Revista Colombiana de Estadística
Junio 2010, volumen 33, no. 1, pp. 13 a 24

Distribución de probabilidad que involucra algunas funciones hipergeométricas generalizadas

Probability Distributions Involving on Generalized Hypergeometric Functions

Rafael Alfonso Meléndez[a], Jaime Antonio Castillo[b], Carlos Jesús Jiménez[c]

Centro de Investigaciones, Grupo de Investigación GIMA, Universidad de la Guajira, Riohacha, Colombia

Resumen

Se define una nueva función de probabilidad que involucra algunas funciones hipergeométricas generalizadas; se encontraron algunas propiedades y casos especiales como la gamma y la exponencial. Se establecieron algunas funciones básicas asociadas a la nueva distribución de probabilidad, como la media, momentos, función característica, y se obtienen representaciones gráficas para esta nueva función de probabilidad.

***Palabras clave*:** función de densidad de probabilidad, función hipergeométrica generalizada, función generadora de momento, función característica.

Abstract

We define a new function of probability that involves some generalized hypergeometric functions, we found some properties and special cases such as gamma and exponential. We establish some basic functions associated with the new probability distribution like mean, the moments, characteristic function and several graphic representations are obtained for this new function of probability.

***Key words*:** Probability function, Generalized hypergeometric functions, The moments, Characteristic function.

[a]Profesor asociado. E-mail: melendez24@hotmail.com
[b]Profesor titular. E-mail: jacas68@yahoo.es
[c]Profesor asociado. E-mail: carlosj114@gmail.com

1. Introducción

Muchas funciones especiales de matemáticas aplicadas pueden expresarse en términos de funciones hipergeométricas, las cuales son clases importantes de funciones especiales. La función hipergeométrica y sus generalizaciones han sido usadas en varios problemas de la estadística (Lebedev 1965, Nakhi & Kalla 2005), particularmente en el estudio de nuevas funciones de densidad de probabilidad generalizadas y sus propiedades estadísticas, las cuales tienen diversas aplicaciones no solo en la teoría de confiabilidad, sino también en algunos problemas asociados con tasas demográficas, biomedicina, datos de tráfico y fallas de equipos electrónicos (Virchenko et al. 2001). Consideremos el problema de resolver la ecuación diferencial lineal

$$z(1-z)u'' + \left[\gamma - (\alpha+\beta+1)z\right]u' - \alpha\beta u = 0 \tag{1}$$

donde z es una variable compleja, y γ,α,β son parámetros que pueden tomar valores reales o complejos. Reduciendo (1) a la forma estándar dividiendo por el coeficiente u', obtenemos una ecuación cuyos coeficientes son funciones analíticas de z en el dominio $0 < |z| < 1$. Esto sigue de la teoría general de ecuaciones diferenciales lineales, donde (1)) tiene una solución particular (Virchenko et al. 2001).

$$u = z^s \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

donde $c_0 \neq 0$, s es número convenientemente escogido, y así la serie de potencia converge en $|z| < 1$.

Para valores de $\gamma \neq 0, -1, -2, \ldots$, una solución particular está dada por

$$u = F(\alpha, \beta; \gamma; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{(\gamma)_k} \frac{z^k}{k!}$$

que se conoce como la serie hipergeométrica de Gauss.

A continuación veremos algunas distribuciones de probabilidad establecidas recientemente por diferentes autores. Good (1953) introdujo la siguiente distribución gaussiana inversa

$$g(t) = \frac{1}{A(\alpha, a, b)} t^{\alpha-1} e^{-at-b/t}$$

$$a, b, t > 0;\ -\infty < \alpha < \infty$$

donde

$$A(\alpha, a, b) = \left[\int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-at-b/t} dt\right]^{-1}$$

esta distribución gaussiana inversa se plantea como la función de densidad de primer paso de tiempo con movimiento browniano con derivada positiva (Jorgensen 1982). Tales modelos han sido usados por Hoem (1976) y Jorgensen (1982) en la teoría de confiabilidad y teoría de tasas demográficas; este último estudió varias aplicaciones de la distribución anterior, asociadas con daños de equipos de aire acondicionados y datos de tráfico. En Lebedev (1965) y Mathais (1993) se presentan otras aplicaciones de las funciones especiales a la teoría de confiabilidad. En un trabajo reciente, Agarwal & Kalla (1996) desarrollaron una nueva distribución tipo gamma generalizada, con función de densidad:

$$f(x) = \frac{\beta\alpha^{m/\beta}}{\Gamma_\lambda(m/\beta, n)} x^{m-1} \left(\alpha x^\beta + n\right)^{-\lambda} e^{-\alpha x^\beta}, \quad \alpha, m, n < 0$$

donde

$$\Gamma_\lambda(m, n) = \int_0^\infty x^{m-1} e^{-x} \left(x + n\right)^{-\lambda} dx, \quad m > 0$$

siendo esta la función gamma generalizada de Kobayashi (1991), la cual es esencialmente una función hipergeométrica confluente de segunda clase (Agarwal & Kalla 1996). Motivados por sus resultados, Agarwal & Kalla (1996) y Ghitany (1998) obtienen algunas propiedades adicionales para esta distribución. Recientemente, Al-Musallam & Kalla (1998), Al-Saqabi et al. (2002),Virchenko et al. (2001) y Virchenko (1999) definieron y desarrollaron algunas funciones hipergeométricas-τ y confluente-τ que son generalizaciones de las funciones hipergeométricas de Gauss y funciones hipergeométricas confluentes Kummer.

El presente trabajo tiene como objeto definir una nueva función de densidad generalizada a partir de algunas funciones hipergeométricas generalizadas; para esto se hará uso de las representaciones integrales y en serie doble; a partir de esta función de densidad $f(x)$ se encuentran algunas propiedades que permiten caracterizarla, como la función generadora de momento, los momentos, la función característica, la función tasa de riesgo y algunos casos especiales. Se muestran algunas figuras las cuales corresponden a la simulación de esta nueva función de densidad para diferentes valores de los parámetros.

Galué et al. (2005) definen algunas generalizaciones que involucran a cuatro series de Appell definidas por Humbert (1920), introducen dos nuevos parámetros τ y τ' y definen sus representaciones en serie e integrales. A partir de estas se obtienen nuevas distribuciones de probabilidad que involucran estas generalizaciones. Con esta nueva función de densidad generalizada se encuentran casos especiales como una generalización con menos parámetros, la gamma y la exponencial, los momentos y sus casos particulares como el valor esperado y la varianza, la función generadora de momento, función característica, la función tasa de riesgo.

2. Generalización de algunas funciones hipergeométricas de dos variables

La generalización de las funciones hipergeométricas de dos variables está asociada con la generalización de la función hipergeométrica de Gauss propuesta por Virchenko (1999), quien la introdujo de la siguiente forma:

$$_2R_1^\tau(z) \equiv {}_2R_1(a, b; c; \tau; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+\tau k)}{\Gamma(c+\tau k)} \frac{z^k}{k!} \tag{2}$$

$$\tau > 0, |z| < 1, c \neq 0, -1, -2, \dots$$

Esta función tiene la siguiente representación integral:

$$ {}_2R_1(a, b; c; \tau; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt^{\tau})^{-a} dt \tag{3}$$

$$\tau > 0, \Re(c) > \Re(b) > 0$$

Para

$$\tau = 1, \ {}_2R_1(a, b; c; \tau; z) = {}_2F_1(a, b; c; z)$$

donde ${}_2F_1$ es la función hipergeométrica de Gauss. Similarmente la función hipergeométrica confluente se define como

$$\Phi^{\tau} = \Phi^{\tau}(a; b; c) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(c+\tau k)} \frac{z^k}{k!} \tag{4}$$

$$\tau > 0, |z| < 1, c \neq 0, -1, -2, \dots$$

Anteriormente se presentaron algunas generalizaciones de funciones hipergeométricas de dos variables donde se introduce el parámetro τ y a continuación se relacionan unas generalizaciones que involucran algunas funciones de Humbert.

2.1. Generalización de algunas funciones de Humbert

Siete formas confluentes de las cuatro series de Appell fueron definidas por Humbert (1920), denotadas por: $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Psi_1, \Psi_2, \Xi_1, \Xi_2$.

Recientemente Galué et al. (2005) consideraron una extensión de las funciones de Humbert Ψ_1, Ψ_2, Ξ_1 y Ξ_2 introduciendo parámetros adicionales τ, τ', y establecieron sus representaciones en serie e integral.

Las generalizaciones τ de las funciones confluentes de dos variables Ξ_1 y Ξ_2 pueden expresarse en términos de la función ${}_2R_1(a, b; c; \tau; w)$ en la forma siguiente:

$$\Xi_1^{\tau,\tau'}(a, a', b; c; w, z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(a')} \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+\tau k)\Gamma(a'+\tau' l)}{\Gamma(c+\tau k+\tau' l)} \frac{w^k}{k!} \frac{z^l}{l!} \tag{5}$$

$$\Xi_1^{\tau,\tau'}(a, a', b; c; w, z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a')} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a'+\tau' l)}{\Gamma(c+\tau' l)} \ {}_2R_1(b, a; c+\tau' l; \tau; w) \frac{z^l}{l!} \tag{6}$$

$$\tau, \tau' > 0, |w| < 1, c + \tau' l \neq 0, -1, -2, \dots$$

$$\Xi_2^{\tau}(a, b; c; w, z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+\tau k)(b)_k}{\Gamma(c+\tau k+l)} \frac{w^k}{k!} \frac{z^l}{l!} \tag{7}$$

$$\Xi_2^{\tau}(a,b;c;w,z)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{(c)_l}\;{}_2R_1(b,a;c+l;\tau,w)\frac{z^l}{l!} \tag{8}$$

$$\tau>0,|w|<1,c\neq 0,-1,-2,\dots$$

donde $(c)_n$ denota el símbolo de Pochhammer $(c)_n=\Gamma(c+n)/\Gamma(c)$.

2.2. Funciones de Bessel

A continuación se define la función de Bessel modificada de primera clase

$$I_{\upsilon}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z/2)^{\upsilon+2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\upsilon+1)},\qquad |z|<\infty,\quad |\arg\ z|<\pi \tag{9}$$

A continuación se muestra una representación integral definida por Galué para la función Ξ_2 y algunas propiedades, las cuales permitirán encontrar la nueva distribución de probabilidad generalizada y sus propiedades.

2.3. Representación integral

Galué et al. (2005) presentó además la representación integral para la generalización τ de la función de Humbert Ξ_2, de la siguiente forma:

$$\int_0^{\infty}x^{\alpha-1}\;e^{-px}\;\Xi_2^{\tau}(a,b;c;w,xz)dx=\frac{\Gamma(\alpha)}{p^{\alpha}}\;\Xi_1^{\tau,1}\left(a,\alpha,b;c;w,\frac{z}{p}\right) \tag{10}$$

$$\tau,\operatorname{Re}p,\operatorname{Re}\alpha,\operatorname{Re}(p-z)>0,|w|<1$$

Algunas propiedades. Galué et al. (2005) establecieron también algunas propiedades para las extensiones de Humbert de la siguiente manera:

$$\Xi_1^{\tau,\tau'}(a,a',b;c;w,0)={}_2R_1(b,a;c;\tau;w);\ \ |w|<1 \tag{11}$$

$$\Xi_2^{\tau}(a,b;c;w,0)={}_2R_1(b,a;c;\tau;w);\ \ |w|<1 \tag{12}$$

$$\Xi_1^{\tau,\tau'}(a,a',b;c;0,z)={}_1\Phi_1^{\tau'}(a';c;z) \tag{13}$$

$$\Xi_2^{\tau}(a,b;c;0,z)=\Gamma(c)\;z^{-(c-1)/2}\;I_{c-1}(2\sqrt{z}) \tag{14}$$

2.4. Función gamma incompleta y gamma generalizada

Una nueva función gamma generalizada puede considerarse utilizando Ξ_2^τ definida en (7), de la siguiente manera:

$$ {}_\tau\Gamma(\alpha, p; a, b; c; w, x) = \int_0^\infty t^{\alpha-1}\ e^{-pt}\Xi_2^\tau(a, b; c; w, tz)\, dt \tag{15}$$

$$\tau \in \mathbb{R}, \tau, \operatorname{Re} p, \operatorname{Re}\alpha, \operatorname{Re}(p - z) > 0$$

Definimos la siguiente función gamma generalizada incompleta

$$ {}_\tau\overset{w}{\Gamma}_0(\alpha, p; a, b; c; w, x) = \int_0^w t^{\alpha-1}\ e^{-pt}\ \Xi_2^\tau(a, b; c; w, tz)\, dt \tag{16}$$

$$\tau, \operatorname{Re} p, \operatorname{Re}\alpha, \operatorname{Re}(p - z) > 0$$

La función gamma incompleta generalizada complementaria se define como

$$ {}_\tau\overset{\infty}{\Gamma}_w(\alpha, p; a, b; c; w, x) = \int_w^\infty t^{\alpha-1}\ e^{-pt}\ \Xi_2^\tau(a, b; c; w, tz)\, dt \tag{17}$$

$$\tau, \operatorname{Re} p, \operatorname{Re}\alpha, \operatorname{Re}(p - z) > 0$$

3. Una función de densidad de probabilidad generalizada

En esta sección usaremos la generalización de la función hipergeométrica de dos variables Ξ_2^τ, establecida por Galué et al. (2005), para definir la siguiente función de densidad de probabilidad.

$$ f(x) = \frac{p^\alpha\ x^{\alpha-1} e^{-px}\ \Xi_2^\tau(a, b; c; w, xz)}{\Gamma(\alpha)\ \Xi_1^{\tau,1}(a, \alpha, b; c; w, z/p)} \tag{18}$$

$$\tau, \operatorname{Re} p, \operatorname{Re}\alpha, \operatorname{Re}(p - z) > 0, |w| < 1, x > 0$$

Propiedades:

i) $f(x) = 0$	para $\alpha > 1$ y $x = 0$
ii) $f(x) = \frac{p^\alpha\ x^{\alpha-1}\ e^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$	para $b = \alpha > 1$ y $z = 0$
iii) $f(x) \to \infty$	cuando $x \to 0^+$ y $\alpha < 1$
iv) $f(x) \to 0$	cuando $x \to \infty$ y $\alpha < 1$

3.1. Algunos casos especiales

1. Para $\tau = 1$, obtenemos una nueva función de densidad de probabilidad involucrando la generalización τ de la función confluente de dos variables Ξ_2.

$$f(x) = \frac{p^{\alpha}\ x^{\alpha-1}\ e^{-px}\ \ \Xi_2(a, b; c; w, xz)}{\Gamma(\alpha)\ \Xi_1^{\tau,1}(a, \alpha, b; c; w, z/p)} \tag{19}$$

$$\operatorname{Re} p, \operatorname{Re} \alpha, \operatorname{Re}(p - z) > 0, |w| < 1$$

2. Para $\tau' = 1$, $w = 0$, y utilizando las propiedades (13) y (14) en (18) se obtiene una distribución con cuatro parámetros

$$f(x) = \frac{p^{\alpha}\ x^{2(\alpha-c-1)}\ e^{-px}\ \Gamma(c)\ z^{-(c-1)/2}\ I_{c-1}(2\sqrt{xz})}{\Gamma(\alpha)\ {}_1\Phi_1(a'; c; z/p)} \tag{20}$$

$$\operatorname{Re} p, \operatorname{Re} \alpha, \operatorname{Re}(p - z) > 0$$

3. Para $z = 0$ y $a' = b = \alpha$ y utilizando las propiedades (10) y (11) en (18) obtenemos la distribución gamma

$$f(x) = \frac{p^{\alpha}\ x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\ e^{-px} \tag{21}$$

$$\operatorname{Re} p, \operatorname{Re} \alpha > 0, |w| < 1$$

4. Para $\alpha = 1$ en (21)

$$f(x) = p\ e^{-px} \tag{22}$$

$$\operatorname{Re} p > 0, x > 0$$

se obtiene la bien conocida distribución exponencial.

3.2. Los momentos

El n-ésimo momento μ'_n con respecto al origen de una variable aleatoria continua X con función de densidad $f(x)$ se define como

$$\mu'_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n\ f(x) dx$$

Para la función de densidad $f(x)$, dada por (18) se consideran distribuciones de soporte positivo, dado que estas involucran funciones tipo gamma, la cual es continua sobre los reales positivos.

$$\mu'_n = E(x^n) = \int_0^{\infty} x^{n+\alpha-1} e^{-px} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a + \tau k)(b)_k}{\Gamma(c + \tau k + l)} \frac{w^k}{k!} \frac{(xz)^l}{l!} dx.$$

Usando la expresión de la serie de la función Ξ_2^τ dada por (7) se tiene

$$\Xi_2^\tau(a,b;c;w,z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+\tau k)(b)_k}{\Gamma(c+\tau k+l)} \frac{w^k}{k!} \frac{z^l}{l!} \int_0^\infty x^{n+\alpha+l-1} e^{-px} dx$$

resolviendo la integral se tiene el siguiente resultado

$$\mu_n' = \frac{(\alpha)_n}{p^n} \frac{\Xi_1^{\tau,1}(a,\alpha+n;c;w,z/p)}{\Xi_1^{\tau,1}(a,\alpha,b;c;w,z/p)} \tag{23}$$

$$\tau, \operatorname{Re} p, \operatorname{Re}\alpha, \operatorname{Re}(p-z) > 0, |w| < 1, n = 1,2,3,\dots$$

Casos especiales. El momento μ_n' para $n=1$, denotado por $E(x)$, llamado la media, está dado por

$$\mu_1' = E(x) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)\ p} \frac{\Xi_1^{\tau,1}(a,\alpha+1;c;w,z/p)}{\Xi_1^{\tau,1}(a,\alpha;c;w,z/p)} \tag{24}$$

La varianza de una variable aleatoria X de la función de probabilidad $f(x)$ definida por (13) con media μ_1', está dada por

$$Var(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$$

donde

$$E(x^2) = \mu_2' = \frac{(\alpha)_2}{\Gamma(\alpha)p^2} \frac{\Xi_1^{\tau,1}(a,\alpha+2;c;w,z/p)}{\Xi_1^{\tau,1}(a,\alpha;c;w,z/p)} \tag{25}$$

$$\tau, \operatorname{Re} p, \operatorname{Re}\alpha, \operatorname{Re}(p-z) > 0, |w| < 1, x > 0$$

3.3. Función generadora de momento

La función generadora de momento, de una variable aleatoria X, es definida para cada real t, se denota por $M_x(t)$ es definida por

$$M_x(t) = E(e^{xt}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{xt}\ f(x)\, dx \tag{26}$$

Para la función de densidad $f(x)$ definida por (18), se tiene la función generadora de momento

$$M_x(t) = \int_0^\infty p^\alpha\ x^{\alpha-1}\ e^{-(p-t)x} \frac{\Xi_2^\tau(a,b;c;w,xz)}{\Gamma(\alpha)\ \Xi_1^{\tau,1}(a,\alpha,b;c;w,z/p)}\, dx \tag{27}$$

Aquí se han tenido en cuenta las mismas consideraciones dadas en 3.2 para tener distribuciones de soporte positivo.

Resolviendo la integral en (27) usando la definición (7) de Ξ_2^τ se obtiene finalmente la función generadora de momento para $f(x)$ definida en (18)

$$M_x(t) = \left(\frac{p}{p-t}\right)^\alpha \frac{\Xi_1^{\tau,1}(a,\alpha+n;c;w,z/(p-t))}{\Xi_1^{\tau,1}(a,\alpha,b;c;w,z/p)} \tag{28}$$

$$\tau, \operatorname{Re} p, \operatorname{Re}\alpha, \operatorname{Re}(p-t) > 0, |w| < 1$$

3.4. Función característica

La función característica de X está dada por

$$E(e^{itx}) = \int_0^\infty e^{itx}\ f(x)\ dx \tag{29}$$

usando (29) y la función $f(x)$ definida en (18)

$$F\ [f(x)]_{(t)} = E(e^{itx}) = \frac{p^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+\tau k)(b)_k}{\Gamma(c+\tau k+l)} \frac{w^k}{k!} \frac{z^l}{l!}}{\Xi_1^{\tau,1}(a,\alpha,b;c;w,z/p)} \int_0^\infty x^{\alpha+l-1}\ e^{-(p-it)x}\ dx$$

resolviendo la integral y utilizando la definición (5) de $\Xi_1^{\tau,1}$ se tiene

$$F\ [f(x)]_{(t)} = \left(\frac{p}{p-it}\right)^\alpha \frac{\Xi_1^{\tau,1}(a,\alpha;c;w,z/(p-it))}{\Xi_1^{\tau,1}(a,\alpha,b;c;w,z/p)} \tag{30}$$

3.5. La función tasa de riesgo

La función tasa de riesgo se define como

$$h(x) = \frac{f(x)}{S(x)} \tag{31}$$

donde $S(x)$ es la función de sobrevida de x

$$S(x) = 1 - F(x), \quad \text{para} \quad x > 0 \tag{32}$$

siendo $F(x)$ la función de densidad acumulada

$$F(x) = \int_0^x f(u)\, du$$

La función $S(x)$ tiene origen en la teoría de confiabilidad. En este caso la función de densidad $f(x)$ definida por (18) donde ${}_\tau\overset{w}{\Gamma}_0(\alpha,p;a,b;c;w,x)$ está definida por (16)

$$F(x) = \frac{p^\alpha\ {}_\tau\overset{w}{\Gamma}_0(\alpha,p;a,b;c;w,x)}{\Gamma(\alpha)\ \Xi_1^{\tau,1}(a,\alpha;c;w,z/p)} \tag{33}$$

luego la función de sobrevida $S(x)$ está dada por

$$S(x)=\frac{\Gamma(\alpha)\ \Xi_1^{\tau,1}(a,\alpha;c;w,z/p)-p^{\alpha}\ {}_{\tau}\overset{w}{\Gamma}_0(\alpha,p;a,b;c;w,x)}{\Gamma(\alpha)\ \Xi_1^{\tau,1}(a,\alpha;c;w,z/p)}$$

la función de tasa de riesgo está expresada por

$$h(x)=\frac{p^{\alpha}\ x^{\alpha-1}\ e^{-px}\ \Xi_2^{\tau,1}(a,b;c;w,xz)}{\Gamma(\alpha)\ \Xi_1^{\tau,1}(a,\alpha;c;w,z/p)-p^{\alpha}\ {}_{\tau}\overset{w}{\Gamma}_0(\alpha,p;a,b;c;w,x)} \tag{34}$$

3.6. Representaciones gráficas

Las siguientes figuras representan la función de densidad de probabilidad (*fdp*) generalizada dada por (18) para diferentes valores tanto de α como de τ; se observa la variación en los gráficos cuando se consideran valores distintos en dichos parámetros.

Tomando los valores $p = 2.5, a = 1.5$, $b = 2$, $c = 3$, $w = 0.8, \alpha = 2.8$ y $\tau = 2.2$ y $p = 2.5$, $a = 1.5$, $b = 3$, $c = 1,5$, $w = 0.8$, $\alpha = 3.4$ y $\tau = 3.4$, se tienen respectivamente las figuras 1 y 2.

En la figura 3 se consideran los mismos parámetros de la figura 1 y se gráfica el semilog de la función de densidad de probabilidad dada en (18).

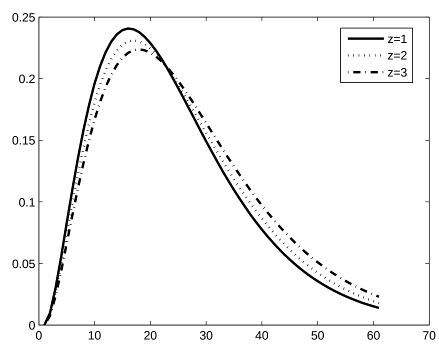

Figura 1: *fdp* para diferentes valores de z y $\tau = 2.2$.

4. Conclusiones

Este trabajo contiene una nueva función de densidad de probabilidad generalizada, la cual se obtuvo a partir de funciones generalizadas de tipo hipergeométrico desarrolladas recientemente; se encuentran algunas propiedades que permiten caracterizarla, como la función generadora de momento, los momentos, la función característica, la función tasa de riesgo y algunos casos especiales tales como exponencial y la gamma.

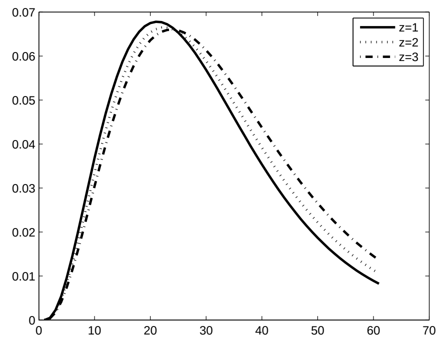

FIGURA 2: *fdp* para diferentes valores de z y $\tau = 3.4$.

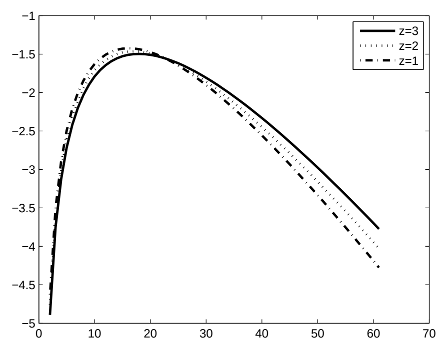

FIGURA 3: *semilog(fdp)* para diferentes valores de z y $\tau = 2.2$.

[Recibido: diciembre de 2008 — Aceptado: enero de 2010]

Referencias

Agarwal, S. K. & Kalla, S. L. (1996), *A Generalized Gamma Distribution and its Applications in Reliability Comm Statist*, Theory Method, Oxford.

Al-Musallam, F. & Kalla, S. L. (1998), 'Further Results on a Generalized Gamma Functions Ocurring in Diffraction Theory', *Statist, Theory Methods* **7**, 175–190.

Al-Saqabi, B. N., Kalla, S. L. & Shafea, A. (2002), 'On a Probability Distribution Involving a τ-confluent Hypergeometric Function of Two Variables', *Algebras Groups and Geometries* **19**(2), 254–257.

Galué, L., Al-Zamel, A. & Kalla, S. L. (2005), 'An Extension of Some Humbert's Functions', *International Journal of Applied Mathematics* **17**, 91–106.

Ghitany, M. E. (1998), 'On a Recent Generalization of Gamma Distribution', *Statist, Theory Methods* **27**, 223–233.

Good, I. J. (1953), 'The Population Frequencies of Species and the Estimation of Population Parameters', *Biometrika* **40**, 237–260.

Hoem, J. N. (1976), 'The Statistical Theory of Demographics Rates', *Scandinavian Journal of Statistics* **3**, 160–185.

Humbert, P. (1920), 'The Confluent Hypergeometric Functions of Two Variables', *Proceedings Royal Society of Edinburgh* **41**, 73–96.

Jorgensen, B. (1982), *Statistical Propertiers of Generalized Inverse Gaussians Distributions*, Lecture Notes in Statistics, New York.

Kobayashi, K. (1991), 'On a Generalized Gamma Functions Occurring in Diffraction Theory', *Journal of the Physical Society of Japan* **60**, 1501–1512.

Lebedev, N. N. (1965), *Special Functions and Their Applications*, primera edn, Dover Publications, Inc., New York.

Mathais, A. M. (1993), *A Handbook of Special Functions for Statistical and Physical Sciences*, Clarendon Press, Oxford.

Nakhi, B. & Kalla, S. L. (2005), 'On a Generalized Mixture Distribution', *Applied Mathematics and Computation* **169**, 943–952.

Virchenko, N. (1999), 'On Some Generalizations of the Functions Hypergeometric Type', *Integral Transforms and Special Functions* **2**, 233–244.

Virchenko, N., Kalla, S. L. & Al-Zamel, A. (2001), 'Some Result on a Generalized Hypergeometric Function', *Integral Transforms and Special Functions* **12**, 89–100.