Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen 44(2010)1, páginas 65-78

Teoremas para funciones de Bessel de dos índices y un parámetro

Theorems for Double-Index One-Parameter Bessel Functions

Greilyn Castillo[1], Leda Galué[2]

[1]Universidad Nacional Experimental Francisco de Miranda, Coro, Venezuela

[2]Universidad del Zulia, Maracaibo, Venezuela

Resumen. Las funciones especiales son de suma importancia para científicos e ingenieros en muchas de sus aplicaciones, siendo las funciones de Bessel de las más utilizadas debido a que surgen en la solución de ecuaciones diferenciales en matemática, física, química, ingeniería y otras ramas de la ciencia y la tecnología; por esta razón diversos autores han estudiado diferentes generalizaciones de las funciones de Bessel. En este trabajo se presentan teoremas de adición, multiplicación y de Graf para la función de Bessel de dos índices y un parámetro ($J_{m,n}(x;\tau)$).

Palabras y frases clave. Funciones de Bessel generalizadas, teorema de adición, teorema de multiplicación, teorema de Graf.

2000 Mathematics Subject Classification. 33C10, 33E20.

Abstract. The special functions are of utmost importance for scientists and engineers, in many of their applications, being Bessel functions of the most used due that they arise in the solution of differential equations from mathematics, physics, chemistry, engineering and other branches of science and technology; for this reason several authors have studied different generalizations of the Bessel functions. In this paper the theorems of addition, multiplication and Graf's, for double index, one parameter Bessel function ($J_{m,n}(x;\tau)$) are established.

Key words and phrases. Generalized Bessel functions, Addition theorem, Multiplication theorem, Graf theorem.

1. Introducción

Las funciones especiales son de suma importancia para científicos e ingenieros en muchas de sus aplicaciones, siendo las funciones de Bessel de las más utilizadas debido a que surgen en la solución de ecuaciones diferenciales en matemática, física, química, ingeniería y otras ramas de la ciencia y la tecnología [1, 2, 3, 12, 14].

Diversos autores, tales como, Dattolli G., Migliorati M. y Srivastava H.M. [4], Galué L. [7, 8], Galué L., Khajah H.G. y Kalla S.L. [9], Pathan M.A., Goyal A.N. y Shahwan M.J.S. [13], Dattoli G., Torre A. y Carpanese M. [5], Dattoli G. y col. [6], Khan S. y col. [10], han estudiado diferentes generalizaciones de las funciones de Bessel, determinando funciones generadoras, ecuaciones diferenciales, teorema de adición, teoremas de multiplicación, teorema de Graf, relaciones de recurrencia, entre otros resultados importantes.

Entre la gran variedad de funciones de Bessel se tiene la función de Bessel generalizada de dos índices y un parámetro $J_{m,n}(x;\tau)$, la cual se define mediante la función generadora [3]

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left[\left(u-\frac{1}{u}\right)+\left(v-\frac{1}{v}\right)+\left(\tau uv-\frac{1}{\tau uv}\right)\right]\right]= \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} u^m v^n J_{m,n}(x;\tau) \quad (1)$$

donde x es una variable real y u, v, τ son parámetros complejos no cero con $|u|, |v|, |\tau| < \infty$.

Además, la función $J_{m,n}(x;\tau)$ puede ser desarrollada en términos de la serie convergente

$$J_{m,n}(x;\tau)=\sum_{h=-\infty}^{+\infty} \tau^h J_{m-h}(x) J_{n-h}(x) J_h(x). \quad (2)$$

Si en (1) se hace $\tau = 1$, se obtiene como caso especial

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left[\left(u-\frac{1}{u}\right)+\left(v-\frac{1}{v}\right)+\left(uv-\frac{1}{uv}\right)\right]\right]= \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} u^m v^n J_{m,n}(x;1) \quad (3)$$

donde $J_{m,n}(x;1) \equiv J_{m,n}(x)$ es una función de Bessel de dos índices.

En este trabajo se presentan el teorema de adición, dos teoremas de multiplicación y el teorema de Graf para la función de Bessel generalizada de dos índices y un parámetro.

2. Teoremas para la función de Bessel de dos índices y un parámetro

2.1. Teorema de adición

Teorema 1. *Sea $J_{m,n}(x;\tau)$ una función de Bessel generalizada de dos índices y un parámetro, entonces*

$$\sum_{p,q=-\infty}^{+\infty} J_{m\mp p,n\mp q}(x;\tau)J_{p,q}(y;\tau^{\pm 1}) = J_{m,n}(x\pm y;\tau) \tag{4}$$

donde x, y son variables reales y τ es un parámetro complejo con $0 < |\tau| < \infty$.

Demostración. De (1), con $x+y$ como variable, se obtiene:

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left[\left(u-\frac{1}{u}\right)+\left(v-\frac{1}{v}\right)+\left(\tau uv-\frac{1}{\tau uv}\right)\right]\right]\times \exp\left[\frac{y}{2}\left[\left(u-\frac{1}{u}\right)+\left(v-\frac{1}{v}\right)+\left(\tau uv-\frac{1}{\tau uv}\right)\right]\right] = \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} u^m v^n J_{m,n}(x+y;\tau).$$

Aplicando nuevamente (1) se tiene

$$\sum_{r,s,p,q=-\infty}^{+\infty} u^{r+p}v^{s+q}J_{r,s}(x;\tau)J_{p,q}(y;\tau) = \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} u^m v^n J_{m,n}(x+y;\tau),$$

haciendo cambios de índices

$$\sum_{m,n,p,q=-\infty}^{+\infty} u^m v^n J_{m-p,n-q}(x;\tau)J_{p,q}(y;\tau) = \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} u^m v^n J_{m,n}(x+y;\tau),$$

e igualando coeficientes

$$\sum_{p,q=-\infty}^{+\infty} J_{m-p,n-q}(x;\tau)J_{p,q}(y;\tau) = J_{m,n}(x+y;\tau). \tag{5}$$

De manera similar, de (1) con $x-y$ como variable

$$\sum_{p,q=-\infty}^{+\infty} J_{m+p,n+q}(x;\tau)J_{p,q}(y;\tau^{-1}) = J_{m,n}(x-y;\tau). \tag{6}$$

Agrupando (5) y (6) se obtiene el teorema de adición (4). ☑

2.2. Teoremas de multiplicación

Para $J_{m,n}(x;\tau)$ se establecieron dos teoremas de multiplicación:

Teorema 2.

$$J_{m,n}(\lambda x,\tau)=\lambda^{-m-n}\sum_{r,s=0}^{+\infty}\frac{(\lambda\tau)^{r+s}}{r!s!}H_{r,s}\left[\frac{x}{\tau}\left(\frac{\lambda^2-1}{\lambda}\right)\right]J_{m-r,n-s}(x;\lambda\tau) \quad (7)$$

donde x es una variable real, $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ y τ es un parámetro complejo con $0<|\tau|<\infty$.

Si $\tau=1$ se tiene como caso particular el resultado dado en [9, p. 146, No. 11].

Demostración. De la siguiente identidad [9, p. 146, No. (13)]

$$\lambda\left[\left(u-\frac{1}{u}\right)+\left(v-\frac{1}{v}\right)+\left(\tau uv-\frac{1}{\tau uv}\right)\right]=$$
$$\left(\frac{u}{\lambda}-\frac{\lambda}{u}\right)+\left(\frac{v}{\lambda}-\frac{\lambda}{v}\right)+\left(\frac{\tau uv}{\lambda}-\frac{\lambda}{\tau uv}\right)+\left(\frac{\lambda^2-1}{\lambda}\right)(u+v+\tau uv)$$

se tiene que

$$\exp\left[\frac{\lambda x}{2}\left[\left(u-\frac{1}{u}\right)+\left(v-\frac{1}{v}\right)+\left(\tau uv-\frac{1}{\tau uv}\right)\right]\right]=$$
$$\exp\left[\frac{x}{2}\left(\frac{u}{\lambda}-\frac{\lambda}{u}\right)\right]\exp\left[\frac{x}{2}\left(\frac{v}{\lambda}-\frac{\lambda}{v}\right)\right]\exp\left[\frac{x}{2}\left(\frac{\tau uv}{\lambda}-\frac{\lambda}{\tau uv}\right)\right]\times$$
$$\exp\left[\frac{x}{2}\left(\frac{\lambda^2-1}{\lambda}\right)(u+v+\tau uv)\right]. \quad (8)$$

Usando la función generadora de $J_n(x)$ [11, p. 103, No. (5.3.4)]

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}t^nJ_n(x) \quad (9)$$

para los primeros tres términos de la ecuación (8) se obtiene

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left(\frac{u}{\lambda}-\frac{\lambda}{u}\right)\right]\exp\left[\frac{x}{2}\left(\frac{v}{\lambda}-\frac{\lambda}{v}\right)\right]\exp\left[\frac{x}{2}\left(\frac{\tau uv}{\lambda}-\frac{\lambda}{\tau uv}\right)\right]=$$
$$\sum_{i,j,q=-\infty}^{+\infty}\frac{u^{i+q}v^{j+q}}{\lambda^{i+j+q}}\tau^qJ_i(x)J_j(x)J_q(x),$$

haciendo cambios de índices y usando (2)

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left(\frac{u}{\lambda}-\frac{\lambda}{u}\right)\right]\exp\left[\frac{x}{2}\left(\frac{v}{\lambda}-\frac{\lambda}{v}\right)\right]\exp\left[\frac{x}{2}\left(\frac{\tau uv}{\lambda}-\frac{\lambda}{\tau uv}\right)\right]= \sum_{h,k=-\infty}^{+\infty}\frac{u^h v^k}{\lambda^{h+k}}J_{h,k}(x;\lambda\tau). \quad (10)$$

Utilizando el desarrollo en serie de la exponencial para el cuarto término de (8)

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left(\frac{\lambda^2-1}{\lambda}\right)\left(u+v+\tau uv\right)\right]=\sum_{h,k,j=0}^{+\infty}\left[\frac{x}{2}\left(\frac{\lambda^2-1}{\lambda}\right)\right]^{h+k+j}\frac{u^{h+j}v^{k+j}\tau^j}{h!k!j!},$$

y haciendo cambio de índices resulta

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left(\frac{\lambda^2-1}{\lambda}\right)\left(u+v+\tau uv\right)\right]= \sum_{r,s=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{\text{mín}(r,s)}\left[\frac{x}{2}\left(\frac{\lambda^2-1}{\lambda}\right)\right]^{r+s-j}\frac{u^r v^s\tau^j}{(r-j)!(s-j)!j!}, \quad (11)$$

esto es,

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left(\frac{\lambda^2-1}{\lambda}\right)(u+v+\tau uv)\right]= \sum_{r,s=0}^{+\infty}\frac{u^r v^s}{r!s!}\sum_{j=0}^{\text{mín}(r,s)}j!\binom{r}{j}\binom{s}{j}\tau^{r+s}\left[\frac{x}{2\tau}\left(\frac{\lambda^2-1}{\lambda}\right)\right]^{r+s-j},$$

y usando la definición de los polinomios tipo Hermite [6]

$$H_{r,s}(x)=\sum_{q=0}^{\text{mín}(r,s)}q!\binom{r}{q}\binom{s}{q}\left(\frac{x}{2}\right)^{r+s-q}$$

se obtiene

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left(\frac{\lambda^2-1}{\lambda}\right)(u+v+\tau uv)\right]=\sum_{r,s=0}^{+\infty}\tau^{r+s}\frac{u^r v^s}{r!s!}H_{r,s}\left[\frac{x}{\tau}\left(\frac{\lambda^2-1}{\lambda}\right)\right]. \quad (12)$$

La sustitución de (10) y (12) en (8) produce

$$\exp\left[\frac{\lambda x}{2}\left[\left(u-\frac{1}{u}\right)+\left(v-\frac{1}{v}\right)+\left(\tau uv-\frac{1}{\tau uv}\right)\right]\right]= \sum_{h,k=-\infty}^{+\infty}\frac{u^h v^k}{\lambda^{h+k}}J_{h,k}(x;\lambda\tau)\sum_{r,s=0}^{+\infty}\frac{u^r v^s}{r!s!}\tau^{r+s}H_{r,s}\left[\frac{x}{\tau}\left(\frac{\lambda^2-1}{\lambda}\right)\right],$$

y luego de algunos cambios de índices

$$\exp\left[\frac{\lambda x}{2}\left[\left(u-\frac{1}{u}\right)+\left(v-\frac{1}{v}\right)+\left(\tau uv-\frac{1}{\tau uv}\right)\right]\right]=$$
$$\sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} u^m v^n \sum_{r,s=0}^{+\infty}\frac{1}{r!s!}H_{r,s}\left[\frac{x}{\tau}\left(\frac{\lambda^2-1}{\lambda}\right)\right]\frac{(\lambda\tau)^{r+s}}{\lambda^{m+n}}J_{m-r,n-s}(x;\lambda\tau).$$

De este resultado y de (1) se concluye (7). ☑

Teorema 3.

$$J_{p,q}(\lambda x,\tau)=\left[\frac{x}{2}\left(\frac{\lambda^2-1}{\lambda}\right)\right]^{p+q}\sum_{m=-\infty}^{p}\sum_{n=-\infty}^{q}\left[\frac{2}{x(\lambda^2-1)}\right]^{m+n}\times$$
$$\frac{1}{\Gamma(p-m+1)\Gamma(q-n+1)}J_{m,n}(x;\lambda^3\tau)\times$$
$${}_0F_2\left[-;p-m+1,q-n+1;\left[\frac{x}{2}\left(\frac{1-\lambda^2}{\lambda}\right)\right]^3\frac{1}{\tau}\right] \quad (13)$$

donde x es una variable real, $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0,1,-1\}$, τ parámetro complejo con $0<|\tau|<\infty$.

Si $\tau=1$ se tiene como caso particular el resultado dado en [9, p. 146, No. (12)].

Demostración. De la identidad [9, p. 148, No. (20)]

$$\lambda\left[\left(u-\frac{1}{u}\right)+\left(v-\frac{1}{v}\right)+\left(\tau uv-\frac{1}{\tau uv}\right)\right]=\left(\frac{u}{\lambda}-\frac{\lambda}{u}\right)+\left(\frac{v}{\lambda}-\frac{\lambda}{v}\right)+$$
$$\left(\lambda\tau uv-\frac{1}{\lambda\tau uv}\right)+\left(\frac{\lambda^2-1}{\lambda}\right)u+\left(\frac{\lambda^2-1}{\lambda}\right)v+\left(\frac{1-\lambda^2}{\lambda}\right)\frac{1}{\tau uv}$$

se obtiene que

$$\exp\left[\frac{\lambda x}{2}\left[\left(u-\frac{1}{u}\right)+\left(v-\frac{1}{v}\right)+\left(\tau uv-\frac{1}{\tau uv}\right)\right]\right]=$$
$$\exp\left[\frac{x}{2}\left[\left(\frac{u}{\lambda}-\frac{\lambda}{u}\right)+\left(\frac{v}{\lambda}-\frac{\lambda}{v}\right)+\lambda\tau uv-\frac{1}{\lambda\tau uv}+\right.\right.$$
$$\left.\left.\left(\frac{\lambda^2-1}{\lambda}\right)u+\left(\frac{\lambda^2-1}{\lambda}\right)v+\left(\frac{1-\lambda^2}{\lambda}\right)\frac{1}{\tau uv}\right]\right]. \quad (14)$$

Usando el desarrollo en serie de las funciones exponenciales

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left(\frac{\lambda^2-1}{\lambda}\right)u\right]\exp\left[\frac{x}{2}\left(\frac{\lambda^2-1}{\lambda}\right)v\right]\exp\left[\frac{x}{2}\left(\frac{1-\lambda^2}{\lambda}\right)\frac{1}{\tau uv}\right]= \sum_{h,j,k=0}^{+\infty}(-1)^k\left[\frac{x}{2}(\frac{\lambda^2-1}{\lambda})\right]^{h+j+k}\frac{u^{h-k}v^{j-k}}{h!j!k!}\tau^{-k},$$

haciendo cambios de índices

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left(\frac{\lambda^2-1}{\lambda}\right)u\right]\exp\left[\frac{x}{2}\left(\frac{\lambda^2-1}{\lambda}\right)v\right]\exp\left[\frac{x}{2}\left(\frac{1-\lambda^2}{\lambda}\right)\frac{1}{\tau uv}\right]= \sum_{r,s=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\left[\frac{x}{2}\left(\frac{\lambda^2-1}{\lambda}\right)\right]^{r+s+3k}\frac{u^r v^s\tau^{-k}}{\Gamma(s+k+1)\Gamma(r+k+1)k!},$$

entonces

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left(\frac{\lambda^2-1}{\lambda}\right)u\right]\exp\left[\frac{x}{2}\left(\frac{\lambda^2-1}{\lambda}\right)v\right]\exp\left[\frac{x}{2}\left(\frac{1-\lambda^2}{\lambda}\right)\frac{1}{\tau uv}\right]= \sum_{r,s=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\left[\frac{x}{2}\left(\frac{\lambda^2-1}{\lambda}\right)\right]^{r+s+3k}\frac{u^r v^s\tau^{-k}}{\Gamma(1+r)\Gamma(1+s)k!(1+r)_k(1+s)_k},$$

donde hemos usando el resultado [11, p. 238]

$$(\lambda)_k=\frac{\Gamma(\lambda+k)}{\Gamma(\lambda)},\qquad k=1,2,\dots$$

Esta expresión puede escribirse en términos de la función hipergeométrica generalizada [11, p. 275 , No. (9.14.2)]

$${}_pF_q[\alpha_r;\gamma_s;z]=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\prod_{r=1}^{p}(\alpha_r)_k}{\prod_{s=1}^{q}(\gamma_s)_k}\frac{z^k}{k!}$$

como

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left(\frac{\lambda^2-1}{\lambda}\right)u\right]\exp\left[\frac{x}{2}\left(\frac{\lambda^2-1}{\lambda}\right)v\right]\exp\left[\frac{x}{2}\left(\frac{1-\lambda^2}{\lambda}\right)\frac{1}{\tau uv}\right]= \sum_{r,s=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{x}{2}\left(\frac{\lambda^2-1}{\lambda}\right)\right]^{r+s}\frac{u^r v^s}{\Gamma(1+r)\Gamma(1+s)} {}_0F_2\left[-;r+1,s+1;\left[\frac{x}{2}\left(\frac{1-\lambda^2}{\lambda}\right)\right]^3\frac{1}{\tau}\right].\quad (15)$$

Aplicando (9) a los tres primeros términos del lado derecho de (14) se tiene

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left[\left(\frac{u}{\lambda}-\frac{\lambda}{u}\right)+\left(\frac{v}{\lambda}-\frac{\lambda}{v}\right)+\left(\lambda\tau uv-\frac{1}{\lambda\tau uv}\right)\right]\right]=\sum_{i,j,l=-\infty}^{+\infty}\tau^l\lambda^{l-i-j}u^{i+l}v^{j+l}J_i(x)J_j(x)J_l(x),$$

y haciendo cambios de índices resulta

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left[\left(\frac{u}{\lambda}-\frac{\lambda}{u}\right)+\left(\frac{v}{\lambda}-\frac{\lambda}{v}\right)+\left(\lambda\tau uv-\frac{1}{\lambda\tau uv}\right)\right]\right]=\sum_{m,n,l=-\infty}^{+\infty}\tau^l\lambda^{3l-m-n}u^m v^n J_{m-l}(x)J_{n-l}(x)J_l(x),$$

el cual según (2) corresponde a

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left[\left(\frac{u}{\lambda}-\frac{\lambda}{u}\right)+\left(\frac{v}{\lambda}-\frac{\lambda}{v}\right)+\left(\lambda\tau uv-\frac{1}{\lambda\tau uv}\right)\right]\right]=\sum_{m,n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{u}{\lambda}\right)^m\left(\frac{v}{\lambda}\right)^n J_{m,n}(x;\lambda^3\tau). \quad (16)$$

La sustitución de (15) y (16) en (14) da como resultado

$$\exp\left[\frac{\lambda x}{2}\left[\left(u-\frac{1}{u}\right)+\left(v-\frac{1}{v}\right)+\left(\tau uv-\frac{1}{\tau uv}\right)\right]\right]=\sum_{r,s=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{x}{2}\left(\frac{\lambda^2-1}{\lambda}\right)\right]^{r+s}\frac{u^r v^s}{\Gamma(r+1)\Gamma(s+1)}\times$$
$${}_0F_2\left[-;r+1,s+1;\left[\frac{x}{2}\left(\frac{1-\lambda^2}{\lambda}\right)\right]^3\frac{1}{\tau}\right]\sum_{m,n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{u}{\lambda}\right)^m\left(\frac{v}{\lambda}\right)^n J_{m,n}(x;\lambda^3\tau).$$

Después de algunos cambios de índices y en virtud de (1), se obtiene

$$\sum_{p,q=-\infty}^{+\infty}u^p v^q J_{p,q}(\lambda x,\tau)=\sum_{p,q=-\infty}^{+\infty}u^p v^q\sum_{m=-\infty}^{p}\sum_{n=-\infty}^{q}\frac{1}{\Gamma(p-m+1)\Gamma(q-n+1)}\times$$
$$\left[\frac{x}{2}\left(\frac{\lambda^2-1}{\lambda}\right)\right]^{p+q-m-n}{}_0F_2\left[-;p-m+1,q-n+1;\left[\frac{x}{2}\left(\frac{1-\lambda^2}{\lambda}\right)\right]^3\frac{1}{\tau}\right]\times\frac{J_{m,n}(x;\lambda^3\tau)}{\lambda^{m+n}}.$$

Finalmente, identificando coeficientes se obtiene el teorema 3 de multiplicación. ☑

Teorema 4 (Teorema de Graf)**.** *Dada la función de Bessel de dos índices y un parámetro* $J_{m,n}(x;\tau)$ *entonces*

$$\left(\frac{x-\frac{y}{\xi}}{x-y\xi}\right)^{\frac{m+n}{2}} J_{m,n}(\omega;\alpha)=\sum_{l,k=-\infty}^{+\infty}\xi^{l+k}J_{m+l,n+k}(x;\tau)J_{l,k}(y;\tau'), \tag{17}$$

donde x, y *son variables reales,* ξ,τ,τ' *son parámetros complejos con* $0<|\xi|,|\tau|,|\tau'|<\infty$,

$$\omega(x,y;\xi)=\sqrt{x^2+y^2-xy\left(\xi+\frac{1}{\xi}\right)} \tag{18}$$

y

$$\alpha(x,y,\tau,\tau',\xi)=\left(x\tau-\frac{y}{\xi^2\tau'}\right)\left(x-\frac{y}{\xi}\right)^{-\frac{3}{2}}\sqrt{(x-y\xi)}, \tag{19}$$

para (ξ,τ,τ') *tales que* $\xi(\xi\tau\tau'-1)+\frac{1}{\xi}\left(\frac{1}{\xi\tau\tau'}-1\right)=0.$

Demostración. Partiendo de la función generadora dada en (1) y considerando el producto de dos funciones $J_{m,n}(x;\tau)$ se obtiene

$$\begin{aligned}\exp\left(\frac{x}{2}\left[\left(u-\frac{1}{u}\right)+\left(v-\frac{1}{v}\right)+\left(\tau uv-\frac{1}{\tau uv}\right)\right]\right)\times\\ \exp\left(\frac{y}{2}\left[\left(s-\frac{1}{s}\right)+\left(z-\frac{1}{z}\right)+\left(\tau' sz-\frac{1}{\tau' sz}\right)\right]\right)=\\ \sum_{h,p=-\infty}^{+\infty}u^hv^pJ_{h,p}(x;\tau)\sum_{l,k=-\infty}^{+\infty}s^lz^kJ_{l,k}(y;\tau').\end{aligned}$$

Haciendo los cambios $s=\frac{\xi}{u}$, $z=\frac{\xi}{v}$ se tiene

$$\begin{aligned}\exp\left(\frac{x}{2}\left[\left(u-\frac{1}{u}\right)+\left(v-\frac{1}{v}\right)+\left(\tau uv-\frac{1}{\tau uv}\right)\right]\right)\times\\ \exp\left(\frac{y}{2}\left[\left(\frac{\xi}{u}-\frac{u}{\xi}\right)+\left(\frac{\xi}{v}-\frac{v}{\xi}\right)+\left(\frac{\tau'\xi^2}{uv}-\frac{uv}{\xi^2\tau'}\right)\right]\right)=\\ \sum_{h,p=-\infty}^{+\infty}u^hv^pJ_{h,p}(x;\tau)\sum_{l,k=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\xi}{u}\right)^l\left(\frac{\xi}{v}\right)^kJ_{l,k}(y;\tau'),\end{aligned}$$

y agrupando, se obtiene

$$\exp\left(\frac{1}{2}\left[\left(xu-\frac{yu}{\xi}\right)-\left(\frac{x}{u}-\frac{y\xi}{u}\right)+\left(xv-\frac{yv}{\xi}\right)-\left(\frac{x}{v}-\frac{y\xi}{v}\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.\left(x\tau uv-\frac{yuv}{\xi^2\tau'}\right)-\left(\frac{x}{\tau uv}-\frac{y\tau'\xi^2}{uv}\right)\right]\right)=$$
$$\sum_{h,p=-\infty}^{+\infty}\sum_{l,k=-\infty}^{+\infty}u^{h-l}v^{p-k}J_{h,p}(x;\tau)\xi^{l+k}J_{l,k}(y;\tau'). \quad (20)$$

Ahora haciendo los siguientes cambios:

$$\left(x-\frac{y}{\xi}\right)u=\omega a, \quad (21)$$

$$\frac{(x-y\xi)}{u}=\frac{\omega}{a}, \quad (22)$$

$$\left(x-\frac{y}{\xi}\right)v=\omega b, \quad (23)$$

$$\frac{(x-y\xi)}{v}=\frac{\omega}{b}, \quad (24)$$

$$\left(x\tau-\frac{y}{\xi^2\tau'}\right)uv=\omega ab\alpha, \quad (25)$$

$$\frac{\left(\frac{x}{\tau}-y\xi^2\tau'\right)}{uv}=\frac{\omega}{ab\alpha} \quad (26)$$

y sustituyendo (21) - (26) en (20) se tiene

$$\exp\left(\frac{1}{2}\left[\omega a-\frac{\omega}{a}+\omega b-\frac{\omega}{b}+\omega ab\alpha-\frac{\omega}{ab\alpha}\right]\right)=$$
$$\sum_{h,p=-\infty}^{+\infty}u^{h-l}v^{p-k}J_{h,p}(x;\tau)\sum_{l,k=-\infty}^{+\infty}\xi^{l+k}J_{l,k}(y;\tau').$$

Factorizando y efectuando cambios de índices, se tiene

$$\exp\left(\frac{\omega}{2}\left[\left(a-\frac{1}{a}\right)+\left(b-\frac{1}{b}\right)+\left(ab\alpha-\frac{1}{ab\alpha}\right)\right]\right)=$$
$$\sum_{m,n=-\infty}^{+\infty}u^m v^n\sum_{l,k=-\infty}^{+\infty}J_{m+l,n+k}(x;\tau)\xi^{l+k}J_{l,k}(y;\tau').$$

Comparando el término de la izquierda de la ecuación anterior con (1), se deduce que

$$\sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} a^m b^n J_{m,n}(\omega;\alpha) = \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} u^m v^n \sum_{l,k=-\infty}^{+\infty} \xi^{l+k} J_{m+l,n+k}(x;\tau) J_{l,k}(y;\tau').$$

Sustituyendo a y b de las ecuaciones (21) y (23), se tiene

$$\sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\left(x-\frac{y}{\xi}\right)u}{\omega}\right)^m \left(\frac{\left(x-\frac{y}{\xi}\right)v}{\omega}\right)^n J_{m,n}(\omega;\alpha) = \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} u^m v^n \sum_{l,k=-\infty}^{+\infty} \xi^{l+k} J_{m+l,n+k}(x;\tau) J_{l,k}(y;\tau'). \quad (27)$$

De (21) y (22) se obtiene (18), esto es,

$$\omega(x,y;\xi) = \sqrt{\left(x-\frac{y}{\xi}\right)(x-y\xi)} = \sqrt{x^2+y^2-xy\left(\xi+\frac{1}{\xi}\right)}.$$

De (21) y (23) tenemos

$$u = \frac{\omega a}{\left(x-\frac{y}{\xi}\right)}, \quad (28)$$

$$v = \frac{\omega b}{\left(x-\frac{y}{\xi}\right)}. \quad (29)$$

Sustituyendo (18), (28) y (29) en (25) se obtiene

$$\alpha = \frac{\left(x\tau - \frac{y}{\xi^2\tau'}\right)\sqrt{\left(x-\frac{y}{\xi}\right)(x-y\xi)}}{\left(x-\frac{y}{\xi}\right)^2},$$

$$\alpha(x,y,\tau,\tau',\xi) = \left(x\tau - \frac{y}{\xi^2\tau'}\right)\left(x-\frac{y}{\xi}\right)^{-\frac{3}{2}}\sqrt{(x-y\xi)},$$

que corresponde a (19).

Análogamente, de (22) y (24)

$$\frac{1}{u} = \frac{\omega}{a(x-y\xi)},$$

$$\frac{1}{v} = \frac{\omega}{b(x-y\xi)}.$$

Sustituyendo estos resultados y (18) en (26) se tiene

$$\alpha(x,y,\tau,\tau',\xi)=\frac{(x-y\xi)\sqrt{\left(x-\frac{y}{\xi}\right)(x-y\xi)}}{\left(x-\frac{y}{\xi}\right)\left(\frac{x}{\tau}-y\xi^2\tau'\right)}. \tag{30}$$

Se requiere que las dos expresiones halladas para α sean iguales, así de (19) y (30) se obtiene la condición

$$\xi+\frac{1}{\xi}=\xi^2\tau\tau'+\frac{1}{\xi^2\tau\tau'},$$

la cual puede escribirse como

$$\xi(\xi\tau\tau'-1)+\frac{1}{\xi}\left(\frac{1}{\xi\tau\tau'}-1\right)=0.$$

Finalmente, de (18) y (27)

$$\sum_{m,n=-\infty}^{+\infty}u^m v^n\left(\frac{x-\frac{y}{\xi}}{x-y\xi}\right)^{\frac{m+n}{2}}J_{m,n}(\omega;\alpha)=$$
$$\sum_{m,n=-\infty}^{+\infty}u^m v^n\sum_{l,k=-\infty}^{+\infty}\xi^{l+k}J_{m+l,n+k}(x;\tau)J_{l,k}(y;\tau'),$$

y al igualar los coeficientes de las sumatorias se obtiene el teorema de Graf dado en (17). ☑

Referencias

[1] G. Dattoli, C. Chiccoli, S. Lorenzutta, G. Maino, M. Richetta, and A. Torre, *Advances on the Theory of Generalized Bessel Function and Applications to Multiphoton Processes*, Journal of Scientific Computing **8** (1993), no. 1, 69–109.

[2] G. Dattoli, C. Chiccoli, S. Lorenzutta, G. Maino, and A. Torre, *Generalized Bessel Functions of the Anger Type and Applications to Physical Problems*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **184** (1994), no. 2, 201–221.

[3] G. Dattoli, S. Lorenzutta, G. Maino, A. Torre, G. Voykov, and C. Chiccoli, *Theory of Two-Index Bessel Functions and Applications to Physical Problems*, Journal of Mathematics and Physics **35** (1994), 3636–3649.

[4] G. Dattoli, M. Migliorati, and H. M. Srivastava, *Bessel Summation Formulae and Operational Methods*, Journal of Computational and Applied Mathematics **173** (2005), no. 1, 149–154.

[5] G. Dattoli, A. Torre, and M. Carpanese, *The Hermite – Bessel Functions: A New Point of View on the Theory of the Generalized Bessel Functions*, Radiation Physics and Chemistry **51** (1998), no. 3, 221–228.

[6] G. Dattoli, A. Torre, S. Lorenzutta, and G. Maino, *Generalized Forms of Bessel Functions and Hermite Polynomials*, Annals of Numerical Mathematics **2** (1995), 211–232.

[7] L. Galué, *Evaluation of Some Integrals Involving Generalized Bessel Functions*, Integral Transforms and Special Functions **12** (2001), no. 3, 251–256.

[8] ______, *A Generalized Bessel Function*, Integral Transforms and Special Functions **14** (2003), no. 5, 395–401.

[9] L. Galué, H. G. Khajah, and S. L. Kalla, *Multiplication Theorems for Generalized and Double - Index Bessel Functions*, Journal of Computational and Applied Mathematics **118** (2000), no. 1-2, 143–150.

[10] S. Khan, M. A. Khan, and R. Khan, *Lie-theoretic Generating Relations Involving Multi-Variable Bessel Functions of Two Indices*, Reports on Mathematical Physics **62** (2008), no. 2, 183–203.

[11] N. N. Lebedev, *Special Functions and Their Applications*, Dover Publications Inc., New York, United States, 1972.

[12] W. A. Paciorek and G. Chapuis, *Generalized Bessel Functions in Incommensurate Structure Analysis*, Foundations of Crystallography **50** (1994), no. 2, 194–203.

[13] M. A. Pathan, A. N. Goyal, and M. J. S. Shahwan, *Lie-theoretic Generating Functions of Multivariable Generalized Bessel Functions*, Reports on Mathematical physics **39** (1997), no. 2, 249–254.

[14] H. R. Reiss and V. P. Krainov, *Generalized Bessel Functions in Tunneling Ionization*, Journal of Physics Mathematical and General **36** (2003), no. 20, 5575–5585.

(Recibido en febrero de 2010. Aceptado en mayo de 2010)

Departamento de Hidráulica
Área de Tecnología
Universidad Nacional Experimental Francisco de Miranda
Coro, Venezuela
e-mail: greilyn@hotmail.com

Centro de Investigación de Matemática Aplicada
Facultad de Ingeniería
Universidad del Zulia
Apartado de Correo 10482
Maracaibo, Venezuela
e-mail: lgalue@hotmail.com