Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen 34 (2000), páginas 19–24

Sobre un teorema de Fröberg y los grafos saturados

Mario E. Estrada*
Universidad de Antioquia, Medellín, COLOMBIA

Abstract. Saturated Cohen-Macaulay (=CM) Rings are studied and the theorem of Fröberg characterizing the CM simplicial complexes having a 2-linear resolution is proved, using results of R. H. Villarreal on CM graphs.

Keywords and phrases. Cohen-Macaulay Rings, simplicial complex, Stanley-Reisner Rings, pure resolutions.

1991 Mathematics Subject Classification. Primary: 15H10. Secondary 13F20, 13D40, 05C80.

Resumen. Se estudian los Anillos de Cohen-Macaulay (=CM) Saturados y se prueba el Teorema de Fröberg que caracteriza los complejos simpliciales CM con una resolución 2-lineal usando resultados sobre grafos CM de R. H. Villarreal.

1. Introducción

Sea G un grafo con $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ como conjunto de vértices y $R = k[X_1, \dots, X_n]$ el anillo de polinomios en n-variables sobre un campo k y donde identificamos el vértice v_i con la variable X_i, $i = 1, \dots n$. El ideal de aristas de G, $I(G)$ es el ideal de R generado por los monomios $X_i X_j$ siempre que los vértices v_i, v_j sean adyacentes en G. El anillo $R/I(G)$ se denomina el anillo de aristas o líneas ("edge algebra") de G. Se dice que el grafo G es Cohen-Macaulay (se escribe C-M) si $R/I(G)$ es un anillo de Cohen-Macaulay.

*Parcialmente apoyado por ICTP, TRIESTE y CIEN, Facultad de Ciencias Exactas, Universidad de Antioquia.

Es conocido que si q representa el número de aristas de G y $g = ht(I(G))$ la altura de $I(G)$, entonces si G es C-M, $q \leq g(g+1)/2$; este hecho motiva la definición: Un grafo G de C-M es *saturado* si $q = g(g+1)/2$. La importancia de los grafos saturados puede atribuirse al hecho de que un grafo es saturado si y solo si $R/I(G)$ admite una 2-resolución lineal ([R-V]). El objetivo de este trabajo es presentar la demostración de un teorema de Fröberg [Fr] usando las técnicas que utiliza R. H. Villarreal [V] al estudiar los grafos C-M. En su artículo Fröberg se apoya fuertemente en el concepto de anillo cara (face ring) o anillo de Stanley-Reisner asociado a un complejo simplicial. Recordemos que un complejo simplicial Δ sobre un conjunto $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de vértices es una colección de subconjuntos de V que satisface las siguientes condiciones:

(1) $F \subset G,\ G \in \Delta \Longrightarrow F \in \Delta$.
(2) $\{v_i\} \in \Delta,\ i = 1, \ldots, n$.

Cada elemento F de Δ se denomina cara de Δ y se define $\dim(F) = \#F - 1$ y $\dim(\Delta) = \max\limits_{F\in\Delta}(\dim(F))$. Aquí $\#F$ es el cardinal de F como conjunto.

Definición 1.1. *Sea Δ un complejo simplicial finito sobre el conjunto de vértices $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Dado un campo k el anillo cara o de Stanley-Reisner de Δ, $k[\Delta]$, es $k[X_1, \ldots, X_n]/I_\Delta$, donde*

$$I_\Delta = \langle (X_{i_1}, \ldots, X_{i_k})\,;\ i_1 < i_2 < \cdots < i_r, \{X_{i_1}, \ldots, X_{i_k}\} \notin \Delta \rangle\,.$$

Si Δ es de dimensión d, para todo r, $1 \leq r \leq d$, el r-esqueleto de Δ es $\Delta_r = \{F \in \Delta : \dim F \leq r\}$. Así, dado un complejo simplicial Δ su 1-esqueleto $G(\Delta)$ es un grafo. Recíprocamente, dado un grafo G se le asocia un complejo simplicial del modo siguiente.

Definición 1.2. *El complejo simplicial complementario $\Delta(G)$ de un grafo G viene dado por:*

$$\Delta(G) = \{A \subset V(G) : A \textit{ es un conjunto independiente de vértices en } G\}.$$

A es un conjunto independiente de vértices en G si sus vértices no son adyacentes. Nos interesa ([V]) considerar el 1-esqueleto de $\Delta(G)$, que es precisamente el grafo G^c complementario de G respecto al grafo completo de n vértices K_n. Tanto un grafo G como un complejo simplicial Δ se denominan C-M si $R/I(G)$ o R/I_Δ son anillos de C-M, respectivamente. Si dado un complejo simplicial Δ, $G(\Delta)$ denota su 1-esqueleto, se ve que I_Δ está generado por elementos de grado dos si y solo si $\Delta = \Delta(G(\Delta))$ y estos elementos de grado dos corresponden precisamente a las aristas de G^c, el grafo complementario de G, es por ello que $R/I_{\Delta(G)} = R/I(G^c)$ o lo que es lo mismo $\Delta(G)$ es C-M como complejo simplicial si y solo si G^c es C-M como grafo, o sea como "edge algebra". Pero mientras más simple el grafo, más complicado es $\Delta(G)$ y por ello se estudia G directamente. Los grafos saturados han sido caracterizados por Fröberg [Fr] demostrando que cuando I_Δ esté generado por elementos de grado dos, $G = G(\Delta)$ es saturado si y solo si G es un d-árbol.

Definición 1.3. ([Fr]) *Sea Δ un complejo simplicial, entonces*

(1) K_{d+1} *es un d-árbol.*
(2) *Si G es un d-árbol y v es un vértice nuevo que se adjunta a G via un subgrafo K_d de G (o sea $\{v\} \cup K_d$ es completo), entonces $\{v\} \cup G$ es un d-árbol.*

Un 0-árbol es un conjunto de puntos aislados y un 1-árbol es un árbol usual.

Teorema 1.1. ([Fr]) *Sea Δ un complejo simplicial, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) $K[\Delta]$ *es C-M de dimensión $d+1$ y tiene una resolución 2-lineal.*
(2) *El 1-esqueleto $G(\Delta)$ de Δ es un d-árbol y $\Delta = \Delta(G(\Delta))$.*

En la sección 3 daremos otra prueba de este resultado de Fröberg basándonos en los resultados de R. H. Villarreal [V].

2. Preliminares

Antes de citar los resultados de [V] que usaremos en la prueba del teorema de Fröberg, recordemos algunos conceptos propios de la teoría de grafos ([H]). Se dice, dado un grafo $G = (V, E)$ con conjunto de vértices V y de aristas E, que un subconjunto $A \subset V$ de vértices es un cubrimiento minimal (*m.v.c.*) de G si toda arista de G incide en algún vértice de A y si A no contiene un subconjunto con esta propiedad. Se demuestra que en todo grafo C-M todos los cubrimientos minimales tienen el mismo cardinal $\alpha_0(G)$ y que la altura de $I(G)$, $ht(I(G))$, es $\alpha_0(G)$. Un grafo se dice bipartido si $V = V_1 \cup V_2$, donde V_1 y V_2 son dos subconjuntos disjuntos de vértices de G, de modo que toda arista de G une vértices de V_1 con vértices de V_2. La codimensión de un grafo G de n vértices, $\operatorname{Cod}(G)$, se define como $\operatorname{Cod}(G) = n - ht(G)$. El grafo complementario G^c de G es su grafo complementario respecto del grafo completo de n vértices K_n. El grado de un vértice v de G, $\deg(v)$, es el número de aristas de G que inciden en v. Denotaremos por $q = \#E$ el número de aristas de G y $g = ht(I(G))$. Antes de mencionar los resultados de [V] que nos interesa destacar, introducimos una notación que es la misma de [V]. Sea H un grafo con $V(H) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, z, w\}$ como conjunto de vértices. Se supone que z es adyacente a w, que $\deg(w) = 1$ y $\deg(z) \geq 2$. Suponemos también que hemos etiquetado H de modo que $x_1, x_2, \ldots, x_k, w$ sean los vértices adyacentes a z en H. Se define $G = H - \{z, w\}$. Se cumple la siguiente:

Proposición 2.1. (Cor. 4.5 de [V]) *Si G es C-M y $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ es un m.v.c. de G, entonces H es C.M.*

Cuando z no está unido con un punto extremo como el w del caso anterior entonces se considera el grafo H con vértices $V(H) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, z\}$. Si $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ son los vértices de H adyacentes a z en H, se supone $\deg(x_i) \geq$

2 para todo $i = 1, 2, \ldots, k$ y $\deg(z) \geq 2$. Ahora $G = H \setminus \{z\}$ y el resultado de nuestro interés es el siguiente:

Proposición 2.2. (Cor. 4.9 de [V]) *Si G es C-M y $\{x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}\}$ es un m.v.c. de G, entonces H es C.M.*

3. El teorema de Fröberg

Enunciamos ahora nuestro resultado principal, que corresponde al Teorema 2 de [Fr].

Proposición 3.1. *Existe una correspondencia biunívoca entre los grafos saturados G de n vértices y $\mathrm{Cod}(G) = s$, $1 \leq n \leq s-1$ y los $(s-1)-$árboles. Estos son precisamente los complementarios G^c de los grafos saturados G.*

Proof. Obsérvese, primero que como G tiene $g(g+1)/2$ aristas y $g = n - s$, G^c tendrá $q^c = \frac{1}{2}n(n-1) - q$, o sea $q^c = (s-1)\,n - s\,(s-1)/2$ aristas. Recordemos también [V] que un grafo $G = \bigcup_{i=1}^{t} G_i$ con componentes conexas G_i, $i = 1, \ldots, t$ es C-M si y solo si cada G_i es C-M y que es saturado si y solo si a lo sumo una de las componentes conexas tiene mas de un vértice y es saturado. Es fácil percatarse que los casos extremos $s = 1$ y $s = n-1$ corresponden, respectívamente a $G = K_n$, o sea G^c es un $0-$árbol consistente de n puntos aislados y a $g = 1$, $q = 1$ o sea $G = K_2 \cup \{(n-2) \text{ vértices aislados}\}$. Probemos primeramente que si G es saturado entonces G^c es un $(s-1)-$árbol. Como $\mathrm{Cod}(G) = s$ y G es C-M todos los *m.v.c.* en G tienen $g = n - s$ vértices y el resto de los vértices de G constituyen, en cada caso, conjuntos independientes de s vértices cada uno y por tanto forman un K_s en G^c. Más aun, cada vértice de G pertenece al menos a uno de tales conjuntos independientes, es decir pertenecen a algún K_s en G^c. Por tanto al construir G^c, cada vez que adjuntamos un vértice lo unimos con otros $(s-1)$ de modo que formen un nuevo K_s tal como la expresión $q^c = (s-1)\,n - s\,(s-1)/2$ sugiere, la cual también garantiza la conexidad, hasta alcanzar n vértices y construir el $(s-1)$-árbol. Recíprocamente, supongamos que G^c es un $(s-1)$-árbol con n vértices. G^c tendrá $q^c = (s-1)\,n - s\,(s-1)/2$ aristas y como $(G^c)^c = G$, G tiene exactamente $q = \frac{n(n-1)}{2} - q^c = (n-s)(n-s+1)/2$ aristas. Por ello para probar que G es saturado basta con comprobar que:

i) $ht\,(G) = n - s$.
ii) G es C-M.

Para demostrar i) usaremos inducción en el número de vértices. Recuérdese que si $z \in V(G^c)$ y denotamos $G' = G^c \setminus \{z\}$ se tiene $(G')^c = (G^c \setminus \{z\})^c = G - \{z\}$, considerando ahora a z como vértice de G. Tomemos un vértice $z \in V(G^c)$ de $\deg(z) = s-1$ en G^c, o sea unido con $(s-1)$ vértices de G^c de modo que juntos conformen un K_s. Entonces $G' = G^c \setminus \{z\}$ tiene un vértice y $(s-1)$ aristas menos que G^c y es también un $(s-1)$-árbol. Por la hipótesis de inducción $(G')^c = G - \{z\}$ es saturado y de codimensión s. Como $ht\,(G-\{z\}) = ht\,(G) - 1$, se tiene $\mathrm{Cod}\,(G) = s$, lo que prueba i).

Para probar ii), o sea que G es C-M, basta comprobar haciendo uso de las Proposiciones (2.1) ó (2.2), según el caso, que si $\{y_1, \ldots, y_k\}$ son los vértices adyacentes a z en G, entonces $\{y_1, \ldots, y_{k-1}\}$ constituye un *m.v.c.* de $G \setminus \{z\}$. Para ello tomemos a z tal que $\deg\,(z) = s-1$ en G^c, y sea $\{x_1, x_2, \ldots, x_{s-1}\}$ el conjunto de vértices adyacentes a z en G^c. Su complemento A consiste en $(n-s)$ vértices adyacentes a z en G; más aun, como $\{z, x_1, x_2, \ldots, x_{s-1}\}$ es un K_s en G^c y $\mathrm{Cod}\,(G) = s$, el conjunto A es un *m.v.c.* en G. Si denotamos $A = \{y_1, \ldots, y_{n-s}\}$ se ve que el conjunto $\{y_1, \ldots, y_{n-s-1}\}$, tanto en el caso que y_{n-s} sea un punto extremal o no, constituye un *m.v.c.* de G. ☑

Observemos que durante la demostración anterior también se probó lo siguiente.

Proposición 3.2. *Todo grafo saturado con n vértices y* $\mathrm{Cod}(G) = s$, $1 \leq s \leq n-1$ *puede construirse sobre un grafo saturado de $n-1$ vértices G' y* $\mathrm{Cod}\,(G') = s$*, adjuntando un vértice z a G' y uniéndolo con $(n-s)$ vértices de G', $(n-s-1)$ de los cuales forman un m.v.c. en G'.*

Observación 3.1. G puede construirse incluso a partir del grafo $K_2 \cup \{(s-1) \text{ vértices aislados}\}$.

Corolario 3.1. *Existe una correspondencia biunívoca entre los grafos saturados G de* $\mathrm{Cod}\,(G) = 2$ *y los árboles.*

Veamos ahora la cuestión de la conectividad y los puntos extremos de los grafos saturados. Tal como observamos anteriormente un grafo G es saturado si y solo si a lo sumo una de sus componentes conexas tiene mas de un vértice y esta componente es saturada.

Proposición 3.3. *Sea G un grafo saturado con n vértices,* $\mathrm{Cod}\,(G) = s$ *y* $ht\,(G) = g$.

(i) *Para que G sea conexo es necesario que $g \geq s$, es decir, $n \geq 2s$.*
(ii) *Si G es conexo y $2s \geq n$, es decir, $2s = n$, entonces G tiene puntos extremos.*

Proof. (i) Tal como observamos antes podemos comenzar a construir G a partir de $K_2' := K_2 \cup \{(s-1) \text{ puntos aislados}\}$, que tiene $g = 1$. En cada paso, al añadir un vértice z debemos unirlo con $(n-s)$ vértices de $G' = G \setminus \{z\}$, $(n-s-1)$ de los cuales forman un *m.v.c.* de G' y por tanto no podemos unir z con más de un vértice aislado de G' cada vez, lo que equivale a decir que debemos añadir al menos $(s-1)$ vértices para garantizar la conectividad. Como en cada paso g se incrementa en uno, resulta $g \geq s$.

(ii) Para que G sea conexo de $\mathrm{Cod}\,(G) = s$ y sin puntos extremos debemos añadir a K_2' al menos $(s-1)$ puntos para garantizar la conectividad y al menos uno más para evitar algún punto extremal, lo que resultaría en $n > 2s$. ☑

Observación 3.2. (1) La condición (i) de la proposición anterior es claramente no suficiente. Es fácil encontrar grafos disconexos saturados tales que $2g > n$, o sea $n > 2s$. También un grafo conexo puede tener puntos extremales y cumplir $n > 2s$.

(2) Los grafos bipartidos saturados G de n vértices son aquellos con $ht\,(g) = g = n/2$, $E\,(G) = \{(x_i, y_j) :\ 1 \leq j \leq i \leq g\}$, y $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_g\}$, $V_2 = \{y_1, y_2, ..., y_g\}$, ver [E-V].

(3) Los grafos de suspensión saturados son del tipo $G = S\,(K_n)$. Efectivamente si $G = S\,(G_0)$ es la suspensión de G_0, que tiene n vértices, entonces $ht\,(G) = n$ y como $q = n\,(n+1)\,/2$ por ser G saturado, donde como antes $q = \#E$ es el número de aristas de G, el número de aristas de G_0 será $q_0 = q - n = n\,(n-1)\,/2$, o sea $G = K_n$.

(4) Se sabe [V] que los únicos ciclos C-M son el triángulo, el pentágono y el heptágono. Por tanto el único ciclo saturado es el triángulo.

(5) Sabemos ya que todo grafo completo es saturado.

(6) Los únicos árboles saturados son K_2 y $S\,(K_2)$. Basta recordar (ver [V]) que los únicos árboles C-M son los grafos de suspensión.

Referencias

[B-He] W. Bruns, H. Herzog, *Cohen Macaulay Ring*, Cambridge Univ. Press, 1993.

[Es] M. Estrada, *On Bipartite and Saturated Cohen-Macaulay Graphs*, Reporte de Inv., ICIMAF, Cuba, Septiembre 1996.

[E-V] M. Estrada, R.H. Villarreal, *Cohen-Macaulay Bipartite Graphs*, Arch. Math., **68** (1997), 124–128.

[Fr] R. Fröberg, *On Stanley-Reisner Rings*, Topics in Algebra, Banach Center Publications, vol. 26, part 2, Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1996.

[H] F. Harary, *Graph Theory*, Adison-Wesley, Reading, M.A, 1972.

[R-V] C. Renteria, R. H. Villareal, *Koszul Homology of Cohen-Macaulay Rings With Linear Resolutions*, Proceddings or the A.M.S **115**, No 1, May 1992.

[S-V-V] A Simis, W. V. Vasconcelos, R. H. Villarreal: *On the Ideal Theory of Graphs*, J. of Algebra, **167** (1994), 389–419.

[St] R. Stanley, *Combinatorics and Conmutative Algebra*, Birkhauser, 1993.

[V] R. H. Villarreal, *Cohen-Macaulay Graphs*, Manuscripta Math. **66** (1990), 277–293.

(Recibido en noviembre de 1999; revisado por el autor en octubre de 2000)

Departamento de Matemáticas
Universidad de Antioquia
Medellín, COLOMBIA
e-mail: mestrada@matematicas.udea.edu.co