Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen 34 (2000), páginas 35–47

Sobrevivencia en un sistema Lotka–Volterra bidimensional

Dan Solano

Universidad Centro Occidental Lizandro Alvarado, Barquisimeto Venezuela

Abstract. A Lotka–Volterra system of integro–differential equations with constant coefficients and infinite delay is considered and asymptotic stability of the equilibrium point with both components are positive is investigated.

Keywords and phrases. Positive, bounded, attractor, logistic equation, asymptotic Stability

1991 Mathematics Subject Classification. Primary 34D05.

Resumen. Un sistema de ecuaciones integro–diferenciales Lotka–Volterra con coeficientes constantes y retardo infinito es considerado y estabilidad asintótica de el punto de equilibrio con ambas constantes positivas es investigada.

1. Introducción

El objetivo principal de este trabajo consiste en analizar un sistema de ecuaciones integro–diferenciales, las cuales modelan dos especies en competencia por un suministro limitado de alimentos tomando en consideración la interrelación de estas en el pasado.

El sistema a considerarse es:

$$\begin{cases} u'(t) = u(t)[a - bu(t) - c\displaystyle\int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)v(s)\,ds] \\ v'(t) = v(t)[d - e\displaystyle\int_{-\infty}^{t} k_2(t-s)u(s)\,ds - fv(t)],\ t \geq 0 \\ u(t) = \phi(t),\ v(t) = \psi(t),\ t \leq 0 \end{cases} \tag{1}$$

donde a, b, c, d, e, f son constantes positivas que satisfacen las siguientes desigualdades

$$\frac{\bar{k}_2 e}{b} < \frac{d}{a} < \frac{f}{c\bar{k}_1} \tag{2}$$

y los núcleos k_1, k_2 con $k_i \colon [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$; $i = 1,2$ son continuos y satisfacen $\bar{k}_i = \int_0^\infty k_i(s)ds < \infty$; $\int_0^\infty sk_i(s)ds < \infty$ para $i = 1,2$; aquí $\phi(s), \psi(s)$ son las historias de los tamaños de las poblaciones en el pasado. Estas funciones pertenecen al conjunto

$$\begin{aligned} FA = \{g \colon (-\infty,0] \longrightarrow \mathbb{R},\ &\text{continuas, no negativas,} \\ &\sup_{s\in(-\infty,0]} g(s) < \infty; g(0) > 0\} \end{aligned}$$

y son llamadas funciones iniciales. Como es costumbre, por abuso del lenguaje, hablaremos de $\phi(s)$ y $\psi(s)$ con $s \in (-\infty, 0]$ como las condiciones iniciales en el pasado.

Nosotros denotaremos por $col(u(t,\phi,\psi), v(t,\phi,\psi))$ a la solución del sistema (1) donde

$$u(t,\phi,\psi) = \begin{cases} \phi(t), & t \in (-\infty,0] \\ u(t), & t \in [0,\infty) \end{cases}; \qquad v(t,\phi,\psi) = \begin{cases} \psi(t), & t \in (-\infty,0] \\ v(t), & t \in [0,\infty) \end{cases}$$

También notamos $g_L = \inf\{g(t) \colon t \in \mathbb{R}\}$ y $g_M = \sup\{g(t) \colon t \in \mathbb{R}\}$.

Este sistema representa un sistema competitivo entre dos especies con recursos limitados teniendo en cuenta la interrelación de estas en el pasado. Las constantes a, b, c, d, e, f tienen la siguiente interpretación: a y d representan la razón de crecimiento de las especies u y v respectivamente, b y f representan la medida del efecto inhibidor que el desarrollo de cada especie tienen sobre su propia tasa de crecimiento; c y e representan la medida del efecto inhibidor que cada especie tiene sobre la otra. Las integrales representan el efecto inhibidor hereditario o acumulado en el pasado que el tamaño de una especia ha tenido sobre la otra especie.

La primera ecuación del sistema (1) la podemos escribir

$$\begin{aligned} u'(t) &= u(t)\left[a - bu(t) - c\int_{-\infty}^0 k_1(t-s)v(s)ds - c\int_0^t k_1(t-s)v(s)ds\right] \\ &= u(t)\left[a - bu(t) - H_1(t) - c\int_0^t k_1(t-s)v(s)ds\right] \\ &t \in [0,\infty), \end{aligned}$$

donde $H_1(t) = c\int_{-\infty}^0 k_1(t-s)v(s)ds$ con $t \geq 0$ es continua y está bien definida ya que si $z = t - s$ tendremos

$$\int_{-\infty}^0 k_1(t-s)ds = -\int_\infty^t k_1(z)dz = \int_t^\infty k_1(z)dz \leq \int_0^\infty k_1(z)dz = \bar{k}_1;$$

entonces

$$H_1(t) = c\int_{-\infty}^{0} k_1(t-s)v(s)ds = c\int_{-\infty}^{0} k_1(t-s)\psi(s)ds$$
$$\leq c\psi_M \int_{-\infty}^{0} k_1(t-s)ds \leq c\psi_M \bar{k}_1.$$

En forma análoga, la segunda ecuación de (1) la podemos escribir como

$$v'(t) = v(t)[d - H_2(t) - e\int_{0}^{t} k_2(t-s)u(s)ds - fv(t)]$$

con

$$H_2(t) = e\int_{-\infty}^{0} k_2(t-s)u(s)ds = e\int_{-\infty}^{0} k_2(t-s)\phi(s)ds \leq e\phi_M \bar{k}_2.$$

De lo anterior deducimos que podemos usar los teoremas de existencia, unicidad, continuación de soluciones y continuidad respecto a parámetros para el sistema (1) de ecuaciones integro–diferenciales en $[0,t]$ con t positivo. Ver Driver [2] y Kuang [3]. En la referencia [2] se puede ver el teorema de existencia y unicidad para el sistema (1) a través de la condición inicial (ϕ,ψ). Las soluciones son prolongables hasta $t = +\infty$, si estas permanecen acotadas, como lo demostraremos en el Lema 2. Por lo tanto siempre supondremos que las soluciones están definidas en $\mathbb{R}$.

Los puntos de equilibrio de (1) se obtienen cuando

$$u'(t) = u(t)[a - bu(t) - c\int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)v(s)ds] = 0,$$
$$v'(t) = v(t)[d - e\int_{-\infty}^{t} k_2(t-s)u(s)ds - fv(t)] = 0.$$

Entonces u y v son constantes en $[0,\infty)$ y deben satisfacer el sistema algebraico

$$\begin{cases} u[a - bu - c\int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)vds] = 0, \\ v[d - e\int_{-\infty}^{t} k_2(t-s)uds - fv] = 0. \end{cases}$$

Si en $\int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)ds$ hacemos $z = t-s$ entonces

$$\int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)ds = -\int_{\infty}^{0} k_1(z)dz = \int_{0}^{\infty} k_1(z)dz = \bar{k}_1.$$

Análogamente

$$\int_{-\infty}^{t} k_2(t-s)ds = \bar{k}_2,$$

por tanto, cuando u y v son constantes podemos escribir el sistema algebraico como

$$\begin{aligned} u[a - bu - c\bar{k}_1 v] &= 0,\\ v[d - e\bar{k}_2 u - fv] &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Resolviendo simultáneamente el sistema algebraico (3) obtenemos los puntos de equilibrio $(0,0)$, $(0,d/f)$, $(a/b,0)$ y cuando $u \neq 0 \neq v$ y el determinante Δ del sistema al cancelar u y v es diferente de cero obtenemos otro punto crítico

$$(\alpha,\beta) = \left(\frac{af - dc\bar{k}_1}{\Delta}, \frac{bd - ae\bar{k}_2}{\Delta}\right)$$

donde $\Delta = bf - ce\bar{k}_1\bar{k}_2$.

Nosotros estudiaremos el punto crítico (α,β) y veremos que si se satisface la cadena de desigualdades (2) entonces (α,β) es un atractor global.

2. Lemas preliminares

Lema 1. *Si $col(u(t,\phi,\psi), v(t,\phi,\psi))$ es solución de (1) con ϕ, $\psi \in FA$. Entonces $u(t,\phi,\psi) \geq 0$ y $v(t,\phi,\psi) \geq 0$ para todo $t \in [0,\infty)$.*

Demostración. Sea $col(u(t,\phi,\psi), v(t,\phi,\psi))$ solución de (1) y consideremos la solución $col(u_\varepsilon(t,\phi,\psi), v_\varepsilon(t,\phi,\psi))$ del sistema

$$\begin{cases} u'(t) = u(t)[a - bu(t) - c\displaystyle\int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)v(s)ds] + \varepsilon & \\ v'(t) = v(t)[d - e\displaystyle\int_{-\infty}^{t} k_2(t-s)u(s)ds - fv(t)] + \varepsilon, & t \geq 0 \\ u_\varepsilon(t) = \phi(t),\ v_\varepsilon(t) = \psi(t), & t \leq 0 \end{cases}$$

con ε pequeño y positivo. Como $u_\varepsilon(0) = \phi(0) > 0$ y $v_\varepsilon(0) = \psi(0) > 0$, entonces por continuidad existen $t_1 > 0$, $t_2 > 0$ tales que $u_\varepsilon(t) = u_\varepsilon(t,\phi,\psi) > 0$ en $[0,t_1]$ y $v_\varepsilon(t) = v_\varepsilon(t,\phi,\psi) > 0$ en $[0,t_2]$. Si tomamos $t^* = \min\{t_1,t_2\}$ entonces se cumplen las dos desigualdades anteriores en $[0,t^*]$. Si la afirmación del lema es falsa debe existir un primer tiempo $\bar{t} > t^*$ tal que $u_\varepsilon(t) > 0$ y $v_\varepsilon(t) > 0$ en $[0,\bar{t})$ pero (i) $u_\varepsilon(\bar{t}) = 0$ ó (ii) $v_\varepsilon(\bar{t}) = 0$.
Si ocurre (i), como $u_\varepsilon(t) > 0$ en $[0,\bar{t}\,)$ y $u_\varepsilon(\bar{t}\,) = 0$ entonces

$$u'_\varepsilon(\bar{t}\,) = u'_{\varepsilon_-}(\bar{t}\,) = \lim_{h\to 0^-} \frac{u_\varepsilon(\bar{t}+h) - u_\varepsilon(\bar{t})}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{u_\varepsilon(\bar{t}+h)}{h} \leq 0$$

ya que $u_\varepsilon(\bar{t}+h) > 0$, $h < 0$ y $u_\varepsilon(\bar{t}\,) = 0$, pero

$$u'_\varepsilon(\bar{t}\,) = u_\varepsilon(\bar{t}\,)[a - bu_\varepsilon(\bar{t}\,) - c\int_{-\infty}^{\bar{t}} k_1(\bar{t}-s)v_\varepsilon(s)ds] + \varepsilon = 0 + \varepsilon = \varepsilon > 0;$$

esto es una contradicción luego (i) no puede ocurrir. Si ocurre (ii) en forma análoga llegamos a una contradicción, por lo tanto $u_\varepsilon(t) > 0$ y $v_\varepsilon(t) > 0$, si

$t \geq 0$ y, por el teorema de continuidad respecto a las condiciones iniciales, tendremos $u(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(t) \geq 0$ y $v(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} v_\varepsilon(t) \geq 0$ para $t \in [0, \infty)$. Esto prueba el lema. ☑

Lema 2. *Las soluciones* $col(u(t,\phi,\psi), v(t,\phi,\psi))$ *de (1) son acotadas en* $(-\infty, \infty)$.

Demostración. Sea $col(x(t),\, y(t))$ solución del sistema logístico

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t)[a - bx(t)], \\ y'(t) &= y(t)[d - fy(t)], \qquad t > 0 \\ x(0) &= \phi(0),\ y(0) = \psi(0). \end{aligned}$$

Tenemos entonces que

$$\left.\begin{aligned} u'(t) &= u(t)[a - bu(t) - c\int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)v(s)ds] \leq u(t)[a - bu(t)] \\ v'(t) &= v(t)[d - fv(t) - e\int_{-\infty}^{t} k_2(t-s)u(s)ds] \leq v(t)[d - fv(t)] \end{aligned}\right., \ t \in [0, \infty);$$

entonces $u'(t) \leq x'(t)$ y $v'(t) \leq y'(t)$ para $t \geq 0$. Integrando en $[0, t]$ tendremos

$$\begin{aligned} u(t) - \phi(0) &= \int_0^t u'(s)ds \leq \int_0^t x'(s)ds = x(t) - \phi(0), \\ v(t) - \psi(0) &= \int_0^t v'(s)ds \leq \int_0^t y'(s)ds = y(t) - \psi(0). \end{aligned}$$

Entonces $u(t) \leq x(t)$ y $v(t) \leq y(t)$ para $t \in [0, \infty)$ y como las soluciones de la logística son acotadas en $[0, \infty)$ (ver Braun [4]), entonces por comparación las soluciones $col(u(t,\phi,\psi), v(t,\phi,\psi))$ de (1) son acotadas en $[0, \infty)$. ☑

Nota: Como $\phi, \psi \in FA$ y $u(t,\phi,\psi)$, $v(t,\phi,\psi)$ son acotadas en $[0, \infty)$ entonces $u(t,\phi,\psi)$ y $v(t,\phi,\psi)$ son acotadas en $\mathbb{R}$.

Lema 3. *Si* $a/b < d/(e\bar{k}_2)$ *y* $d/f < a/(c\bar{k}_1)$ *entonces el punto de equilibrio* (α, β) *pertenece al cono positivo de* $\mathbb{R}^2$.

Demostración. Como $a/b < d/(e\bar{k}_2)$ y $d/f < a/(c\bar{k}_1)$ entonces $bd - ae\bar{k}_2 > 0$ y $af - cd\bar{k}_1 > 0$, $d/f < a/(c\bar{k}_1)$ implica $d < (af)/(c\bar{k}_1)$, por tanto tendremos

$$\frac{a}{b} < \frac{d}{e\bar{k}_2}, \text{ de donde } \frac{a}{b} < \frac{af}{c\bar{k}_1}\frac{1}{e\bar{k}_2};\ bf - ce\bar{k}_1\bar{k}_2 = \Delta > 0,$$

por tanto,

$$\alpha = \frac{af - dc\bar{k}_1}{\Delta} > 0, \quad \beta = \frac{bd - ae\bar{k}_2}{\Delta} > 0,$$

luego la solución (α, β) del sistema algebraico (3) pertenece al cono positivo de $\mathbb{R}^2$ y por tanto es una solución factible en un problema ecológico. ☑

El siguiente teorema lo utilizaremos en la demostración del Lema 4.

Teorema 1 (Perron–Frobenius)**.** *Si $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ con $a_{ij} > 0$; $1 \leq i, j \leq n$, entonces*

[(i)]

1. *$\gamma(A) > 0$ donde $\gamma(A) = \max\{|\lambda| \colon \lambda$ es un valor propio de $A\}$.*
2. *$\gamma(A)$ es un valor propio de A.*
3. *Existe un $x \in \mathbb{R}^n$ con $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x_i > 0$, $i = 1, \dots, n$ y $Ax = \gamma(A)x$.*

Ver prueba en [6, pag. 307].

Lema 4. *Dado el sistema*

$$\begin{aligned} a - bx - c\bar{k}_1 y = 0 \\ d - e\bar{k}_2 x - fy = 0 \end{aligned} \qquad \text{ó} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

donde $a_{11} = b$; $a_{12} = c\bar{k}_1$; $a_{21} = e\bar{k}_2$; $a_{22} = f$; $b_1 = a$; $b_2 = d$. Todos estos coeficientes son positivos, por hipótesis.
Si

$$b_1 > a_{12}\frac{b_2}{a_{22}} \quad \text{ó} \quad a > c\bar{k}_1 \frac{d}{f} = \frac{dc\bar{k}_1}{f}$$

$$b_2 > a_{21}\frac{b_1}{a_{11}} \quad \text{ó} \quad d > \frac{ae\bar{k}_2}{b}$$

entonces, existen λ_1, λ_2 y m números positivos tales que

$$\begin{cases} \lambda_1 a_{11} \geq m + \lambda_2 a_{21} \\ \lambda_2 a_{22} \geq m + \lambda_1 a_{12} \end{cases} \qquad \text{ó} \qquad \begin{cases} -\lambda_1 b + \lambda_2 e\bar{k}_2 \leq -m \\ -\lambda_2 f + \lambda_1 c\bar{k}_1 \leq -m \end{cases} \tag{4}$$

Demostración. Para $1 \leq i, j \leq 2$ definamos la matriz $(m_{ij})_{2\times 2}$ con

$$m_{ij} = \begin{cases} \dfrac{a_{ij}}{a_{ii}} & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases} \text{ y } \gamma_j = \frac{b_j}{a_{jj}}.$$

Tendremos entonces:

$$m_{11} = m_{22} = 0$$

$$m_{12} = \frac{a_{12}}{a_{11}} = \frac{c\bar{k}_1}{b};\ m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{22}} = \frac{e\bar{k}_2}{f};$$

$$\gamma_1 = \frac{b_1}{a_{11}} = \frac{a}{b};\ \gamma_2 = \frac{b_2}{a_{22}} = \frac{d}{f}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{2} m_{1j}\gamma_j &= m_{11}\gamma_1 + m_{12}\gamma_2 = 0 + \frac{c\bar{k}_1}{b}\frac{d}{f} \\ &= \frac{1}{b}\left(\frac{cd\bar{k}_1}{f}\right) < \frac{1}{b}a = \frac{a}{b} = \gamma_1, \end{aligned}$$

ya que $(c\bar{k}_1 d)/f < a$ y

$$\sum_{j=1}^{2} m_{2j}\gamma_j = m_{21}\gamma_1 = \frac{e\bar{k}_2}{f}\frac{a}{b} = \frac{1}{f}\left(\frac{e\bar{k}_2 a}{b}\right) < \frac{1}{f}d = \frac{d}{f} = \gamma_2,$$

ya que $(e\bar{k}_2 a)/b < d$.

Consideremos la función $g(x) = (a/b) - (d/f)x$, la cual es decreciente y continua con

$$\begin{aligned} g\left(\frac{c\bar{k}_1}{b}\right) &= \frac{a}{b} - \frac{c\bar{k}_1}{b}\frac{d}{f} = \frac{1}{b}\left(\frac{af - c\bar{k}_1 d}{f}\right) > 0 \text{ por } (2) \\ g\left(\frac{af}{db}\right) &= \frac{a}{b} - \frac{d}{f}\frac{af}{db} = 0. \end{aligned}$$

Entonces dado $\varepsilon_1 > 0$ con $g((af)/(bd)) < \varepsilon_1 < g((c\bar{k}_1)/b)$, por el teorema del valor intermedio para funciones continuas y ser g decreciente, existe p_{12} con $(c\bar{k}_1)/b < p_{12} < (af)/(bd)$ tal que $g(p_{12}) = (a/b) - p_{12}(d/f) = \varepsilon_1$. Sea $p_{11} > 0$ tal que $\varepsilon_1 > p_{11}(a/b)$; entonces

$$\frac{a}{b} - p_{12}\frac{d}{f} = \varepsilon_1 > p_{11}\frac{a}{b} \text{ ó } p_{11}\frac{a}{b} + p_{12}\frac{d}{f} < \frac{a}{b} \tag{5}$$

y por lo tanto

$$p_{11}\gamma_1 + p_{12}\gamma_2 < \gamma_1.$$

Consideremos $h(x) = (d/f) - (a/b)x$. Esta h es continua y decreciente con

$$\begin{aligned} h\left(\frac{e\bar{k}_2}{f}\right) &= \frac{d}{f} - \frac{e\bar{k}_2}{f}\frac{a}{b} = \frac{1}{f}\left(\frac{bd - ae\bar{k}_2}{b}\right) > 0 \text{ por } (2) \\ h\left(\frac{bd}{af}\right) &= \frac{d}{f} - \frac{bd}{af}\frac{a}{b} = 0. \end{aligned}$$

Entonces por el teorema del valor intermedio para funciones continuas y ser h decreciente, con un razonamiento análogo al anterior tendremos que dado $\varepsilon_2 > 0$ con $0 = h(bd/af) < \varepsilon_2 < h(e\bar{k}_2)/f$, existen p_{21} y p_{22} tales que $(e\bar{k}_2)/f < p_{21} < (bd)(af)$ y $p_{22} > 0$ con $\varepsilon_2 > p_{22}(d/f)$. En consecuencia:

$$\begin{aligned} \frac{d}{f} - p_{21}\frac{a}{b} = \varepsilon_2 > p_{22}\frac{d}{f} \text{ ó } p_{21}\frac{a}{b} + p_{22}\frac{d}{f} &< \frac{d}{f} \text{ ó} \\ p_{21}\gamma_1 + p_{22}\gamma_2 &< \gamma_2. \end{aligned} \tag{6}$$

Tomando $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ podemos garantizar que se cumplen (5) y (6).
Consideremos la matriz

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix};$$

su transpuesta

$$P^t = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$$

es estrictamente positiva ya que $p_{ij} > m_{ij} \geq 0$. En virtud del teorema de Perron–Frobenius existen un vector propio $(z_1, z_2)^t$ con z_1, z_2 positivos y $\lambda = \gamma(P^t)$ positivo tales que

$$\begin{gathered}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda z_1 \\ \lambda z_2 \end{bmatrix} \\ \begin{cases} p_{11}z_1 + p_{21}z_2 = \lambda z_1 = \sum_{i=1}^{2} p_{i1}z_i \\ p_{12}z_1 + p_{22}z_2 = \lambda z_2 = \sum_{i=1}^{2} p_{i2}z_i. \end{cases}\end{gathered} \tag{7}$$

Tenemos que

$$\lambda \sum_{j=1}^{2} \gamma_j z_j = \sum_{j=1}^{2} \gamma_j (\lambda z_j) = \sum_{j=1}^{2} \gamma_j \left(\sum_{i=1}^{2} p_{ij} z_i \right) = \sum_{i=1}^{2} \left(\sum_{j=1}^{2} p_{ij} \gamma_j \right) z_i < \sum_{i=1}^{2} \gamma_i z_i$$

ya que $\sum_{j=1}^{2} p_{ij}\gamma_j < \gamma_i$ por (5) y (6), la desigualdad anterior implica $\lambda < 1$ y de (7) deducimos $\sum_{i=1}^{2} p_{ij}z_i < z_j$, $j = 1, 2$. Entonces $\sum_{i=1}^{2} m_{ij}z_i < z_j$; $j = 1, 2$ ya que $m_{ij} < p_{ij}$, luego

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} z_i = \sum_{i=1}^{2} a_{ij} \frac{z_i}{a_{ii}} < z_j;\ j = 1, 2$$

Si hacemos $\lambda_j = z_j / a_{jj}$ tendremos

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{2} a_{ij}\lambda_j < \lambda_j a_{jj};\ j = 1, 2.$$

Escojamos $m > 0$ tal que $\lambda_j a_{jj} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{2} \lambda_j a_{jj} > m$; $j = 1, 2$, de donde

$$\begin{cases} \lambda_1 a_{11} > m + \lambda_2 a_{21} \\ \lambda_2 a_{22} > m + \lambda_1 a_{12} \end{cases} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} -\lambda_1 b + \lambda_2 e\bar{k}_2 < -m \\ -\lambda_2 f + \lambda_1 c\bar{k}_1 < -m. \end{cases}$$ ☑

Lema 5. *Si $g(t)$ es una función diferenciable satisfaciendo $g(t) > 0$, $|g'(t)| \leq M$ para $t \geq t_0$ y $\int_{t_0}^{\infty} g(t)dt < \infty$, $t_0 \in \mathbb{R}$, entonces $\lim_{t\to\infty} g(t) = 0$.*

Demostración. Tenemos que

$$\int_{t_0}^{\infty} |2g'(t)g(t)|dt \leq 2M \int_{t_0}^{\infty} g(t)dt < \infty,$$

entonces $\int_{t_0}^{\infty} 2g(t)g'(t)dt$ converge, teorema 14-5, Apostol [5, pag. 412]. Por otra parte,

$$\int_{t_0}^{\infty} 2g(t)g'(t)dt = \int_{t_0}^{\infty} \frac{d}{dt}[g(t)]^2 dt = \lim_{t\to\infty} [g^2(t) - g^2(t_0)] < \infty$$

implica $\lim_{t\to\infty} g^2(t) < \infty$ y en consecuencia $\lim_{t\to\infty} g(t) < \infty$. Como $g(t) \geq 0$ para $t \geq t_0$, entonces $\lim_{t\to\infty} g(t) \geq 0$. Supongamos que $\lim_{t\to\infty} g(t) = \alpha > 0$. Por tanto dado $\varepsilon > 0$, con $0 < \varepsilon < \alpha$, existe $\bar{M} \in \mathbb{R}$ con $\bar{M} \geq t_0$ tal que si $t \geq \bar{M}$ entonces $|g(t) - \alpha| < \varepsilon$, lo cual implica

$$\int_{t_0}^{\infty} g(t)dt \geq \int_{\bar{M}}^{\infty} g(t)dt \geq \int_{\bar{M}}^{\infty} (\alpha - \varepsilon)dt = (\alpha - \varepsilon)\lim_{t\to\infty}(t - \bar{M}) = \infty;$$

esto contradice que $g(t)$ es integrable en $[t_0, \infty)$, por tanto debemos tener $\lim_{t\to\infty} g(t) = 0$, esto prueba el lema. ☑

Lema 6. *Sea col$(u(t,\phi,\psi), v(t,\phi,\psi))$ solución de (1) con $\phi, \psi \in FA$. Definamos las funciones*

$$h_1(t) = \int_0^{\infty}\int_{t-\sigma}^{t} k_1(\sigma)|v(s,\phi,\psi) - \beta| ds\, d\sigma,$$

$$h_2(t) = \int_0^{\infty}\int_{t-\sigma}^{t} k_2(\sigma)|u(s,\phi,\psi) - \alpha| ds\, d\sigma$$

con $t \in [0,\infty)$. Entonces están bien definidas, con

$$h_1'(t) = -\int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)|v(s,\phi,\psi) - \beta| ds + \bar{k}_1|v(t) - \beta|,$$

$$h_2'(t) = -\int_{-\infty}^{t} k_2(t-s)|u(s,\phi,\psi) - \alpha| ds + \bar{k}_2|u(t) - \alpha|.$$

Demostración. h_1 está bien definida porque

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\int_{t-\sigma}^{t} k_1(\sigma)|v(s,\phi,\psi) - \beta| ds\, d\sigma &\leq \int_0^{\infty} k_1(\sigma)\int_{t-\sigma}^{t}\sup_{s\in\mathbb{R}}|v(s,\phi,\psi) - \beta| ds\, d\sigma\\ &= \int_0^{\infty}\sup_{s\in\mathbb{R}}|v(s,\phi,\psi) - \beta| k_1(\sigma)\, s\Big|_{t-\sigma}^{t} d\sigma\\ &= \sup_{s\in\mathbb{R}}|v(s,\phi,\psi) - \beta|\int_0^{\infty}\sigma k_1(\sigma)d\sigma < \infty;\end{aligned}$$

la última desigualdad es debida a que $\sigma k_1(\sigma) \in L^1[0,\infty)$ y la nota después del Lema 2. Para obtener la derivabilidad de h_1 usaremos el teorema 14-23 de [5] con $h_1(t) = \int_0^{\infty} f(\sigma,t)dt$, donde

$$f(\sigma,t) = \int_{t-\sigma}^{t} k_1(\sigma)|v(s) - \beta| ds.$$

Veamos que $\int_0^{\infty} D_2 f(\sigma,t)d\sigma$ converge uniformemente en $(0,\infty)$. En efecto, por el teorema fundamental del Cálculo

$$D_2 f(\sigma,t) = k_1(\sigma)|v(t) - \beta| - k_1(\sigma)|v(t-\sigma) - \beta|,$$

por lo tanto

$$\int_0^\infty |D_2 f(\sigma,t)|d\sigma = \int_0^\infty |[k_1(\sigma)|v(t)-\beta| - k_1(\sigma)|v(t-\sigma)-\beta|]|d\sigma$$

$$\leq \int_0^\infty |v(t)-\beta|k_1(\sigma)d\sigma + \int_0^\infty |v(t-\sigma)-\beta|k_1(\sigma)d\sigma$$

luego lo tanto

$$\int_0^\infty |D_2 f(\sigma,t)|d\sigma \leq 2\int_0^\infty Mk_1(\sigma)d\sigma < \infty$$

con $M = \sup_{s\in\mathbb{R}} |v(s)-\beta|$. Por el criterio M de Weirstrass [5, Teorema 14-19] se tiene que la integral $\int_0^\infty D_2 f(\sigma,t)d\sigma$ converge uniformemente en $[0,\infty)$ así que podemos aplicar el Teorema 14-23 de [5] para obtener

$$\begin{aligned} h_1'(t) =& \int_0^\infty D_2 f(\sigma,t)d\sigma \\ =& \int_0^\infty k_1(\sigma)(|v(t)-\beta| - |v(t-\sigma)-\beta|)d\sigma \\ =& |v(t)-\beta|\int_0^\infty k_1(\sigma)d\sigma - \int_0^\infty k_1(\sigma)|v(t-\sigma)-\beta|d\sigma \\ =& |v(t)-\beta|\bar{k}_1 - \int_{-\infty}^t k_1(t-s)|v(s)-\beta|ds, \end{aligned}$$

haciendo $s = t-\sigma$ en la última integral. En forma análoga se prueba que

$$h_2'(t) = |u(t)-\alpha|\bar{k}_2 - \int_{-\infty}^t k_2(t-s)|u(s)-\alpha|ds$$

Esto prueba el lema. ☑

3. Comportamiento asintótico del sistema (1)

Teorema 2. *El punto de equilibrio* (α,β) *es un atractor global para el sistema (1).*

Demostración. Sea $col(u(t,\phi,\psi), v(t,\phi,\psi))$ solución de (1) con $\phi,\psi \in FA$, denotemos $u(t) = u(t,\phi,\psi)$ y $v(t) = v(t,\phi,\psi)$. Consideremos la función

$$\begin{aligned} w(t) =& w(t,u(t),v(t)) \\ =& \lambda_1 \left|\ln\frac{u(t)}{\alpha}\right| + \lambda_2\left|\ln\frac{v(t)}{\beta}\right| + \lambda_1 c h_1(t) + \lambda_2 e h_2(t) \text{ para } t\in[0,\infty). \end{aligned}$$

Claramente $w(t)$ es positiva y está bien definida en $[0,\infty)$. También es diferenciable pues cada sumando lo es.

Hallemos la derivada de $w(t)$. Por los lemas 5 y 6 y el hecho de que (α, β) es solución de (1) con $\phi(t) = \alpha$ y $\psi(t) = \beta$ tendremos

$$\begin{aligned}
w'(t) =& \lambda_1 \frac{u'(t)}{u(t)} \operatorname{sgn}(u(t) - \alpha) - \lambda_1 c \int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)|v(s) - \beta| ds \\
& + \lambda_1 c \bar{k}_1 |v(t) - \beta| + \lambda_2 \frac{v'(t)}{v(t)} \operatorname{sgn}(v(t) - \beta) \\
& - \lambda_2 e \int_{-\infty}^{t} k_2(t-s)|u(s) - \alpha| ds + \lambda_2 e \bar{k}_2 |u(t) - \alpha|.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w'(t) =& \lambda_1 \left[\frac{u'(t)}{u(t)} - \frac{\alpha'}{\alpha} \right] \operatorname{sgn}(u(t) - \alpha) + \lambda_2 \left[\frac{v'(t)}{v(t)} - \frac{\beta'}{\beta} \right] \operatorname{sgn}(v(t) - \beta) \\
& + \lambda_1 \bar{k}_1 c |v(t) - \beta| - \lambda_1 c \int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)|v(s) - \beta| ds + \lambda_2 \bar{k}_2 e |u(t) - \alpha| \\
& - \lambda_2 e \int_{-\infty}^{t} k_2(t-s)|u(s) - \alpha| ds.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w'(t) =& \lambda_1 \big[(a - bu(t) - c \int_{-\infty}^{t} k_1(t-s) v(s) ds) \\
& \qquad - (a - b\alpha - c \int_{-\infty}^{t} k_1(t-s) \beta ds) \operatorname{sgn}(u(t) - \alpha) \big] \\
& + \lambda_1 \bar{k}_1 c |v(t) - \beta| - \lambda_1 c \int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)|v(s) - \beta| ds \\
& + \lambda_2 [(d - e \int_{-\infty}^{t} k_2(t-s) u(s) ds - f v(t)) \\
& \qquad - (d - e \int_{-\infty}^{t} k_2(t-s) \alpha ds - f\beta)] \operatorname{sgn}(v(t) - \beta) \\
& + \lambda_2 \bar{k}_2 e |u(t) - \alpha| - \lambda_2 e \int_{-\infty}^{t} k_2(t-s)|u(s) - \alpha| ds.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w'(t) =& - \lambda_1 b (u(t) - \alpha) \operatorname{sgn}(u(t) - \alpha) \\
& \qquad - \lambda_1 c \int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)(v(s) - \beta) \operatorname{sgn}(u(t) - \alpha) ds \\
& + \lambda_1 \bar{k}_1 c |v(t) - \beta| - \lambda_1 c \int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)|v(S) - \beta| ds \\
& - \lambda_2 f (v(t) - \beta) \operatorname{sgn}(v(t) - \beta) \\
& \qquad - \lambda_2 e \int_{-\infty}^{t} k_2(t-s)(u(s) - \alpha) \operatorname{sgn}(v(t) - \beta) ds \\
& - \lambda_2 e \int_{-\infty}^{t} k_2(t-s)|u(s) - \alpha| ds + \lambda_2 \bar{k}_2 e |u(t) - \alpha|.
\end{aligned}$$

en virtud de que $h\,\mathrm{sgn}\,(h) = |h|$, tenemos:

$$\begin{aligned}
w'(t) =& -\lambda_1 b|u(t)-\alpha| - \lambda_2 f|v(t)-\beta| \\
&-\lambda_1 c\int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)[(v(s)-\beta)\,\mathrm{sgn}\,(u(t)-\alpha) + |v(s)-\beta|]ds \\
&-\lambda_2 e\int_{-\infty}^{t} k_2(t-s)[(u(s)-\alpha)\,\mathrm{sgn}\,(v(t)-\beta) + |u(s)-\alpha|]ds \\
&+\lambda_1\bar{k}_1 c|v(t)-\beta| + \lambda_2\bar{k}_2 e|u(t)-\alpha|.
\end{aligned}$$

Probemos que $w(t)$ es decreciente y $w'(t) \le -m(|u(t)-\alpha|+|v(t)-\beta|)$ en $[0,\infty)$

$$\begin{aligned}
w'(t) =&(-\lambda_1 b + \lambda_2\bar{k}_2 e)|u(t)-\alpha| + (-\lambda_2 f + \lambda_1\bar{k}_1 c)|v(t)-\beta| \\
&-\lambda_1 c\int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)[(v(s)-\beta)\,\mathrm{sgn}\,(u(t)-\alpha) + |v(s)-\beta|]ds \\
&-\lambda_2 e\int_{-\infty}^{t} k_2(t-s)[(u(s)-\alpha)\,\mathrm{sgn}\,(v(t)-\beta) + |u(s)-\alpha|]ds \\
\le&(-\lambda_1 b + \lambda_2\bar{k}_2 e)|u(t)-\alpha| + (-\lambda_2 f + \lambda_1\bar{k}_1 c)|v(t)-\beta|
\end{aligned}$$

ya que $\mathrm{sgn}\,(v(t)-\beta) = 1$ ó -1 y $\pm(u(s)-\alpha) + |u(s)-\alpha|) \ge 0$, análogamente se tiene $(\pm(v(s)-\beta) + |v(s)-\beta|) \ge 0$. En virtud del Lema 4 se tiene:

$$\begin{aligned}
w'(t) \le& -m|u(t)-\alpha| - m|v(t)-\beta| \\
=& -m(|u(t)-\alpha| + |v(t)-\beta|) \le 0
\end{aligned}$$

esto prueba que $w(t)$ es decreciente en $[0,\infty)$. Por lo tanto acotada en $[0,\infty)$. A continuación veremos que el punto de equilibrio (α,β) es un atractor global. Sea $col(u(t,\phi,\psi), v(t,\phi,\psi))$ una solución de (1), veamos que $u(t)$ tiende a α y $v(t)$ tiende a β cuando t tiende a infinito.
Tenemos que $w'(t) \le -m(|u(t)-\alpha| + |v(t)-\beta|)$. Entonces

$$|u(t)-\alpha| + |v(t)-\beta| \le \frac{1}{m}(-w'(t)).$$

Integrando en $[0,t]$ tendremos

$$\int_0^t (|u(s)-\alpha| + |v(s)-\beta|)ds \le \frac{1}{m}\int_0^t -w'(s)ds = \frac{1}{m}(w(0)-w(t)) \le M$$

para $t \in [0,\infty)$; ya que $w(t)$ es acotada, esto implica que

$$\int_0^\infty (|u(s)-\alpha| + |v(s)-\beta|)ds \le M < \infty,$$

entonces $g(t) = |u(t)-\alpha| + |v(t)-\beta|$ con $t \in [0,\infty)$ es integrable, acotada ya que $u(t)$ y $v(t)$ lo son y como de (1) se deduce que sus derivadas (las de $u(t)$ y $v(t)$) son acotadas por serlo $u(t)$, $v(t)$ y $\int_{-\infty}^t k_i(t-s)ds = \bar{k}_i < \infty$, para $i = 1,2$ entonces el lema 5 implica que $\lim_{t\to\infty} g(t) = 0$ y de aquí se deduce que

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = \alpha \text{ y } \lim_{t\to\infty} v(t) = \beta.$$

Por tanto (α, β) es un atractor global. Esto prueba el teorema. ☑

Referencias

[1] Sahir Ahmad, *Convergence and Ultimate Bounds of Solutions of the Nonautonomous Volterra–Lotka Competition Equations*, J. Math. Anal. Appl. **127** (1987), 377–387.

[2] R. D. Driver, *Existence and Stability of Solutions of a Delay–Differential system*, Arch. Rat. Mech. Anal. **10** (1962), 401–426.

[3] Yang Kuang, *Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics*, Academic Press.

[4] M. Braun, *Differential Equations and their Applications*, Springer Verlag 2nd Edition, 1978.

[5] Tom M. Apostol, *Análisis Matemático*, 1a. Edición. Editorial Reverté, 1960.

[6] Richard Bellman, *Introducción al Análisis Matricial*, Editorial Reverté. 1960.

(Recibido en julio de 2000)

Departamento de Matemáticas
Universidad Centro Occidental Lisandro Alvarado
Universidad Nacional Abierta
Barquisimeto, Venezuela