PORTUGALIAE MATHEMATICA
Vol. 58 Fasc. 4 – 2001
Nova Série

FRACTIONS CONTINUES ET SÉRIES FORMELLES ALGÉBRIQUES RÉDUITES

M. Mkaouar

1 – Introduction

Soit p un nombre premier et soit $\mathbf{F}_q$ le corps à q éléments, avec $q=p^d$. Soit $\mathbf{F}_q((X^{-1}))$ l'ensemble des séries formelles:

$$\mathbf{F}_q((X^{-1})) \;=\; \left\{ f = \sum_{n\geq n_0} f_n\, X^{-n} \colon\; f_n \in \mathbf{F}_q,\; n_0 \in \mathbb{Z} \right\} .$$

Soit $f=\sum_{n\geq n_0} f_n\, X^{-n}$, on appelle partie entière de f qu'on la note par $[f] = f_0 + f_{-1}X + \cdots + f_{n_0}X^{-n_0}$ si $n_0 \leq 0$ et vaut 0 si non. On note par $\{f\} = f - [f]$ la partie fractionnaire de f et $\gamma(f) = n_0$ si $f \neq 0$ et $\gamma(0) = +\infty$. On définit sur $\mathbf{F}_q((X^{-1}))$ une valeur absolue non archimedienne normale noté par: $|\cdot| = q^{-\gamma(\cdot)}$. Soient $M_q = \{f \in \mathbf{F}_q((X^{-1})) \;/\; |f| < 1\}$ et T la transformation définie de M_q dans lui même par

$$T\colon \quad f \to \frac{1}{f} - \left[\frac{1}{f}\right] .$$

Alors pour tout $f \in M_q$, on a

$$f \;=\; \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots}} \;=\; [0; a_1, a_2, \ldots]$$

où les a_i sont des polynômes de degré ≥ 1, définis pour tout entier positif n:

$$a_n = \left[\frac{1}{T^{n-1}(f)}\right] .$$

Received: May 29, 2000; *Revised*: January 16, 2001.
Classification AMS: 11A55, 30B70.
Mots clés: Fractions continues; Séries formelles.

Alors pour $f \in \mathbf{F}_q((X^{-1}))$, soit $a_0 = [f]$, on a

$$f \;=\; a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + ...}} \;=\; [a_0; a_1, a_2, ...] \;.$$

Cette nouvelle écriture de f est dite développement en fraction continue de f, la suite $(a_i)_{i\geq 0}$ est dite la suite des quotients partiels de f et si la suite $(\deg a_i)_{i\geq 0}$ est bornée, alors on dit que f admet un développement en fraction continue borné. On définit maintenant les deux suites de polynômes P_n et Q_n par $P_0 = a_0$, $Q_0 = 1$, $P_1 = a_0\, a_1 + 1$, $Q_1 = a_1$ et que pour tout $n \geq 2$,

$$P_n \;=\; a_n P_{n-1} + P_{n-2}\,, \qquad Q_n \;=\; a_n Q_{n-1} + Q_{n-2} \;.$$

On remarque que

$$Q_n P_{n-1} + Q_{n-1} P_n \;=\; (-1)^n$$

et que

$$\frac{P_n}{Q_n} = [a_0; ..., a_n] \;.$$

On dit que $\dfrac{P_n}{Q_n}$ est la $n^{-\text{ième}}$ convergente de f. Pour plus d'informations sur les séries formelles et la théorie des fractions continues voir [1], [2] et [3].

Un polynôme $\Lambda \in \mathbf{F}_q[X][Y]$ est dit réduit, si $\Lambda(Y) = A_m Y^m + A_{m-1} Y^{m-1} + \cdots + A_0$, avec $A_i \in \mathbf{F}_q[X]$ et $\deg A_{m-1} > \deg A_i$, pour tout $i \neq m-1$. Une série formelle f est dite réduite, si elle est racine d'un polynôme réduit et irréductible dans $\mathbf{F}_q[X][Y]$ et $[f] \neq 0$. Nous avons démontré dans [4] que si f est quadratique sur $\mathbf{F}_2(X)$ et $[f] \neq 0$, alors f admet un développement en fraction continue purement périodique si et seulement si f est réduite, ce qui donne l'équivalent du théorème de Galois dans le cas des séries formelles. Nous généralisons la notion de série formelle réduite de degré donné sur un corps fini quelconque et nous déduisons quelques résultats intéressants.

2 – Enoncé des résultats

Théorème 1. *Tout polynôme réduit H dans $\mathbf{F}_q[X][Y]$ admet une racine f dans $\mathbf{F}_q((X^{-1}))$ dont la partie polynomiale est non nulle. De plus si $H = A_m Y^m + A_{m-1} Y^{m-1} + \cdots + A_0$ est irréductible, alors la racine f est l'unique racine réduite vérifiant $[f] = -[\frac{A_{n-1}}{A_n}]$ et $\{f\}^{-1}$ est aussi une série formelle réduite et de même degré que f.*

Le Théorème 1 donne l'algorithme du développement en fraction continue d'une série formelle réduite.

Corolaire 1. *Soit f une série formelle quadratique sur $\mathbf{F}_q(X)$. Alors f admet un développement en fraction continue purement périodique si et seulement si f est réduite.*

Corolaire 2. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f une série formelle algébrique sur $\mathbf{F}_q(X)$ vérifiant $[f] \neq 0$ et $Af^{q^n+1} + ABf^{q^n} + 1 = 0$. Alors $f = [a_0; a_1, ..., a_s, ...]$, où $a_s = (-1)^s A^{\frac{q^{sn}-(-1)^s}{q^s+1}} B^{q^{sn}}$.*

Corolaire 3 (Théorème 6, [2])**.** *Soit $n \in \mathbb{N}$, alors l'équation*

$$f^{2^n+1} + Qf^{2^n} + Pf + PQ + 1 = 0$$

admet une racine unique dans $\mathbf{F}_2((X^{-1}))$, et que

$$f = \left[Q; Q^{2^{2n}} + P^{2^n}, Q^{2^{3n}} + P^{2^{2n}}, ... \right] .$$

Preuve du Corollaire 1: Il est clair que si f est périodique alors f vérifie l'équation $Q_n f^2 + (Q_{n-1} - P_n) f - P_{n-1} = 0$, où $f = [a_1; \overline{a_2, ..., a_t, a_1}]$ et $\frac{P_n}{Q_n} = [a_1; ..., a_n]$, or $\deg Q_n < \deg(P_n + Q_{n-1}) = \deg P_n$ et $\deg P_{n-1} < \deg P_n$.

On suppose maintenant que f est réduite et vérifie $Af^2 + Bf + C = 0$, alors f est ultimement périodique, donc f est de la forme $f = [a_1; ..., a_t, f_{t+1}]$, où f_{t+1} est une série formelle périodique. Soit $f = f_1$ et $f_{n+1} = \frac{1}{f_n - a_n}$. Comme f est réduite, alors d'aprés le Théoréme 1, f_n l'est aussi et vérifie l'équation $A_n f_n^2 + B_n f_n + A_{n-1} = 0$, avec $A_0 = C$, $A_1 = A$, $B_1 = B$ et $a_1 = -[\frac{B_1}{A_1}]$.

(1) $$A_{n+1} = a_n^2 A_n + a_n B_n + A_{n-1} ,$$

(2) $$B_{n+1} = 2\, a_n A_n + B_n$$

et

(3) $$a_{n+1} = -\left[\frac{B_{n+1}}{A_{n+1}}\right] .$$

Soit alors $Per(f) = Per(f_{t+1}) = l$ (où $Per(f)$ est la longueur de la période de la suite des quotients partiels du développement en fraction continue de f), alors $A_{t+j} = A_{t+l+j}$, $B_{t+j} = B_{t+l+j}$ et $a_{t+j} = a_{t+j+l}$, pour tout $j \geq 1$, ce qui donne d'après la formule de récurrence (1) de A_{t+l+2} et A_{t+2} que

(4) $$A_t = A_{t+l} ,$$

et comme

$$\begin{aligned} B_{t+l+1} &= 2\,a_{t+l}\,A_{t+l} + B_{t+l} \\ &= 2\,a_{t+l}\,A_t + B_{t+l} \\ &= B_{t+1} \\ &= 2\,a_t\,A_t + B_t \end{aligned}$$

ce qui donne

$$2\,(a_{t+l} - a_t)\,A_t \;=\; B_t - B_{t+l}\;. \tag{5}$$

Soit alors

$$\begin{aligned} B_t &= \left[\frac{B_t}{A_t}\right] A_t + R_t \\ &= -a_t\,A_t + R_t\;, \end{aligned} \tag{6}$$

avec $\deg R_t < \deg A_t$ et

$$\begin{aligned} B_{t+l} &= \left[\frac{B_{t+l}}{A_{t+l}}\right] A_{t+l} + R_{t+l} \\ &= -a_{t+l}\,A_{t+l} + R_{t+l}\;, \end{aligned} \tag{7}$$

avec $\deg R_{t+l} < \deg A_t$. En remplacant B_{t+l} et B_t par leurs expressions dans (5), on obtient:

$$(a_{t+l} - a_t)A_t \;=\; R_t - R_{t+l}\;. \tag{8}$$

Comme $\deg(R_t - R_{t+l}) < \deg A_t$, alors (8) nous permet de dire que $a_t = a_{t+l}$ et $R_t = R_{t+l}$, ce qui donne d'après (5) que $B_t = B_{t+l}$, et par suite d'après les formules de récurrences (2), (3) et (4) $A_{t-1} = A_{t-1+l}, ..., A_1 = A_{1+l}$, $B_{t-1} = B_{t-1+l}, ..., B_1 = B_{1+l}$ et $a_{t-1} = a_{t-1+l}, ..., a_1 = a_{1+l}$, ce qui montre que f est périodique. ∎

Preuve du Corollaire 2: Soit $f_0 = f$ et $f_{s+1} = \frac{1}{f_s - [f_s]}$, alors d'après le Théorème 1, f_s est réduite et vérifie l'équation $A_s f_s^{q^n+1} + B_s f_s^{q^n} + C_s f_s + D_s = 0$, avec

$$\begin{aligned} A_{s+1} &= A_s\,a_s^{q^n+1} + B_s\,a_s^{q^n} + C_s\,a_s + D_s \\ B_{s+1} &= A_s\,a_s^{q^n} \\ C_{s+1} &= B_s + a_s A_s \\ D_{s+1} &= A_s \\ a_{s+1} &= -\left[\frac{B_{s+1}}{A_{s+1}}\right]\;. \end{aligned}$$

Alors, on montre à l'aide d'une récurrence simple sur s que $A_s = A^{\frac{1+(-1)^s}{2}}$, $B_s = (-1)^s\, A^{\frac{1-(-1)^s}{2}}\, A^{\frac{q^{sn}+(-1)^s q^n}{q^n+1}}\, B^{q^{sn}}$, $C_s = 0$, $D_s = A^{\frac{1-(-1)^s}{2}}$ et que $a_s = (-1)^s\, A^{\frac{q^{sn}+(-1)^s}{q^n+1}}\, B^{q^{sn}}$. ∎

Preuve du Corollaire 3: Il suffit de remarquer que la série formelle $g = \frac{1}{f-Q}$ vérifie

$$g^{2^n+1} + (Q^{2^n} + P)\, g^{2^n} + 1 \;=\; 0$$

d'après le Corollaire 2, il suffit de prendre $A = 1$, $B = Q^{2^n} + P$ et $q = 2$. ∎

Démonstration du Théorème 1: Soit H un polynôme de degré m dans $\mathbf{F}_q[X][Y]$ tel que $H = A_m Y^m + A_{m-1} Y^{m-1} + \cdots + A_0$, soit $a(H) = -[\frac{A_{m-1}}{A_m}]$ et $A_{-1} = 0$. On définit alors l'application σ de l'ensemble $\mathbf{F}_q[X][Y] - \{0\}$ dans lui même par:

$$H \;\longrightarrow\; Y^{\deg H}\, H\Big(a(H) + \frac{1}{Y}\Big)\;. \blacksquare$$

Remarque 1. Il est clair qu'en général $\deg \sigma(H) \leq \deg H$. Comme exemple où l'inégalité est stricte: on considère le polynôme $H(Y) = XY^2 - (X^2+1)\,Y + X$, alors $\sigma(H)(Y) = (X^2 - 1)\,Y + X$. D'autre part le polynôme $\sigma(H)$ n'est jamais nul. □

Lemme 1. *Si H est un polynôme réduit de $\mathbf{F}_q[X][Y]$ et $\deg\sigma(H) = \deg H$, alors $\sigma(H)$ est réduit.*

Preuve: Soit H un polynôme réduit tel que $H = A_m Y^m + A_{m-1} Y^{m-1} + \cdots + A_0$, et $a = a(H) = -[\frac{A_{m-1}}{A_m}]$. Dans la suite les entiers $\binom{j}{k}$ sont pris modulo p. Alors

$$\begin{aligned} \sigma(H)(Y) &= Y^m\, H\Big(a + \frac{1}{Y}\Big) \\ &= Y^m \sum_{j=0}^{m} A_j \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k}\, a^{j-k} Y^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{m} \Bigg(\sum_{j=m-k}^{m} A_j \binom{j}{m-k}\, a^{j-m+k} \Bigg) Y^k\;. \end{aligned} \tag{9}$$

Soit alors

$$B_k \;=\; \sum_{j=m-k}^{m} A_j \binom{j}{m-k}\, a^{j-m+k}\;. \tag{10}$$

Pour montrer que $\sigma(H)$ est réduit , il suffit de montrer que pour tout $k \neq m-1$, $\deg B_{m-1} > \deg B_k$. La division euclidienne de A_{m-1} par A_m donne

$$\begin{aligned} A_{m-1} &= \left[\frac{A_{m-1}}{A_m}\right] A_m + R \qquad \text{avec} \quad \deg R < \deg A_m \\ &= -a\, A_m + R\ . \end{aligned} \tag{11}$$

Or d'après (10)

$$\begin{aligned} B_m &= \sum_{j=0}^{m} A_j\, a^j \\ &= \sum_{j=0}^{m-2} A_j\, a^j + R\, a^{m-1} \end{aligned} \tag{12}$$

et

$$\begin{aligned} \deg(R\, a^{m-1}) &= (m-2) \deg a \ + \ \deg aR \\ &< (m-2) \deg a \ + \ \deg(aA_m) \\ &= (m-2) \deg a \ + \ \deg A_{m-1} \end{aligned} \tag{13}$$

et d'après (10)

$$B_{m-1} = \sum_{j=0}^{m-2} j\, A_j\, a^{j-1} + (m-1)\, R\, a^{m-2} + A_m\, a^{m-1}\ .$$

Comme $\deg A_j < \deg A_{m-1}$, pour $j \neq m-1$, alors d'après (11), on a

$$\deg B_{m-1} = (m-2) \deg a \ + \ \deg A_{m-1} \tag{14}$$

et d'après (12) et (13)

$$\begin{aligned} \deg B_m &< (m-2) \deg a \ + \ \deg A_{m-1} \\ &= \deg B_{m-1}\ . \end{aligned} \tag{15}$$

D'autre part d'après (10), on a pour tout $k \in \{0, ..., m-2\}$

$$\begin{aligned} \deg B_k &\leq (k-1) \deg a \ + \ \deg A_{m-1} \\ &< \deg B_{m-1}\ . \end{aligned} \tag{16}$$

Suite de la Démonstration du Théorème 1: Soit H un polynôme réduit de $\mathbf{F}_q[X][Y]$ et de degré m, tel que $H(Y) = A_m Y^m + A_{m-1} Y^{m-1} + \cdots + A_0$.

On note pour tout $s \in \mathbb{N}$, $\sigma^{s+1}(H) = \sigma(\sigma^s(H))$. On suppose maintenant qu'il existe $n \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $s \in \mathbb{N}$ et $0 \leq s \leq n$, on a $\deg \sigma^s(H) = \deg H = m$. Soit donc pour $j \in \{0, ..., m\}$, $A_{j,0} = A_j$, les $A_{j,s}$ et a_s sont définis par

$$\sigma^s(H)(Y) = A_{m,s} Y^m + A_{m-1,s} Y^{m-1} + \cdots + A_{0,s} \tag{17}$$

et

$$a_s = -\left[\frac{A_{m-1,s}}{A_{m,s}}\right] .$$

Pour établir une relation de récurrence entre $A_{i,s+1}$ $A_{j,s}$ pour $i, j \in \{0, ..., m\}$ et $0 \leq s \leq n$, il suffit de développer $\sigma^{s+1}(H)(Y) = Y^m\Big(\sigma^s(H)\left(a_s + \frac{1}{Y}\right)\Big)$, ce qui donne par analogie avec (10)

$$A_{k,s+1} = \sum_{j=m-k}^{m} A_{j,s} \begin{pmatrix} j \\ m-k \end{pmatrix} a_s^{j-m+k} . \tag{18}$$

Il est clair que $\deg a_s \geq 1$, car $\sigma^s(H)$ est réduit et par suite $\deg A_{m-1,s} > \deg A_{m,s}$. Soit pour tout $s \in \mathbb{N}$, $\frac{P_s}{Q_s} = [a_0; a_1, ..., a_s]$ avec $P_{-1} = 1$ et $Q_{-1} = 0$.

Remarque 2. Il est clair d'après (17) et la Remarque 1, si $\deg \sigma^s(H) \neq \deg H$, alors $A_{m,s} = 0$. □

Lemme 2. *En conservant les notations et les hypothèses précédentes, alors on a* $\deg A_{m,s+1} \leq (m-1) \deg Q_s + m \deg A_{m-1}$.

Preuve: Soit $s \in \mathbb{N}$ et $0 \leq s \leq n$, alors la division euclidienne de $A_{m-1,s}$ par $A_{m,s}$, donne $A_{m-1,s} = -a_s\, A_{m,s} + R$, avec $\deg R < \deg A_{m,s}$, ce qui donne d'après (18)

$$A_{m,s+1} = \sum_{j=0}^{m-2} a_s^j\, A_{j,s} + R\, a_s^{m-1} , \tag{19}$$

comme $\deg R < \deg A_{m,s}$, alors

$$\begin{aligned} \deg(R\, a_s^{m-1}) &\leq \deg(R\, a_s) + (m-2) \deg a_s \\ &< \deg(A_m\, a_s) + (m-2) \deg a_s \\ &= \deg A_{m-1,s} + (m-2) \deg a_s \end{aligned} \tag{20}$$

alors d'après (19) et (20), on a

$$\begin{aligned} \deg A_{m,s+1} &\leq (m-2) \deg a_s + \deg A_{m-1,s} \\ &\leq (m-1) \deg a_s + \deg A_{m,s} . \end{aligned} \tag{21}$$

Maintenant par récurrence sur s, on obtient

$$\begin{aligned}\deg A_{m,s+1} &\leq (m-1)(\deg a_s + \cdots + \deg a_1) + \deg A_{m,0} + (m-1)\deg a_0 \\ &\leq (m-1)\deg Q_s + m \deg A_{m-1} \,. \quad \blacksquare \end{aligned} \tag{22}$$

Lemme 3. *Soit H un polynôme de réduit de $\mathbf{F}_q[X][Y]$ et de degré m. Si pour $s \in \mathbb{N}$ et $0 \leq s \leq n$ (n entier fixé), on a $\deg \sigma^s(H) = m$, alors $\sigma^{s+1}(H)(Y) = (YQ_s + Q_{s-1})^m H\Big(\dfrac{P_sY + P_{s-1}}{Q_sY + Q_{s-1}}\Big)$.*

Preuve: La démonstration se fait par récurrence sur $s \leq n$. Il est clair que ce lemme est vraie pour $s = 0$. On suppose maintenant qu'il est vrai jusqu'a l'ordre $s \leq n$, alors on a

$$\begin{aligned}\sigma^{s+1}(H)(Y) &= Y^m \sigma^s(H)\left(a_s + \frac{1}{Y}\right) \\ &= Y^m \left(\left(a_s + \frac{1}{Y}\right) Q_{s-1} + Q_{s-2}\right)^m H\left(\frac{\left(a_s + \frac{1}{Y}\right)P_{s-1} + P_{s-2}}{\left(a_s + \frac{1}{Y}\right)Q_{s-1} + Q_{s-2}}\right) \\ &= (YQ_s + Q_{s-1})^m \, H\Big(\frac{P_sY + P_{s-1}}{Q_sY + Q_{s-1}}\Big) \,. \quad \blacksquare \end{aligned} \tag{23}$$

Lemme 4. *Soit f une série formelle algébrique réduite sur $\mathbf{F}_q(X)$, telle que f soit de degré m, $[f] \neq 0$ et $A_m f^m + \cdots + A_1 f + A_0 = 0$. Alors $[f] = -\Big[\dfrac{A_{m-1}}{A_m}\Big]$.*

Preuve: Posons $g = \{f\}$, alors

$$\begin{aligned} 0 = \sum_{j=0}^{m} A_j\big([f] + g\big)^j &= \sum_{j=0}^{m} A_j \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} [f]^{j-k} g^k \\ &= \sum_{k=0}^{m} \left(\sum_{j=k}^{m} A_j \binom{j}{k} [f]^{j-k}\right) g^k \,. \end{aligned}$$

alors

$$C_k = \sum_{j=k}^{m} A_j \binom{j}{k} [f]^{j-k} \,. \tag{24}$$

Comme f est réduite et $[f] \neq 0$ alors $\deg A_m + m \deg[f] = \deg A_{m-1} + (m-1)\deg[f]$, ce qui donne que

$$\begin{aligned}\deg[f] &= \deg A_{m-1} - \deg A_m \\ &= \deg\left[\frac{A_{m-1}}{A_m}\right] \,. \end{aligned}$$

Soit $Q = [f]+[\frac{A_{m-1}}{A_m}]$ et $A_{m-1} = [\frac{A_{m-1}}{A_m}]A_m+R$ avec $\deg R < \deg A_m$. Alors $A_{m-1}[f]^{m-1}+A_m[f]^m = A_m[f]^{m-1}Q+R[f]^{m-1}$, maintenant, si on suppose que $Q \neq 0$, alors

$$\begin{aligned}\deg\Big(A_{m-1}[f]^{m-1}+A_m[f]^m\Big) &= \deg A_m+(m-1)\deg[f]\ +\ \deg Q\\ &= \deg A_{m-1}+(m-2)\deg[f]\ +\ \deg Q\ .\end{aligned}$$

Or d'après (1), $C_0 = A_0+A_1[f]+\cdots+A_{m-2}[f]^{m-2}+A_{m-1}[f]^{m-1}+A_m[f]^m$, ce qui donne que $\deg C_0 = \deg A_{m-1}+(m-2)\deg[f]+\deg Q$. Soit $k \in \{1,...,m\}$, comme f est réduite et $f \neq 0$, alors d'après (1) $\deg C_k \leq \deg A_{m-1} + (m-k-1)\deg[f]$ et par suite pour tout $k \in \{1,...,m\}$, $\deg C_k \leq \deg C_0$, ce qui contredit le fait que $[g] = 0$, et par suite $Q = 0$. ∎

Suite de la Démonstration du Théorème 1: On a d'après (17) et le Lemme 3

$$\sigma^{s+1}(H)(Y) = (YQ_s+Q_{s-1})^m\, H\bigg(\frac{P_sY+P_{s-1}}{Q_sY+Q_{s-1}}\bigg) \tag{25}$$

$$= A_{m,s+1}Y^m+A_{m-1,s+1}Y^{m-1}+\cdots+A_{0,s+1}\ , \tag{26}$$

or par identification entre les coefficients dominants de (25) et (26), on a

$$A_{m,s+1} = \sum_{j=0}^{m} A_j\,P_s^j\,Q_s^{m-j}\ ,$$

ce qui donne

$$\sum_{j=0}^{m} A_j\bigg(\frac{P_s}{Q_s}\bigg)^j = \frac{A_{m,s+1}}{Q_s^m}\ . \tag{27}$$

Montrons maintenant que H admet une racine dans $\mathbf{F}_q((X^{-1}))$.

• S'il existe un entier $n \geq 0$, tel que pour tout entier s, $0 \leq s \leq n$, on a $\deg\sigma^s(H) = \deg H = m$ et $\deg\sigma^{n+1}(H) \neq m$, alors d'après la Remarque 2, une fois que $\deg\sigma^{n+1}(H) \neq m$, on a $A_{m,n+1} = 0$, ce qui donne d'après (27) que le polynôme H admet une racine rationnelle $\frac{P_n}{Q_n}$.

• Si pour tout entier s, on a $\deg\sigma^{s+1}(H) = \deg H = m$, d'après le Lemme 2, on a

$$\bigg|\frac{A_{m,s+1}}{Q_s^m}\bigg| < \frac{|A_{m-1}|^m}{|Q_s|}\ . \tag{28}$$

On considère maintenant la série formelle $f = \lim \frac{P_s}{Q_s} = [a_0; a_1, ..., a_s]$, alors d'après (28) et par passage à la limite dans (27), on obtient

$$\sum_{j=0}^{m} A_j f^j = 0 . \blacksquare$$

Remarque 3. Si H est un polynôme réduit , qui n'admet aucune racine rationnelle, alors pour tout entier s, on a $\deg \sigma^s(H) = \deg H$ et en plus la série formelle $f_t = \lim\limits_{s} [a_t; a_{t+1}, ..., a_s]$ est une racine de $\sigma^t(H)$ (découle directement du Lemme 3). $\square$

Soit maintenant H un polynôme réduitet irréductible sur $\mathbf{F}_q[X][Y]$ de degré ≥ 2, alors H n'admet aucune racine rationnelle. D'après la Remarque 3 et le Lemme 1, on a pour tout entier positif s $\deg \sigma^s(H) = \deg H$ et le polynôme $\sigma^s(H)$ est réduitet irréductible. Soit u une racine de H telle que $[u] \neq 0$ alors u est réduit. Soit $u = [a_0(u); a_1(u), ...]$ le développement en fraction continue de u, soit $u_s = [a_s(u); a_{s+1}(u), ...]$. Alors d'après le Lemme 3, u_s est une racine réduit de $\sigma^s(H)$, alors d'après le Lemme 4, le polynôme $a_s(u)$ ne dépend que des deux premiers coefficients de $\sigma^s(H)$, c'est à dire, il est indépendant du choix de la série formelle u, ce qui donne l'unicité. De plus si f est la solution unique de $H = A_m Y^m + \cdots + A_0$, alors d'après le Lemme 4, $[f] = -[\frac{A_{m-1}}{A_m}]$ et d'après le Lemme 1, $\{f\}^{-1}$ est réduite.

REFERENCES

[1] Artin, E. – Quadratische Körper im Gebiet der höheren Kongruenzen I, II, *Math. Zeitschrift,* 19 (1924), 153–246.

[2] Baum, L.E. et Sweet, M.M. – Continued fraction of algebraic power series in characteristic 2, *Ann. of Math.,* 103 (1976), 593–610.

[3] Baum, L.E. et Sweet, M.M. – Badly approximable power series in characteristic 2, *Ann. of Math.,* 105 (1977), 573–580.

[4] Mkaouar, M. – Sur les fractions continues des séris formelles quadratiques sur $F_2(X)$, *J. of Number Theory,* 80 (2000), 169–173.

Mohamed Mkaouar,
Faculté des Sciences de Sfax, Département de Mathématiques,
Sfax 3038 – TUNISIE
E-mail: mohamed.mkaouar@fss.rnu.tn