Como $(U_n)_{n \geq 1}$ es casi-bornívora, dada una vecindad K-convexa y cerrada W de cero en E'_β se tiene, puesto que W^P es $\beta(E', E)$-acotado, que existe $n_\circ \in \mathbb{N}$ tal que $W^P \subset \bigcap_{n \geq n_\circ} U_n$. Entonces

$$W = W^{PP} \supset \left(\bigcap_{n \geq n_\circ} U_n \right)^P \supset \bigcup_{n \geq n_\circ} U_n^P,$$

y si $A_n = U_n^P$, $(A_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de conjuntos equicontinuos la cual converge fuertemente a cero. Pero entonces, por hipotesis, $\bigcup_{n\geq 1} A_n$ es equicontinuo. Por lo tanto, $\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right)^P = \bigcap_{n\geq 1} A_n^P = \bigcap_{n\geq 1} U_n$ es una vecindad de cero en $(E;\tau)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Supongamos que $(A_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de subconjuntos equicontinuos de E' que converge fuertemente a cero. Demostremos que $\bigcup_{n\geq 1} A_n$ es equicontinuo. Para cada $n \geq 1$, sea $U_n = A_n^P$. Como $(A_n)_{n\geq 1}$ converge fuertemente a cero, para toda vecindad W de cero en E'_β existe $n_\circ \in \mathbb{N}$ tal que $A_n \subset W$ para todo $n \geq n_\circ$. Por consiguiente, si B es un subconjunto acotado en E, B^P es una vecindad del cero en E'_β, asi que existe $n_\circ \in \mathbb{N}$ tal que $A_n \subset B^P$, o, lo que es lo mismo, $B \subset B^{PP} \subset A_n^P = U_n$, para todo $n \geq n_\circ$. Se deduce que $(U_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión casi-bornívora de vecindades K-convexas de cero en E. Pero entonces, por hipótesis, $\bigcap_{n\geq 1} U_n$ es una vecindad de cero en $(E;\tau)$, y como $\bigcap_{n\geq 1} U_n = \bigcap_{n\geq 1} A_n^P = \left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right)^P$, entonces $\bigcup_{n\geq 1} A_n$ es equicontinua. ☑

2. Propiedades hereditarias

Proposición 2.1. *Sean $(E;\tau_E)$ y $(F;\tau_F)$ espacios localmente K-convexos y f una aplicación lineal continua, casi-abierta y sobreyectiva de E en F. Si $(E;\tau_E)$ es c-K-infratonelado (resp. c-K-tonelado) entonces (F,τ_F) es c-K-infratonelado (resp. c-K-tonelado).*

Demostración. Sea $(B_n)_{n\geq 1}$ una sucesión fuertemente convergente a cero en F', donde cada $B_n (n \geq 1)$ es equicontinuo, y sea ${}^T f : F' \to E'$ la aplicación transpuesta de f. Entonces ${}^T f$ es $\beta(F',F)$-$\beta(E',E)$ continua. Por lo tanto, $\left({}^T f(B_n)\right)_{n\geq 1}$ converge fuertemente a cero en E', y cada ${}^T f(B_n)$ es equicontinuo. Como E es c-K-infratonelado, también $\bigcup_{n\geq 1}\ {}^T f(B_n)$ es equicontinuo. Como además ${}^T f\left(\bigcup_{n\geq 1} B_n\right) = \bigcup_{n\geq 1}\ {}^T f(B_n)$, el Lemma 2.2.2 de [1] asegura que $\bigcup_{n\geq 1} B_n$ es también equicontinuo. ☑

Proposición 2.2. *Sea $(E;\tau) = \prod_{i\in I}(E_i;\tau_i)$. Entonces $(E;\tau)$ es c-K-infratonelado si y solamente si cada $(E_i;\tau_i)$ es c-K-infratonelado.*

Demostración. Como la i-ésima proyección $P_{r_i} : E \to E_i$ es continua, abierta y sobreyectiva, la Proposición 2.1 asegura que si E es c-K-infratonelado, también cada $(E_i;\tau_i)$ es c-K-infratonelado.

Recíprocamente, si cada $(E_i;\tau_i)$ es c-K-infratonelado y si $(A_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de conjuntos τ-equicontinuos de E' que converge fuertemente a cero, entonces $A = \bigcup_{n\geq 1} A_n$ es $\beta(E',E)$-acotado. Por consiguiente, existe un subconjunto finito $J \subset I$ tal que

$$A \subset \bigoplus_{i \in J} P'_{r_i}(A) = \bigoplus_{i \in J} P'_{r_i}\big(\bigcup_{n \geq 1} A_n\big),$$

donde P'_{r_i} es la i-ésima proyección de $E' = \oplus_{i \in J} E'_i$ sobre E'_i. Como P'_{r_i} es $\beta(E', E)$-$\beta(E'_i, E_i)$ continua, se deduce que $(P'_{r_i}(A_n))_{n \geq 1}$ converge fuertemente a cero en E'_i y que cada $P'_{r_i}(A_n)$ es τ_i-equicontinuo. Entonces $\bigcup_{n \geq 1} P'_{r_i}\ (A_n)$ es equicontinuo, y como $A \subset \oplus_{i \in J} P'_{r_i}\ (A)$, también A es equicontinuo. ☑

Corolario 2.1. *Sean (E, τ) un espacio localmente K-convexo y F un K-subespacio de E. Si τ' es la Topología cociente de E/F y (E, τ) es c-K-infratonelado, entonces $(E/F, \tau')$ es c-K-infratonelado.*

Demostración. Es suficiente observar que la aplicación canónica $\varphi : E \to E/F$ es continua, abierta y sobreyectiva. ☑

Proposición 2.3. *Si L es un K-subespacio denso de un espacio (E, τ_E), y si (L, τ_L), es c-K-infratonelado, también (E, τ_E) es c-K-infratonelado.*

Demostración. Sea $(A_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de subconjuntos τ-equicontinuos de E' que converge fuertemente a cero en E'. Por [1, Remark 2.1.2], si $\psi : E' \to L'$ es la aplicación lineal biyectiva dada por $\psi(f) = f/L$ (la restricción de f a L), entonces $(\psi(A_n))_{n \geq}$ converge fuertemente a cero en F', y cada $\psi(A_n)(n \geq 1)$ es equicontinuo. Como (L, τ_L) es c-K-infratonelado, $\bigcup_{n \geq 1} \psi(A_n) = \psi\big(\bigcup_{n \geq 1} A_n\big)$ es equicontinuo. Aplicando nuevamente [1], Remark 2.1.2, concluimos que $\bigcup_{n \geq 1} A_n$ es equicontinuo, lo cual demuestra la proposición. ☑

La Proposición 2.3 puede demostrarse también mediante la caracterización de las sucesiones casi-bornívoras dada en el Teorema 1.1.

Corolario 2.2. *Sean (E, τ_E) un espacio localmente K-convexo, L un K-subespacio denso en E y F un K-subespacio en E el cual contiene a L. Si (L, τ_L) es c-K-infratonelado, también (F, τ_F) lo es.*

Demostración. Es suficiente observar que L es denso en F. ☑

Corolario 2.3. *Sean (E, τ_E) un espacio localmente K-convexo, $(\hat{E}, \hat{\tau})$ su completado y F un K-subespacio de $\hat{E}$ el cual contiene a E. Si (E, τ_E) es c-K-infratonelado, también (F, τ_F) es c-K-infratonelado.*

Demostración. Consecuencia inmediata del Corolario 2.2. ☑

Corolario 2.4. *El completado de un espacio c-K-infratonelado es un espacio c-K-infratonelado.*

Proposición 2.4. *Sea $(E_i)_{i\in I}$ una familia de espacios c-K-infratonelados y para cada $i \in I$ sea f_i una aplicación de E_i en un espacio vectorial E. Sea τ la topología final localmente K-convexa sobre E para el sistema $(E_i, f_i)_{i\in I}$. Entonces (E, τ) es un espacio c-K-infratonelado.*

Demostración. Sea $(V_n)_{n\geq 1}$ una sucesión casi-bornívora de vencindades K-convexas de cero en (E,τ). Sea $V = \bigcap_{n\geq 1} V_n$. Para cada $i \in I$, $(f_i^{-1}(V_n))_{n\geq 1}$ es una sucesión casi-bornívora en E_i. En efecto, si B es acotado en (E_i, τ_i) entonces $f_i(B)$ es acotado en (E,τ). Por lo tanto, existe $n_\circ \in \mathbb{N}$ tal que $f_i(B) \subset V_n$ para todo $n \geq n_\circ$. Entonces $B \subset f_i^{-1} f_i(B) \subset f_i^{-1}(V_n)$ para todo $n \geq n_\circ$. Como consequencia, $f_i^{-1}(V) = \bigcap_{n\geq 1} f_i^{-1}(V_n)$ es una vecindad de cero en (E_i, τ_i). Concluimos entonces que V es una vecindad de cero en (E,τ). ☑

Corolario 2.5. *El limite inductivo y la suma directa de espacios c-K-infratonelados son espacios c-K-infratonelados.*

Proposición 2.5. *El espacio $(E,\tau) = \oplus_{i\in I}(E_i, \tau_i)$ es c-K-infratonelado si y sólo si cada (E_i, τ_i) es c-K-infratonelado.*

Demostración. Que la condición es suficiente es consecuencia del Corolario 2.5. Veamos que es necesaria. Sea $(A_n^i)_{n\geq 1}$ una sucesión de conjuntos τ_i-equicontinuos que converge fuertemente a cero en $(E_i', \beta(E_i', E_i))$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea A_n el conjunto de las familias $(f_j)_{j\in I}$ en $E' = \prod_{j\in I} E_j'$ tales que $f_j = 0$ si $j \neq i$ y $f_i \in A_n^i$. Evidentemente cada A_n es τ-equicontinuo. Como además la topología fuerte del producto es la topología producto de las topologías fuertes, $(A_n)_{n\geq 1}$ converge fuertemente a cero en $(E', \beta(E', E))$. Por lo tanto $\bigcup_{n\geq 1} A_n$ es τ-equicontinuo, de lo cual $\bigcup_{n\geq 1} A_n^i$ es τ_i-equicontinuo. ☑

Observación 2.1. *Todos los resultados de carácter hereditario obtenidos hasta ahora son igualmente válidos para los espacios c-K-tonelados.*

Daremos finalmente condiciones para que ciertos espacios de aplicaciones continuas sean c-K-infratonelados.

Supondremos en lo que sigue que X es un espacio ultraregular, esto es, un espacio topológico separado en el cual cada punto tiene un sistema fundamental de vecindades a la vez abiertas y cerradas. Con $C(X, K)$ denotaremos el espacio de las aplicaciones continuas de X en el cuerpo K. Supondremos siempre que $C(X, K)$ está dotado de la topología compacto-abierta. Más generalmente, si (E, τ_E) es un espacio localmente K-convexo, $C(X, E)$ será el espacio de las aplicaciones continuas de X en E, también dotado de la topología compacto-abierta.

Observación 2.2. *Un espacio topológico en el cual todo punto admite un sistema fundamental de vecindades a la vez abiertas y cerradas es lo que se conoce como un espacio 0-dimensional. Es fácil ver que un espacio es ultraregular si y sólo si es T_1 y 0-dimensional.*

Definición 2.1. *Un espacio topológico X es W-compacto si toda reunión enumerable de subconjuntos compactos de X es relativamente compacta.*

Proposición 2.6.

(i) *Si K es esféricamente completo, $C(X,K)$ puede identificarse con un K-subespacio cerrado complementado de $C(X,E)$.*

(ii) *E puede identificarse con un K-subespacio cerrado complementado de $C(X,E)$.*

Demostración. Véase [6], pag. 14. ☑

La Proposición 2.6 muestra que si K es esféricamente completo entonces $C(X,K)$ y E son K-subespacios cerrados complementados de $C(X,E)$ y por lo tanto existen espacios cocientes de $C(X,E)$ isomorfos a $C(X,K)$ y E. Como según el Corolario 2.1 la propiedad de ser c-K-tonelado (resp. c-K-infratonelado) se conserva bajo la formación de cocientes separados, podemos enunciar la siguiente proposición.

Proposición 2.7. *Si K es un cuerpo esféricamente completo y si $C(X,E)$ es c-K-tonelado (resp. c-K-infratonelado), entonces $C(X,K)$ y E son c-K-tonelados (resp. c-K-infratonelados).*

Teorema 2.1. *Sean X un espacio W-compacto ultraregular y (E_n,τ_n) una sucesión creciente de espacios localmente K-convexos. Si se tiene que $(E,\tau) = \varinjlim(E_n,\tau_n)$, entonces el limite inductivo $\varinjlim C(X,E_n)$ es un K-subespacio denso de $C(X,E)$.*

Demostración. Véase [6]. ☑

Corolario 2.6. *Sean X un espacio W-compacto ultraregular y E el límite inductivo de una sucesión creciente $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de espacios normados no-arquimedianos. Entonces $C(X,E)$ es un espacio c-K-infratonelado.*

Demostración. Por el Teorema 2.1, el límite inductivo de los espacios $C(X,E_n)$ es un K-subespacio topológico denso en $C(X,E)$. Como E_n es normado no-arquimediano, el espacio $C(X,E_n)$ es c-K-infratonelado ([4], Teorema 4.8). Del Corolario 2.5 y la Proposición 2.3 se deduce entonces que $C(X,E)$ es c-K-infratonelado. ☑

Agradecimiento. El autor está muy agradecido con el referee por sus observaciones al presente trabajo.

Referencias

[1] M. Caldas, *Stability of barrelledness and infrabarrelledness in locally K-convex spaces*, Bull. Cal. Math. Soc. **84** (1992), 97–102.

[2] M. Caldas, *Some classes of non-Archimedean locally convex spaces*, Indian J. Pure Appl. Math. **24** (1993), 587–593.

[3] M. Caldas and C. M. Vinagre, *Sequences in non-Archimedean locally convex spaces*, Indian J. Pure Appl. Math. **25** (1994), 955–962.

[4] J. Mazon, *Tres Nuevas Clases de Espacios Localmente Convexos*, Tesis Doctoral (1980), Valencia, España.

[5] A. F. Monna, *Espaces vectoriels topologiques sur un corps valué*, Proc. Kon. Ned. Akad. Van Wetensch A **65** (1962), 351–367.

[6] S. Navarro, *Espaços Vetoriais Topológicos de Funções Contínuas*, Tesis Doctoral (1981), Campinas, Brasil.

[7] J. Van Tiel, *Espaces localement K-convexes*, Proc. Kon. Ned. Akad. Van Wetensch A **68** (1965), 249–289.

[8] J. Van Tiel, *Esembles pseudo-polaires dans les espaces localement K-convexes*, Proc. Kon. Akad. Van Wetensch A **69** (1966), 369–373.

(Recibido en junio de 1995; revisado en diciembre de 1997)

Departamento de Matemática Aplicada, IMUFF
Universidade Federal Fluminense
Rua São Paulo s/n°, Campus do Valoguinho
24020-005, Niterói, RJ, BRASIL
e-mail: caldas@nitnet.com.br
gmamccs@vm.uff.br