PORTUGALIAE MATHEMATICA
Vol. 53 Fasc. 2 – 1996

PERTURBATIONS CONVEXES ET NON CONVEXES DES ÉQUATIONS D'ÉVOLUTION

H. Benabdellah et A. Faik

Abstract: This paper is concerned with the evolution inclusion $x' \in -Ax + F(t,x)$, where A is a m-accretive operator and F is a weakly compact valued multifunction measurable in t, upper semicontinuous in x. We prove the existence of solutions under various assumptions on the operator A and the perturbation F.

0 – Introduction

Dans ce travail on étudie l'existence des solutions pour les perturbations convexes et non convexes des équations d'évolution de la forme $\frac{du}{dt} \in -Au(t) + F(t, u(t))$, où A est un opérateur m-accrétif à valeurs dans un espace de Banach de dual strictement convexe et F une multifonction à valeurs convexes faiblement compactes telle que $\forall\, t$, $F(t, \cdot)$ soit semi-continue supérieurement et $\forall\, x$ $F(\cdot, x)$ admet au moins une sélection measurable via une nouvelle version du théorème de Scorza–Dragoni, due à Castaing–Monteiro Marques [8] et une nouvelle extension du théorème de Dugundji. Les résultats obtenus étendent en particulier ceux donnés dans [1], [4], [5], [15]. On donne aussi un nouveau résultat d'existence des solutions absolument continues pour l'inclusion différentielle:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in F(x(t)), \\ x(0) = x_0 \ , \end{cases}$$

où F est une multifonction semi-continue supérieurement à valeurs faiblement compactes non vides dans un espace de Banach réflexif E séparable et vérifiant

Received: December 19, 1994; *Revised*: January 30, 1996.
Mathematics Subject Classifications (1991): 47H20, 34A60, 54C65.
Keywords: Accretive operator, upper semicontinuous multifunctions, subdifferenial.

l'inclusion suivante:

$$F(Au) \subset \partial(\gamma \circ A)(u)\,, \qquad \forall\, u \in E'\ ,$$

où A est un opérateur linéaire compact "auto-adjoint" de E' dans E et γ est une fonction numérique localement lipschitzienne régulière sur E. Nos techniques permettent également d'obtenir l'existence de solutions des équations de la forme $\frac{du}{dt} \in -\partial\Phi(u(t)) + F(u(t))$, où Φ est une fonction convexe semi-continue inférieurement propre définie sur un espace de Hilbert H telle que, la fonction $x \mapsto \Phi(x) + \|x\|^2$ soit inf-compacte, F est une multifunction semi-continue supérieurement à valeurs compactes non vides de H et vérifiant l'inclusion suivante:

$$F(x) \subset \partial\gamma(x)\,, \qquad \forall\, x \in H\ ,$$

où γ est une fonction convexe continue définie sur H. Les formulations des résultats présentés ici, conduisent à de nouvelles perspectives concernant l'étude des perturbations convexes et non convexes des équations d'évolution dans la ligne des travaux de Cellina–Staicu [10] et Benabdellah–Castaing–Salvadori [3], car la plupart des problèmes de ce type demeurent ouverts.

1 – Notations et préliminaires

Dans tout ce qui suit, nous désignerons par:

- E un espace de Banach séparable muni de la norme $\|\cdot\|$, E' le dual topologique de E et E'_s (resp. E'_b) l'espace vectoriel E' muni de la topologie $\sigma(E', E)$ (resp. la topologie de la norme);
- $\overline{B}(x,r)$ (resp. $B(x,r)$) la boule fermée (resp. boule ouverte) de centre x et de rayon r de E et $\overline{B}_E$ (resp. B_E) la boule unité fermée (resp. boule unité ouverte) de E;
- $\mathrm{cwk}(E)$ (resp. $\mathrm{ck}(E)$) l'ensemble des parties convexes faiblement compactes non vides (resp. l'ensemble des parties convexes compactes non vides) de E;
- $\delta^*(\cdot\,|\,A)$ la fonction d'appui d'une partie A de E.
- Si I est l'intervalle $[0, T]$ de $\mathbb{R}$, λ est la mesure de Lebesgue définie sur I et $\mathcal{L}(I)$ la tribu des parties Lebesgue measurables de I;
- $L^1_E(I)$ l'espace de Banach des fonctions $f : I \to E$ Bochner Lebesgue-intégrables muni de sa norme habituelle et $L^\infty_{E'_s}(I)$ son dual topologique (cf. A. et C. Ionescu Tulcea [18]);

– $\mathcal{C}_E(I)$ l'espace des fonctions continues $u\colon I \to E$ muni de la norme, $\|u\|_\infty = \sup\{\|u(t)\|,\, t \in I\}$;

– Si X est un espace topologique, $\mathcal{B}(X)$ désigne la tribu borélienne de X;

– $\operatorname{co} A$ l'enveloppe convexe d'une partie $A \subset E$.

Définition 1.1. Un opérateur (ou une multifonction) $F\colon X \to E$ est dit *semi-continu supérieurement* (s.c.s.) si pour tout $x_0 \in X$ et tout ouvert W de E tel que $F(x_0) \subset W$, il existe un voisinage $V(x_0)$ de x_0 dans X tel que: $F(V(x_0)) \subset W$.

2 – Résultats fondamentaux

Dans cette section on rappelle et on résume quelques résultats de base qui seront utilisés dans la suite. Le résultat suivant est une version multivoque du théorème de Scorza–Dragoni due à Castaing–Marques (cf. [8], Corollary 2.5).

Théorème 2.1. *Soient $I = [0,T]$ et X un espace Polonais. Soient Y un sous-ensemble convexe compact métrisable d'un espace de Hausdorff localement convexe et $\mathrm{ck}(Y)$ l'ensemble des convexes compacts non vides de Y. Soit $F\colon I \times X \to \mathrm{ck}(Y)$ une multifonction telle que*

i) *Pour tout $t \in I$, la multifonction $x \mapsto F(t,x)$ est de graphe fermé dans $X \times Y$;*

ii) *Pour tout $x \in X$, la multifunction $t \mapsto F(t,x)$ admet une sélection mesurable.*

Alors, il existe une multifonction $F_0\colon I \times X \to \mathrm{ck}(Y) \cup \{\emptyset\}$ dont le graphe appartient à $\mathcal{L}(I) \otimes \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y)$ qui possède les propriétés suivantes:

1) *Il existe un négligeable $N \subset I$ tel que:*

$$F_0(t,x) \subset F(t,x)\,, \qquad \forall\, t \notin N, \;\; \forall\, x \in X \;,$$

2) *Si $u\colon I \to X$ et $v\colon I \to Y$ sont deux applications $\mathcal{L}(I)$-measurables telles que $v(t) \in F(t,u(t))$ p.p. sur I, alors $v(t) \in F_0(t,u(t))$ p.p. sur I;*

3) *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $J_\varepsilon \subset I$, tel que $\lambda(I \backslash J_\varepsilon) < \varepsilon$ et tel que la restriction $F_{0|(J_\varepsilon \times X)}$ soit de graphe fermé et vérifie:*

$$\emptyset \neq F_0(t,x) \subset F(t,x)\,, \qquad \forall\, (t,x) \in J_\varepsilon \times X \;.$$

Avant d'énoncer notre premier résultat, rappelons deux notions classiquement connues. Soient E un espace topologique et U une partie de E,

(1) On appelle *recouvrement localement fini* de U, tout recouvrement d'ouverts $(V_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de U tel que: pour tout $x \in U$, il existe un voisinage ouvert V de x tel que l'ensemble $\{\lambda \in \Lambda\colon V_\lambda \cap V \neq \emptyset\}$ soit fini.

(2) Une famille de fonctions continues $(\Psi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de E vers $[0,1]$ est dite *une partition continue de l'unité* subordonnée au recouvrement $(V_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ si pour tout $\lambda \in \Lambda$, $\mathrm{supp}(\Psi_\lambda) \subset V_\lambda$ et pour tout $x \in V$ on a: $\sum_{\lambda\in\Lambda} \Psi_\lambda(x) = 1$.

Si E est un espace de Banach, U, K deux parties de E et $t \in E$, on pose:

$$\begin{aligned} d(U,K) &= \inf\Big\{\|r-s\|\colon\ s\in K,\ r\in U\Big\}\ , \\ \mathrm{dist}(t,U) &= \inf\Big\{\|t-s\|\colon\ s\in U\Big\}\ . \end{aligned}$$

Le résultat suivant est une version multivoque du théorème classique de Dugundji (cf. [13], chap. 2, Théorème 7.2).

Théorème 2.2. *Soient E et X deux espaces de Banach. Soient $K \subset E$, $D \subset X$ deux fermés non vides et $F : K \times D \to \mathrm{cwk}(X)$ une multifonction semi-continue supérieurement telle que*

$$\forall\,(t,x) \in (K\times D)\,, \qquad F(t,x) \subset c(t)\,(1+\|x\|)\,\overline{B}_X\ ,$$

où c est une fonction positive définie sur K. Soit $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ un recouvrement ouvert localement fini de $(E\backslash K)$ tel que

$$\forall\,\lambda\in\Lambda\,, \qquad 0 < \mathrm{diam}\,U_\lambda \le d(U_\lambda, K)\ .$$

Soit $(\Psi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une partition continue de l'unité de $E\backslash K$ relativement au recouvrement $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Pour tout $\lambda\in\Lambda$, soit $t_\lambda \in K$ tel que

$$\mathrm{dist}(t_\lambda, U_\lambda) < 2\,d(U_\lambda, K)\ .$$

Alors, la multifonction $\widetilde{F}$ définie sur $E\times D$, par:

$$\widetilde{F}(t,x) = \begin{cases} F(t,x), & \text{si } t\in K,\ x\in D, \\ \sum_\lambda \Psi_\lambda(t)\,F(t_\lambda,x), & \text{si } t\in E\backslash K,\ x\in D\ , \end{cases}$$

est une extension semi-continue supérieurement de F à $E\times D$ à valeurs dans $\mathrm{cwk}(X)$. De plus on a $\widetilde{F}(E\times D) \subset \mathrm{co}\,F(K\times D)$ et si c est constante, on a

$\widetilde{F}(t,x) \subset c(1+\|x\|)\,\overline{B}_X$. En particulier, si pour tout (t,x), $F(t,x) \subset C$ où C est un convexe de X, alors $\widetilde{F}(t,x) \subset C$.

Démonstration: 1) Montrons d'abord qu'il existe un recouvrement ouvert localement fini de $E\backslash K$ possédant la propriété citée dans l'énoncé Pour cela, pour tout $t \in E\backslash K$, choisissons $r(t)$ tel que $0 < r(t) < \frac{1}{3}\,\mathrm{dist}(t,K)$ et posons $B_t := B(t, r(t))$ (boule ouverte dans E de centre t et de rayon $r(t)$).

Trivialement, on a: $E\backslash K = \bigcup_{t\in E\backslash K} B_t$. D'autre part, pour tout $t \in E\backslash K$, $\mathrm{diam}\, B_t = 2\,r(t) \le d(B_t, K)$. En effet,

$$\forall\,(t',s) \in B_t \times K, \quad \|t'-s\| \ge \|t-s\| - \|t'-t\| > 2\,r(t)\ .$$

Puisque $E\backslash K$ est un espace paracompact, il existe un sous-recouvrement localement fini $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ du recouvrement ouvert $(B_t)_{t\in E\backslash K}$. Rappelons que ceci signifie que (U_λ) est un recouvrement d'ouverts de $E\backslash K$ tel que pour tout $t \in E\backslash K$, il existe un voisinage V de t tel que $\{\lambda \in \Lambda\colon\ U_\lambda \cap V(t) \ne \emptyset\}$ est fini et pour tout $\lambda \in \Lambda$, il existe $t_\lambda \in E\backslash K$ tel que $U_\lambda \subset B_{t_\lambda}$. Par conséquent,

$$\mathrm{diam}\, U_\lambda \le d(B_{t_\lambda}, K) \le d(U_\lambda, K)\ .$$

2) Soit $\widetilde{F}$ la multifonction définie dans l'énoncé du théorème. Il est clair que $\widetilde{F}|_{K\times D} = F$ et que $\widetilde{F}(E\times D) \subset \mathrm{co}\, F(K\times D)$. De plus pour tout couple $(t,x) \in E\times D$, $\widetilde{F}(t,x) \in \mathrm{cwk}(X)$. En effet si $t \in E\backslash K$, l'ensemble $\Lambda_t := \{\lambda \in \Lambda\colon \Psi_\lambda(t) \ne 0\}$ est fini. Par suite, pour tout $x \in D$, l'ensemble $\widetilde{F}(t,x)$ est combinaison convexe finie d'ensembles $F(t_\lambda, x) \in \mathrm{cwk}(X)$, $\lambda \in \Lambda_t$.

Prouvons maintenant que $\widetilde{F}$ est semi-continue supérieurement sur $E\times D$. Nous allons procéder en plusieurs étapes:

(a) Montrons que $\widetilde{F}$ est s.c.s. sur l'ouvert relatif $(E\backslash K)\times D$. Pour cela soit $(t_0,x_0) \in (E\backslash K)\times D$ fixé, choisissons $V(t_0)$ un voisinage de t_0 avec $V(t_0) \subset E\backslash K$ tel que l'ensemble $\{\lambda \in \Lambda\colon\ U_\lambda \cap V(t_0) \ne \emptyset\}$ soit fini, disons égal à $\{\lambda_0, ..., \lambda_p\}$. On a

$$c(t_{\lambda_i})\,(1+\|x\|) < \max_{0\le i\le p} c(t_{\lambda_i})\,(2+\|x\|)\ .$$

Considérons, alors un réel $M > 0$ tel que

$$M > \max_{0\le i\le p} c(t_{\lambda_i})\,(2+\|x_0\|)\ .$$

Puisque chaque fonction Ψ_{λ_i} est continue en t_0 et chaque $F(t_{\lambda_i},\cdot)$ est s.c.s. en x_0, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta \in]0,1]$ tel que $B(t_0,\delta) \subset V(t_0) \subset E\backslash K$ et

$\forall\,(t,x) \in B(t_0,\delta) \times (D \cap B(x_0,\delta))$, on a:

$$\Big|\Psi_{\lambda_i}(t) - \Psi_{\lambda_i}(t_0)\Big| < \frac{\varepsilon}{M(p+1)} \qquad \text{et} \qquad F(t_{\lambda_i},x) \subset F(t_{\lambda_i},x_0) + \varepsilon\,\overline{B}_X \ .$$

On a $c(t_{\lambda_i})\,(1+\|x\|) \le c(t_{\lambda_i})\,(2+\|x_0\|) < M$ et

$$\Psi_{\lambda_i}(t)\,F(t_{\lambda_i},x) \subset \Psi_{\lambda_i}(t_0)\,F(t_{\lambda_i},x) + \Big(\Psi_{\lambda_i}(t) - \Psi_{\lambda_i}(t_0)\Big)\,F(t_{\lambda_i},x) \ .$$

Donc,

$$\begin{aligned}\Psi_{\lambda_i}(t)\,F(t_{\lambda_i},x) &\subset \Psi(\lambda_i)(t_0)\Big[F(t_{\lambda_i},x_0) + \varepsilon\,\overline{B}_X\Big] + \frac{\varepsilon}{M(p+1)}\,c(t_{\lambda_i})\,(1+\|x\|)\,\overline{B}_X \\ &\subset \Psi_{\lambda_i}(t_0)\,F(t_{\lambda_i},x_0) + \left(\Psi_{\lambda_i}(t_0) + \frac{1}{p+1}\right)\varepsilon\,\overline{B}_X \ .\end{aligned}$$

D'autre part, si $t \in B(t_0,\delta) \subset V(t_0)$ alors Λ_t est contenu dans $\{\lambda_0,...,\lambda_p\}$, car pour tout λ le support de chaque fonction Ψ_λ est contenu dans U_λ. Donc pour tout couple $(t,x) \in B(t_0,\delta) \times (D \cap B(x_0,\delta))$, on a:

$$\begin{aligned}\widetilde{F}(t,x) &= \sum_{i=0}^{p} \Psi_{\lambda_i}(t)\,F(t_{\lambda_i},x) \subset \\ &\subset \sum_{i=0}^{p}\left[\Psi_{\lambda_i}(t_0)\,F(t_{\lambda_i},x_0) + \left(\Psi_{\lambda_i}(t_0) + \frac{1}{p+1}\right)\varepsilon\,\overline{B}_X\right] \ .\end{aligned}$$

Par suite, $\forall\,(t,x) \in B(t_0,\delta) \times (D \cap B(x_0,\delta))$, on a:

$$\widetilde{F}(t,x) \subset \widetilde{F}(t_0,x_0) + 2\,\varepsilon\,\overline{B}_X \ .$$

(b) Puisque la multifonction F est s.c.s. sur $K \times D$, alors $\widetilde{F}$ l'est aussi sur l'ouvert relatif $(\operatorname{int} K) \times D$ (si cet ensemble n'est pas vide).

(c) Montrons que $\widetilde{F}$ est s.c.s. en chaque point $(t_0,x_0) \in \partial K \times D$, où ∂K est la frontière de K. Soit $\varepsilon > 0$, puisque $\widetilde{F} = F$ sur $K \times D$ et que la multifonction F est s.c.s., il existe un réel $\delta > 0$ tel que $\forall\,(t,x) \in B(t_0,\delta) \times (D \cap B(x_0,\delta))$, on a:

(2.2.1) $$F(t,x) \subset F(t_0,x_0) + \varepsilon\,\overline{B}_X \ .$$

Nous allons montrer que pour tout $t \in (E\backslash K) \cap B(t_0,\frac{\delta}{4})$ et tout $x \in D \cap B(x_0,\delta)$, on a: $\widetilde{F}(t,x) \subset \widetilde{F}(t_0,x_0) + \varepsilon\,\overline{B}_X$, ce qui compte tenu de (2.2.1) achèvera la démonstration. Soit $t \in E\backslash K$ tel que $\|t-t_0\| < \frac{\delta}{4}$. Le choix de t_λ et de l'estimation sur le diamètre de U_λ impliquent que pour tout $\lambda \in \Lambda$ tel que $\Psi_\lambda(t) \neq 0$ ($t \in U_\lambda$), on a:

$$\|t - t_\lambda\| \leq \operatorname{dist}(t_\lambda, U_\lambda) + \operatorname{diam} U_\lambda \leq 3\, d(U_\lambda, K) \ .$$

D'où, $\|t - t_\lambda\| \leq 3\,\|t - t_0\|$. Il s'ensuit que $\|t_\lambda - t_0\| \leq 4\,\|t - t_0\| < \delta$. Comme $t_\lambda \in K$, (2.2.1) implique que:

$$\forall\, x \in D \cap B(x_0, \delta)\,, \qquad F(t_\lambda, x) \subset F(t_0, x_0) + \varepsilon\, \overline{B}_X \ .$$

Donc, pour tout $t \in (E \backslash K) \cap B(t_0, \frac{\delta}{4})$ et tout $x \in D \cap B(x_0, \delta)$, on a:

$$\widetilde{F}(t, x) \subset \sum_\lambda \Psi_\lambda(t) \left[F(t_0, x_0) + \varepsilon\, \overline{B}_X\right] .$$

Par suite, $\widetilde{F}(t, x) \subset F(t_0, x_0) + \varepsilon\, \overline{B}_X = \widetilde{F}(t_0, x_0) + \varepsilon\, \overline{B}_X$. Ceci termine la démonstration. ∎

Rappelons maintenant quelques définitions nécessaires dans l'étude des équations d'évolution (cf. Bénilan–Brezis [4] et Vrabie [19]). Soit H un espace de Hilbert.

Définition 2.3. Une fonction $\Phi\colon H \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ est *inf-compacte* si pour tout $r > 0$, l'ensemble $I_r = \{x \in H\colon \Phi(x) \leq r\}$ est compacte dans H.

Remarque 2.4. D'après un résultat de Konishi et Brézis (cf. [19], Proposition 2.2.2, p. 57), si la fonction $x \mapsto \Phi(x) + \|x\|^2$ est inf-compacte, alors le semi-groupe engendré par $\partial\Phi$ (cf. [19]) est compacte sur $\overline{\operatorname{dom} \partial\Phi}$, i.e. l'opérateur $\partial\Phi$ est de type compact.

Soit $F\colon I \times H \to \operatorname{ck}(H)$ une multifonction à valeurs convexes compactes dans H, et $\Phi\colon H \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ une fonction convexe, semi-continue inférieurement et propre. On considère le problème d'évolution suivant:

$$(\mathrm{P}_1) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) \in -\partial\Phi(u(t)) + F(t, u(t)) & \text{p.p. sur } \ I\ , \\ u(0) = u_0 \in \overline{\operatorname{dom} \partial\Phi}\ . \end{cases}$$

Définition 2.5. Une fonction continue $u\colon I \to H$ est appelée *solution forte* du problème (P_1) si elle vérifie les conditions suivantes:

i) u est absolument continue sur tout sous-intervalle compact de $]0, T[$ (donc p.p. différentiable), $u(t) \in \overline{\operatorname{dom} \partial\Phi}$ p.p. sur I et $u(0) = u_0$;

ii) Il existe une fonction $f \in L^2_H(I)$ telle que pour presque tout $t \in I$, on ait:

$$f(t) \in F(t, u(t)) \quad \text{et} \quad \frac{du}{dt}(t) \in -\partial\Phi(u(t)) + f(t) \ .$$

Remarque 2.6. La condition ii) équivaut à dire que u est solution forte au sens de Brézis [4] du problème d'évolution

$$(\mathrm{P}_2) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) \in -\partial\Phi(u(t)) + f(t) \quad \text{p.p. sur } \ I \ , \\ u(0) = u_0 \in \overline{\operatorname{dom} \partial\Phi} \ . \end{cases}$$

Rappelons le résultat suivant que est dû à Brézis (cf. [4], [6], [7]).

Théorème 2.7. *Soient H un espace de Hilbert et $\Phi :\ H \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ une fonction convexe semi-continue inférieurement, propre telle que la fonction $x \mapsto \Phi(x) + \|x\|^2$ soit inf-compacte. Si $f \in L^2_H(I)$, alors pour tout $u_0 \in \overline{\operatorname{dom} \partial\Phi}$, l'équation* (P_2) *admet une unique solution forte dans $\mathcal{C}_E(I)$ vérifiant:*

1) *$t \mapsto \sqrt{t}\,\frac{du}{dt} \in L^2_H(I)$ et la fonction $t \mapsto \Phi(u(t))$ est absolument continue sur tout sous-intervalle compact de l'intervalle* $]0, T]$.

2) $\left|\dfrac{du(t)}{dt}\right|^2 + \dfrac{d\Phi(u(t))}{dt} = \left\langle f(t), \dfrac{du(t)}{dt}\right\rangle$ *p.p. sur* $]0, T[$.

3) *Si $u(0) \in \operatorname{dom} \Phi$ et $\Phi \geq 0$, alors:*

a) $\frac{du}{dt} \in L^2_H$,

b) $|\frac{du}{dt}|_{L^2} \leq |f|_{L^2} + \sqrt{\Phi(u_0)}$,

c) *$t \mapsto \Phi(u(t))$ est absolument continue sur I.*

Nous désignerons dans tout ce qui suit par u_f l'unique solution forte du problème (P_2) associée à la perturbation f.

Soit maintenant E un espace de Banach séparable. Pour tout couple (x, y) d'éléments de E, on pose

$$\langle x, y\rangle_+ := \sup\{\langle y, x'\rangle :\ x' \in j(x)\}$$

où j est l'application de dualité de E définie par

$$j(x) := \Big\{x' \in E' :\ \langle x, x'\rangle = \|x\|^2 = \|x'\|^2\Big\}, \qquad \forall\, x \in E \ ,$$

l'ensemble $\{x' \in E' :\ \langle x, x'\rangle = \|x\|^2 = \|x'\|^2\}$ est non vide (d'après le théorème de Hahn–Banach).

Définition 2.8. Un opérateur A défini sur E est dit *m-accrétif* s'il vérifie les deux propriétés suivantes:

i) Pour tout (x_i, y_i) $(i = 1, 2)$, avec $y_i \in Ax_i$, on a: $\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle_+ \geq 0$;

ii) L'application $I + A$ est surjective.

Considérons le problème d'évolution suivant:

$$(\mathrm{P}_3) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) \in -Au(t) + F(t, u(t)) & \text{p.p. sur } I\ , \\ u(0) = u_0 \in \overline{\operatorname{dom} A}\ , \end{cases}$$

où A est un opérateur m-accrétif de domaine $\operatorname{dom} A$, $F\colon\ I \times \overline{\operatorname{dom} A} \to \operatorname{ck}(E)$ une multifonction telle que, pour tout $t \in I$, $F(t, \cdot)$ est semi-continue supérieurement, et pour tout $x \in \operatorname{dom} A$, $F(\cdot, x)$ admet une sélection mesurable.

Définition 2.9. Une fonction continue $u : I \to E$ est appelée *solution intégrale* de l'équation (P_3) s'il existe une fonction $f \in L^1_E(I)$ telle que

i) $u(0) = u_0 \in \overline{\operatorname{dom} A}$ et pour tout $t \in I$, $u(t) \in \overline{\operatorname{dom} A}$;

ii) $f(t) \in F(t, u(t))$ p.p. sur I;

iii) Pour tout $x \in \operatorname{dom} A$, tout $y \in Ax$ et tous $s, t \in I$ avec $0 \leq s \leq t \leq T$, on a l'inégalité suivante:

$$(2.9.1) \qquad \|u(t) - x\|^2 \leq \|u(s) - x\|^2 + 2 \int_s^t \langle f(t) - y,\, u(t) - x \rangle_+ \, dt$$

(cf. Vrabie [19], Remarque I.7.1).

Introduisons la définition suivante:

Définition 2.10. Un opérateur m-accrétif A est dit *de type compact* si, pour tout ensemble uniformément intégrable $\mathcal{H}$ dans $L^1_E(I)$, l'ensemble $\mathcal{X} := \{u_f,\ f \in \mathcal{H}\}$ où u_f est l'unique solution intégrale de

$$(\mathrm{P}_4) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) \in -Au(t) + f(t) & \text{p.p. sur } I\ , \\ u(0) = u_0 \in \overline{\operatorname{dom} A}\ . \end{cases}$$

est relativement compact dans $\mathcal{C}_E(I)$.

Ceci étant, rappelons les deux résultats suivants (cf. [14], chap. I):

Lemme 2.11. *On suppose que le dual fort de E est strictement convexe et que A est un opérateur m-accrétif de type compact. Soient Γ une multifonction mesurable, intégrablement bornée, définie sur I à valeurs dans $\mathrm{ck}(E)$, S^1_Γ l'ensemble des sélections intégrables de Γ et $\mathcal{X} := \{u_f,\ f \in S^1_\Gamma\}$ où u_f est l'unique solution intégrale de l'équation* (P_4)*. Alors l'application $f \mapsto u_f$ est continue de S^1_Γ dans $\mathcal{X}$ lorsque S^1_Γ est muni de la topologie faible $\sigma(L^1_E(I), L^\infty_{E'_s}(I))$ et $\mathcal{X}$ de la topologie de la convergence uniforme sur $\mathcal{C}_E(I)$.*

Théorème 2.12. *Soient E et A vérifiant les hypothèses précédentes et F une multifonction de $I \times \overline{\mathrm{dom}\, A}$ à valeurs dans $\mathrm{ck}(E)$ telle que:*

i) *Pour tout $x \in \overline{\mathrm{dom}\, A}$, $F(\cdot, x)$ est mesurable;*

ii) *Pour tout $t \in I$, $F(t, \cdot)$ est semi-continue supérieurement;*

iii) *Il existe une fonction $c \in L^1_{\mathbb{R}^+}(I)$ et un ensemble convexe compact équilibré $K \subset E$ tels que, pour tout $(t, x) \in I \times \overline{\mathrm{dom}\, A}$, on a:*

$$F(t, x) \subset c(t)\,(1 + \|x\|)\, K\ .$$

Alors pour tout $u_0 \in \mathrm{dom}\, A$, l'ensemble des solutions intégrales de l'équation (P_3) *est non vide et compact dans $\mathcal{C}_E(I)$.*

Démonstration: A. Faïk ([14], chap. I). ∎

3 – Résultats d'existence

Munis des outils et résultats énoncés dans la section précédente, on est en mesure de présenter dans ce paragraphe des théorèmes d'existence de solutions pour des problèmes d'évolution avec des perturbations convexes et non convexes.

Théorème 3.1. *Soient H un espace de Hilbert séparable et $\Phi : H \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ une fonction convexe, semi-continue inférieurement et propre telle que la fonction $\Phi(\cdot) + \|\cdot\|^2$ soit inf-compacte. Soient K un ensemble convexe compact dans H et $F\colon I \times H \to \mathrm{ck}(H)$ une multifonction tels que:*

i) *Pour tout $(t, x) \in I \times H$, $F(t, x) \subset K$;*

ii) *Pour tout $t \in I$, la multifonction $F(t, \cdot)$ est semi-continue supérieurement;*

iii) *Pour tout $x \in H$, la multifonction $t \mapsto F(t, x)$ admet une sélection mesurable.*

Alors pour tout $u_0 \in \overline{\operatorname{dom} \partial\Phi}$, l'équation

$$(\mathrm{P}_1) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) \in -\partial\Phi(u(t)) + F(t, u(t)) & \textit{p.p. sur } I \ , \\ u(0) = u_0 \in \overline{\operatorname{dom} \partial\Phi} \ , \end{cases}$$

admet au moins une solution forte.

Démonstration: En vertu du Théorème 2.1, il existe une multifonction de graphe mesurable $F_0 \colon I \times H \to \operatorname{ck}(H) \cup \{\emptyset\}$ vérifiant:

(**a**) Il existe un négligeable N indépendant de $(t, x) \in I \times H$ tel que

$$F_0(t, x) \subset F(t, x) \,, \qquad \forall\, (t, x) \in (I \backslash N) \times H \ ;$$

(**b**) Si u et v sont deux fonctions mesurables de I dans H telles que $v(t) \in F(t, u(t))$ p.p. sur I, alors $v(t) \in F_0(t, u(t))$ p.p. sur I;

(**c**) Pour tout $n > 0$, il existe un compact $J_n \subset I$, avec $\lambda(I \backslash J_n) < \frac{1}{n}$, el que la restriction $F_{0|_{(J_n \times H)}}$ soit semi-continue supérieurement et telle que

$$\emptyset \neq F_0(t, x) \subset F(t, x) \,, \qquad \forall\, (t, x) \in J_n \times H \ .$$

Ainsi (c) implique l'existence d'une suite croissante de compacts $(J_n)_{n \geq 1}$ dans I, telle que pour tout $n > 0$, $F_{0|_{(J_n \times H)}}$ est s.c.s. à valeurs convexes, compactes non vides dans H. Donc en vertu du Théorème 2.2, pour tout $n > 0$, la multifonction $F_{0|_{(J_n \times H)}}$ admet une extension s.c.s. $\widetilde{F}_n \colon I \times H \to \operatorname{ck}(H)$ telle que:

$$(3.1.1) \qquad \widetilde{F}_n(t, x) \subset K \ \text{ sur } I \times H \quad \text{ et } \quad \widetilde{F}_n(t, x) = F_0(t, x) \ \text{ sur } J_n \times H \ .$$

Par suite, pour tout $n > 0$, d'après un résultat dû à Attouch et Damlamian (cf. [1], Théorème 4.1), on a: pour tout $u_0 \in \overline{\operatorname{dom} \partial\Phi}$, on peut trouver une fonction $u_n \in \mathcal{C}_E(I)$ qui est une solution forte de l'équation:

$$\begin{cases} \dfrac{du_n}{dt}(t) \in -\partial\Phi(u_n(t)) + \widetilde{F}_n(t, u_n(t)) & \text{p.p. sur } I \ , \\ u_n(0) = u_0 \in \overline{\operatorname{dom} \partial\Phi} \ . \end{cases}$$

Donc u_n est absolument continue sur tout sous-intervalle compact de $]0, T[$ et il existe une fonction mesurable $f_n \colon I \to H$ telle que:

$$(3.1.2) \qquad f_n(t) \in \widetilde{F}_n(t, u_n(t)) \ \text{ et } \ \frac{du_n}{dt}(t) \in -\partial\Phi(u_n(t)) + f_n(t) \quad \text{ p.p. sur } I \ .$$

En vertu de (3.1.1), la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ demeure dans l'ensemble faiblement compact $S_K^2 = \{f \in L_H^2(I) \colon f(t) \in K \text{ p.p.}\}$. Par suite, il existe une sous-suite (f_{n_k}) qui converge faiblement vers une fonction $f \in S_K^2$. Donc en vertu de [1], Proposition 4.2, la sous-suite (u_{n_k}) de $(u_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers une fonction u_f dans $\mathcal{C}_E(I)$ telle que u_f est la solution forte de l'équation:

$$\frac{du_f}{dt}(t) \in -\partial\Phi(u_f(t)) + f(t) \quad \text{p.p. sur } I \qquad \text{et} \qquad u(0) = u_0\,, \qquad f \in S_K^2\ .$$

Pour terminer la démonstration, il suffit donc de montrer que $f(t) \in F(t, u_f(t))$ p.p.. D'après (3.1.2) pour tout $n > 0$, il existe un ensemble négligeable $N_n \subset I$ tel que pour tout $t \notin N_n$, $f_n(t) \in \widetilde{F}_n(t, u_n(t))$.

Posons $N_0 = (I \backslash (\bigcup_n J_n)) \cup (\bigcup_n N_n)$, donc pour tout $t \notin N_0$ fixé, il existe un entier $p(t) > 0$ tel que pour tout $n \geq p(t)$, $t \in J_n \backslash N_n$ et $f_n(t) \in F_0(t, u_n(t))$. Par suite, grâce à la semi-continuité supérieure de F_0, on a:

$$\forall\, y \in H, \quad \limsup_{n\to\infty} \delta^*(y, F_0(t, u_n(t))) \leq \delta^*(y, F_0(t, u_f(t)))\ .$$

Donc pour tout $t \notin N_0$, on a: $\limsup_n \langle y, f_n(t)\rangle \leq \delta^*(y, F_0(t, u_f(t)))$. Comme la fonction $t \mapsto \delta^*(y, F_0(t, u(t)))$ est mesurable, il résulte du lemme de Fatou que pour tout partie Lebesgue mesurable B de I, on a:

$$\int_B \langle y, f(t)\rangle\, dt = \lim_{n\to\infty} \int_B \langle y, f_n(t)\rangle\, dt \leq \int_B \delta^*(y, F_0(t, u_f(t)))\, dt\ .$$

D'où $f(t) \in F_0(t, u_f(t)) \subset F(t, u_f(t))$ p.p. sur I. Ceci termine la démonstration. ∎

Le théorème suivant fournit un critère d'existence de solutions intégrales pour des problèmes d'évolution classiques de type (P_3) (cf. [15], [19]) avec une perturbation convexe.

Théorème 3.2. *Soient E un espace de Banach séparable dont le dual fort est strictement convexe, et A un opérateur m-accrétif de type compact défini sur E. Soit F une multifonction définie sur $I \times \overline{\mathrm{dom}\, A}$ à valeurs dans $\mathrm{ck}(E)$ telle que:*

i) *Il existe un sous-ensemble convexe compact K dans E tel que*

$$\forall\, (t,x) \in I \times \overline{\mathrm{dom}\, A}\,, \qquad F(t,x) \subset K\ ;$$

ii) *Pour tout $t \in I$, la multifonction $F(t,\cdot)$ est de graphe fermé dans $E \times K$;*

iii) *Pour tout $x \in \overline{\mathrm{dom}\, A}$, la multifonction $F(\cdot,x)$ admet une sélection mesurable.*

Alors pour tout $u_0 \in \operatorname{dom} A$, *l'équation*

$$(\mathrm{P}_3) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) \in -Au(t) + F(t, u(t)) & \textit{p.p. sur } I \ , \\ u(0) = u_0 \in \overline{\operatorname{dom} A} \ , \end{cases}$$

admet une solution intégrale dans $\mathcal{C}_E(I)$.

Démonstration: Comme dans la démonstration du Théorème 3.1, en vertu des hypothèses et du Théorème 2.1, il existe une suite croissante de compacts $(J_n)_{n \geq 1}$ dans I et une multifonction $F_0 \colon I \times \overline{\operatorname{dom} A} \to \operatorname{ck}(E)$ telles que

a) Il existe un négligeable N indépendant de $(t, x) \in I \times \overline{\operatorname{dom} A}$ tel que

$$F_0(t, x) \subset F(t, x) \, , \qquad \forall \, (t, x) \in (I \backslash N) \times \overline{\operatorname{dom} A} \ ,$$

b) Si u et v sont deux fonctions mesurables de I dans E telles que $v(t) \in F(t, u(t))$ p.p. sur I, alors $v(t) \in F_0(t, u(t))$ p.p. sur I,

c) Pour tout $n > 0$, $\lambda(I \backslash J_n) < \frac{1}{n}$ et la restriction $F_0|_{(J_n \times \overline{\operatorname{dom} A})}$ est s.c.s..

En vertu du Théorème 2.2, il existe une suite de multifonctions s.c.s. $(\widetilde{F}_n)_{n \geq 1}$ définies sur $I \times \overline{\operatorname{dom} A}$ à valeurs dans $\operatorname{ck}(E)$ telles que

$$(3.2.1) \qquad \begin{cases} \widetilde{F}_n(t, x) \subset K & \text{sur } I \times \overline{\operatorname{dom} A}, \\ \widetilde{F}_n(t, x) = F_0(t, x) & \text{sur } J_n \times \overline{\operatorname{dom} A} \ . \end{cases}$$

Chaque $\widetilde{F}_n$ vérifie les hypothèses du Théorème 2.12, donc on peut trouver une fonction continue $u_n \colon I \to E$, solution intégrale de l'équation:

$$(3.2.2) \qquad \begin{cases} \dfrac{du_n}{dt}(t) \in -Au_n(t) + \widetilde{F}_n(t, u_n(t)) & \text{p.p. sur } I \ , \\ u_n(0) = u_0 \in \overline{\operatorname{dom} A} \ . \end{cases}$$

Par suite, il existe une fonction mesurable $f_n \colon I \to E$ telle que

$$(3.2.3) \qquad f_n(t) \in \widetilde{F}_n(t, u_n(t)) \quad \text{p.p. sur } I$$

et u_n est solution intégrale de l'équation

$$\frac{du_n}{dt}(t) \in -Au_n(t) + f_n(t) \ \text{ p.p. sur } I \, , \qquad u_n(0) = u_0 \in \overline{\operatorname{dom} A} \ .$$

D'après (3.2.1) et (3.2.2), $f_n(t) \in K$ p.p. sur I. Comme l'ensemble $S_K^1 = \{v \in L_E^1 \colon v(t) \in K \text{ p.p.}\}$ est $\sigma(L_E^1(I), L_{E_s'}^\infty(I))$-compact (cf. [9], Corollaire V.4), il existe une sous-suite $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ qui converge faiblement vers une fonction $f \in L^1_E$ telle que $f(t) \in K$ p.p. sur I.

En vertu du Lemme 2.11 la fonction $g \mapsto u_g$ (où u_g est l'unique solution intégrale de (P$_4$)) est continue pour la topologie faible $\sigma(L^1_E(I), L^\infty_{E'_s}(I))$ sur S^1_K et la topologie de convergence uniforme de $\mathcal{C}_E(I)$ sur $\mathcal{X} = \{u_g\colon\ g \in S^1_K\}$. Donc la sous-suite $(u_{n_k})_{k\geq 1}$ des solutions intégrales des problèmes

$$\frac{du_{n_k}}{dt}(t) \in -Au_{n_k}(t) + f_{n_k}(t) \quad \text{sur } I\,, \qquad u_{n_k}(0) = u_0 \in \overline{\operatorname{dom} A}\ ,$$

converge uniformément vers la fonction u_f qui est l'unique solution intégrale de l'équation (P$_4$).

Pour terminer la démonstration, on montre que $f(t) \in F(t, u(t))$ p.p. sur I, en procédant de la même manière que pour le Théorème 3.1. Donc u_f est une solution intégrale de (P$_3$). ∎

Remarque 3.3. Les deux résultats précédents restent valables si l'on remplace la condition i) par

$$\textbf{i)}'\quad F(t,x) \subset (1 + \|x\|)\, K\,, \qquad \forall\, (t,x) \in I \times E\ ,$$

dans le cas où $\operatorname{dom} A$ et $\operatorname{dom} \Phi$ sont bornés.

Pour terminer cette section, nous étudierons l'existence de solutions de l'inclusion différentielle suivante

$$(\mathrm{P}_5) \qquad \begin{cases} \dot{x}(t) \in F(x(t)) & \text{p.p. sur } I\ , \\ x(0) = x_0\ , \end{cases}$$

où F est une multifonction s.c.s. définie sur un espace de Banach réflexif E à valeurs compactes et non vides de E, vérifiant la condition

$$(*) \qquad \forall\, u \in E'\,, \qquad F(Au) \subset \partial(\gamma \circ A)(u)\ ,$$

où A est un opérateur linéaire compact “auto-adjoint” de E' vers E, γ est une fonction numérique localement lipschitzienne sur E et $\partial(\gamma \circ A)(u)$ est le gradient généralisé de Clarke de $\gamma \circ A$ en u. Notons que lorsque $\dim E < +\infty$, γ convexe et $A = \mathrm{id}_E$, la condition $(*)$ se réduit à celle de Bressan–Cellina–Colombo [5]. En outre la méthode de discrétisation et les hypothèses prises ici sont nouvelles par rapport à celles utilisées dans [2] (là où les solutions sont obtenues au moyen du lemme de Zorn).

Introduisons d'abord quelques notations. Soient $I = [0,T] \subset \mathbb{R}^+$ et ON_d l'ensemble des nombres ordinaux dénombrables (cf. e.g. Dellacherie–Meyer [12], §0.8).

Définitions 3.4. **1**) Nous appelerons *subdivision généralisée* de I, toute suite $(t_\alpha)_{\alpha\leq\lambda}$ d'éléments de I, avec $\lambda \in ON_d$ telle que $t_0 = 0$, $t_\lambda = T$ et

$$\begin{cases} t_\alpha \leq t_\beta & \text{si } \alpha < \beta, \\ t_\alpha = \sup_{\beta<\alpha} t_\beta & \text{si } \alpha \text{ est un ordinal limite .} \end{cases}$$

Il est alors facile de montrer que $[0,T[= \bigcup_{\alpha<\lambda}[t_\alpha, t_{\alpha+1}[$ (réunion disjointe).

2) Pour $\varepsilon > 0$, on dénote par $E_\varepsilon(I)$ l'ensemble des fonctions $\theta\colon I \to I$ telles qu'il existe une subdivision généralisée $(t_\alpha)_{\alpha\leq\lambda}$ de I telle que

i) $\forall\, \alpha < \lambda$, $t_{\alpha+1} \in]t_\alpha, t_\alpha + \varepsilon]$;

ii) Pour tout $t \in [0,T[$, $\theta(t) = t_\alpha$ si $t \in [t_\alpha, t_{\alpha+1}[$ (pour $\alpha < \lambda$) et $\theta(T) = T$.

Remarque 3.5. Les éléments θ formant l'ensemble $E_\varepsilon(I)$, sont des fonctions croissantes telles que:

$$\forall\, t \in I\,, \qquad \theta(t) \leq t < \theta(t) + \varepsilon\ .$$

Dans ce qui suit, E est un espace de Banach réflexif séparable et pour toute partie B de E, on note par $\overline{B}^\sigma$ l'adhérence de B par à la topologie faible $\sigma(E', E)$.

Soit $A\colon\ E' \to E$ un opérateur *linéaire fortement compact auto-adjoint* (i.e. $A^* = A$, en identifiant E avec son bidual E'') tel que

$$\forall\, u \in E'\backslash\{0\}\,, \qquad \langle u, Au\rangle > 0\ .$$

Donnons un exemple d'un opérateur vérifiant de telles propriétés: Soit $(e_n)_{n\geq1}$ une suite dense dans $\overline{B}_E$ et l'opérateur A défini sur E' par

$$Ax' := \sum_{n\geq1} 2^{-n}\,\langle x', e_n\rangle\, e_n\,, \qquad \forall\, x' \in E'\ ,$$

il est alors facile de montrer que A est un opérateur linéaire compact auto-adjoint vérifiant les hypothèses requises.

Soit $\gamma\colon\ E \to \mathbb{R}$ une fonction localement lipschitzienne, alors *la dérivée directionnelle généralisée* de γ en un point $x \in E$ suivant la direction v notée $\gamma^0(x,v)$ est définie par

$$\gamma^0(x,v) = \limsup_{\substack{y\to x\\ t\to0}} \frac{\gamma(y+tv) - \gamma(y)}{t}$$

(cf. [11], Chap. II, p. 24).

Ceci étant, rappelons la définition suivante:

Définition 3.6. Soit $\gamma\colon E \to \mathbb{R}$ une fonction localement lipschitzienne. On dit que γ est une fonction *régulière* en un point $x \in E$ si pour tout $v \in E$, la dérivée directionnelle

$$\gamma'(x,v) = \limsup_{t\to 0} \frac{\gamma(x+tv)-\gamma(x)}{t}$$

existe, et on a $\gamma'(x,v) = \gamma^0(x,v)$ (cf. [11], Chap. II, §2.3).

Théorème 3.7. *Soient $\gamma\colon E \to \mathbb{R}$ une fonction localement lipschitzienne régulière et F une multifonction s.c.s. définie sur E à valeurs compactes non vides de E telle que*

$$(*) \qquad \forall\, u \in E', \quad F(Au) \subset \partial(\gamma \circ A)(u)\ .$$

Alors pour tout $x_0 \in A(E')$, il existe $T > 0$ et une fonction $x\colon [0,T] \to E$ absolument continue et solution du problème (P_5).

Démonstration: Comme le sous-différentiel d'une application localement lipschitzienne est localement borné, il existe $r > 0$ et $L > 0$ tels que, pour tout $x \in \overline{B}(x_0,r)$, $\partial\gamma(x) \subset L\overline{B}_{E'}$ (où $\overline{B}_{E'}$ est la boule unité fermée de E').

D'après le choix de A, l'ensemble $K := A(L\overline{B}_{E'})$ est convexe compact dans E, donc contenu dans un certaine boule $B(0,R)$ $(R > 0)$ de E. Choisissons $T > 0$ tel que $RT < r$ et posons $I = [0,T]$. On a besoin d'abord d'un lemme techniquement difficile.

Lemme 3.8. *Avec les hypothèses et notations ci-dessus, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\theta_\varepsilon \in E_\varepsilon(I)$, $x_\varepsilon \in \mathcal{C}_E(I)$ et $u_\varepsilon \in L^\infty_{E'_s}(I)$ tels que*

$$(3.8.1) \qquad x_\varepsilon(t) = x_0 + \int_0^t Au_\varepsilon(s)\,ds \ \text{ et } \ x_\varepsilon(t) \in \overline{B}(x_0,r)\,, \qquad \forall\, t \in I\ ,$$

pour presque tout $t \in I$, on a:

$$(3.8.2) \qquad u_\varepsilon(t) \in \partial\gamma(x_\varepsilon(\theta_\varepsilon(t))) \quad \text{et} \quad Au_\varepsilon(t) \in F(x_\varepsilon(\theta_\varepsilon(t)))\ ,$$

$$(3.8.3) \qquad \gamma(x_\varepsilon(T)) - \gamma(x_0) \geq \int_0^T \langle u_\varepsilon(s), Au_\varepsilon(s)\rangle\,ds - \varepsilon T\ .$$

Démonstration du lemme: Soit τ le premier ordinal non dénombrable. Nous allons construire par induction une suite $(t_\alpha)_{\alpha<\tau}$ dans I, deux suites de fonctions $u_\alpha \in L^\infty_{E'_s}([0,t_\alpha])$ et $x_\alpha \in \mathcal{C}_E([0,t_\alpha])$ (avec $\alpha < \tau$) telles que

$$t_\beta \le t_\alpha, \quad u_{\alpha|[0,t_\beta]} = u_\beta \ \text{ et } \ x_{\alpha|[0,t_\beta]} = x_\beta, \qquad \text{pour } \ \beta < \alpha < \tau \ , \tag{3.8.4}$$

$$\forall\, t \in [0,t_\alpha], \quad u_\alpha(t) \in L\overline{B}_{E'_s} \ \text{ et } \ x_\alpha(t) \in \overline{B}(x_0,r) \quad \text{avec} \tag{3.8.5}$$

$$x_\alpha(t) = x_0 + \int_0^t Au_\alpha(s)\,ds, \qquad \text{pour } \ \alpha < \tau \ .$$

Pour $\alpha = \beta + 1$,

si $t_\beta = T$, alors $t_\alpha = t_\beta = T$, $u_\alpha = u_\beta$ et $x_\alpha = x_\beta$,

si $t_\beta < T$, alors $t_\alpha \in]t_\beta, t_\beta + \varepsilon]$ et il existe $u^0_\alpha \in \partial\gamma(x_\beta(t_\beta))$ tel que $Au^0_\alpha \in F(x_\beta(t_\beta))$ et pour tout $t \in]t_\beta, t_\alpha]$, on a

$$u_\alpha(t) = u^0_\alpha \quad \text{et} \quad x_\alpha(t) = x_\beta(t_\beta) + (t - t_\beta)\, Au^0_\alpha \ . \tag{3.8.6}$$

Si α est un ordinal limite, $t_\alpha = \sup_{\beta<\alpha} t_\beta$,

$$x_\alpha(t_\alpha) = \lim_{t\to t_\alpha^-} x_\alpha(t) \quad \text{et} \quad u_\alpha(t_\alpha) \in \partial\gamma(x_\alpha(t_\alpha)) \ . \tag{3.8.7}$$

En plus, notre construction satisfait

$$\gamma(x_\alpha(t_\alpha)) - \gamma(x_0) \ge \int_0^{t_\alpha} \langle u_\alpha(s), Au_\alpha(s)\rangle\, ds - \varepsilon\, t_\alpha \qquad \text{pour tout } \ \alpha < \tau \ . \tag{3.8.8}$$

Construction: Comme $x_0 \in A(E')$, alors il existe $y_0 \in E'$ tel que $x_0 = Ay_0$. Posons $t_0 = 0$, $x_0(0) = x_0$ et $u_0(0) = u^0$ où u^0 est fixé dans $\partial\gamma(x_0)$.

Soit $\alpha < \tau$ et supposons qu'on ait construit $(t_\beta)_{\beta<\alpha}$, $(u_\beta)_{\beta<\alpha}$ et $(x_\beta)_{\beta<\alpha}$ vérifiant les conditions (3.8.4) à (3.8.8) ci-dessus. On aura à distinguer deux cas:

1$^{\text{er}}$ **cas:** $\alpha = \beta + 1$.

Si $t_\beta = T$, on posera $t_\alpha = t_\beta = T$, $u_\alpha = u_\beta$ et $x_\alpha = x_\beta$.
Si $t_\beta < T$, d'après (3.8.5) on a

$$x_\beta(t_\beta) = x_0 + \int_0^{t_\beta} Au_\beta(s)\,ds = A\widetilde{u}_\beta \quad \text{où } \ \widetilde{u}_\beta = y_0 + \int_0^{t_\beta} u_\beta(s)\,ds \ .$$

Par suite d'après $(*)$, on a:

$$F(x_\beta(t_\beta)) \subset \partial(\gamma\circ A)(\widetilde{u}_\beta) = A^*(\partial\gamma(A\widetilde{u}_\beta)) = A(\partial\gamma(x_\beta(t_\beta)))\ .$$

Donc on peut choisir $u^0_\alpha \in \partial\gamma(x_\beta(t_\beta))$ tel que $Au^0_\alpha \in F(x_\beta(t_\beta))$. Par définition de la dérivée directionnelle, il existe $\delta_\alpha \in]0, \inf(\varepsilon, T - t_\beta)]$ tel que:

$$\frac{1}{\delta_\alpha}\Big[\gamma\Big(x_\beta(t_\beta) + \delta_\alpha\, Au^0_\alpha\Big) - \gamma(x_\beta(t_\beta))\Big] \ge \gamma'(x_\beta(t_\beta); Au^0_\alpha) - \varepsilon \ . \tag{3.8.9}$$

Posons $t_\alpha = t_\beta + \delta_\alpha$ (alors $t_\alpha \in]t_\beta, t_\beta + \varepsilon]$) et

$$x_\alpha(t) = \begin{cases} x_\beta(t) & \text{si } t \in [0, t_\beta], \\ x_\beta(t_\beta) + (t - t_\beta)\, A u_\alpha^0 & \text{si } t \in]t_\beta, t_\alpha] \ , \end{cases}$$

$$u_\alpha(t) = \begin{cases} u_\beta(t) & \text{si } t \in [0, t_\beta], \\ u_\alpha^0 & \text{si } t \in]t_\beta, t_\alpha] \ . \end{cases}$$

Il est clair que, par construction les fonctions u_α et x_α vérifiant les conditions (3.8.4) à (3.8.6).

De plus en vertu de (3.8.8) et (3.8.9), on a

$$\begin{aligned} \gamma(x_\alpha(t_\alpha)) - \gamma(x_0) &= \gamma(x_\alpha(t_\alpha)) - \gamma(x_\beta(t_\beta)) - \gamma(x_\beta(t_\beta)) - \gamma(x_0) \\ &\geq \delta_\alpha\, \gamma'((x_\beta(t_\beta)), A u_\alpha^0) - \varepsilon\, \delta_\alpha + \int_0^{t_\beta} \langle u_\alpha(s), A u_\alpha(s) \rangle\, ds - \varepsilon\, t_\beta \ . \end{aligned}$$

Par suite on a

$$\begin{aligned} \gamma(x_\alpha(t_\alpha)) - \gamma(x_0) &\geq (t_\alpha - t_\beta)\, \langle u_\alpha^0, A u_\alpha^0 \rangle - \varepsilon (t_\alpha - t_\beta) \\ &\quad + \int_0^{t_\beta} \langle u_\beta(s), A u_\beta(s) \rangle\, ds - \varepsilon\, t_\beta \\ &= \int_0^{t_\alpha} \langle u_\alpha(s), A u_\alpha(s) \rangle\, ds - \varepsilon\, t_\alpha \ , \end{aligned}$$

donc (3.8.8) est vérifiée pour α.

2$^{\text{ème}}$ cas: *α est un ordinal limite.*

Posons $t_\alpha = \sup_{\beta<\alpha} t_\beta$ et en vertu de (3.8.4) on peut définir des fonctions $x_\alpha\colon [0, t_\alpha[\to E$ et $u_\alpha\colon [0, t_\alpha[\to E'$ par:

$$\forall\, \beta < \alpha\,, \qquad u_{\alpha|[0,t_\beta]} = u_\beta \ \text{ et } \ x_{\alpha|[0,t_\beta]} = x_\beta \ .$$

Il reste donc à définir $u_\alpha(t_\alpha)$ et $x_\alpha(t_\alpha)$. Soient t, t' dans $[0, t_\alpha[$; il existe alors $\beta < \alpha$ tel que $t, t' \in [0, t_\beta[$. Donc, en vertu de (3.8.5) pour β, on a:

$$\|x_\beta(t') - x_\beta(t)\| = \Big\| \int_t^{t'} A u_\beta(s)\, ds \Big\| \leq R\, |t' - t| \ .$$

Par conséquent, la limite à gauche $w_\alpha = \lim_{t \to t_\alpha^-} x_\alpha(t)$ existe dans E. Posons alors $x_\alpha(t_\alpha) = w_\alpha$ et $u_\alpha(t_\alpha) = v_\alpha$ où $v_\alpha \in \partial\gamma(w_\alpha)$ fixé. Comme α est un ordinal limite, il existe une suite croissante $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ ($\alpha_n < \alpha$) telle que $\alpha = \sup_n \alpha_n$ (cf. [12], Chap. 0, p. 5).

Vérifions alors la condition (3.8.5) pour $t = t_\alpha = \sup_n t_{\alpha_n}$. On a

$$x_\alpha(t_\alpha) = \lim_{t \to t_\alpha^-} x_0 + \int_0^t Au_\alpha(s)\,ds = \lim_{n\to\infty} x_0 + \int_0^{t_{\alpha_n}} Au_\alpha(s)\,ds\ .$$

Donc en vertu du théorème de la convergence dominée, on a

$$x(\alpha)(t_\alpha) = x_0 + \int_0^{t_\alpha} Au_\alpha(s)\,ds\ .$$

Il est clair aussi que $x_\alpha(t_\alpha) \in \overline{B}(x_0, r)$ et que $u_\alpha(t_\alpha) \in L\overline{B}_{E'_s}$. La condition (3.8.8) se vérifie également grâce au théorème de convergence dominée puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\gamma(x_{\alpha_n}(t_{\alpha_n})) - \gamma(x_0) \geq \int_0^{t_{\alpha_n}} \langle u_{\alpha_n}(s), Au_{\alpha_n}(s)\rangle\,ds - \varepsilon\, t_{\alpha_n}$$

il suffit alors de passer à la limite quand n tend vers ∞ pour obtenir (3.8.8).

La construction étant terminée, on remarque que l'application $\alpha \mapsto t_\alpha$ est croissante de ON_d vers I, donc il existe (cf. e.g. [12], Chap. 0, §8, Lemme b)) $\lambda < \tau$ tel que $\forall\,\alpha \geq \lambda$, $t_\lambda = t_\alpha$. Comme $t_\lambda = t_{\lambda+1} = t_{\lambda+2} = ...$, la condition (3.8.6) implique nécessairement que $t_\lambda = T$. Donc $(t_\alpha)_{\alpha\leq\lambda}$ est une subdivision généralisée de I. Considérons alors la function $\theta_\lambda \colon I \to I$ définie par

$$\begin{cases} \theta_\lambda(t) = t_\alpha & \text{si } t \in [t_\alpha, t_{\alpha+1}[, \quad \alpha < \lambda, \\ \theta_\lambda(T) = T\ . \end{cases}$$

On a $\theta_\lambda \in E_\varepsilon(I)$ et d'après (3.8.5), (3.8.6), (3.8.7) et (3.8.8), les fonctions $\theta_\varepsilon := \theta_\lambda$, $x_\varepsilon := x_\lambda$ et $u_\varepsilon := u_\lambda$ vérifient les conditions (3.8.1) à (3.8.3) du lemme. Ce qui achève la démonstration du lemme. ∎

Suite de la démonstration du Théorème 3.7: Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres strictement positifs qui converge vers 0. D'après le lemme ci-dessus, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe $\theta_n \in E_{\varepsilon_n}(I)$, $u_n \in L^\infty_{E'_s}$ et $x_n \in \mathcal{C}_E(I)$ vérifiant les conditions (3.8.1) à (3.8.3) pour ε_n. Il est évident que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}_E(I)$ puisque (x_n) est équicontinue

$$\Big(\text{car} \quad \forall\, t, t' \in [0,T], \quad \|x_n(t') - x_n(t)\| \leq R\,|t'-t|\Big)$$

et vérifie $x_n(t) \in x_0 + TK$ (K est compact dans E).

D'autre part, $u_n(t) \in L\overline{B}_{E'}$. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement $\sigma(L^\infty_{E'_s}, L^1_E)$ compacte (en effet, la boule unité du dual $L^\infty_{E'_s}$ de L^1_E est $\sigma(L^\infty_{E'_s}, L^1_E)$ faiblement compacte et métrisable).

Donc on peut trouver $x \in \mathcal{C}_E(I)$, $u \in L^\infty_{E'_s}$ et deux sous-suites (x_{n_k}) de (x_n) et (u_{n_k}) de (u_n) qui convergent respectivement vers x dans $\mathcal{C}_E(I)$ et vers u pour $\sigma(L^\infty_{E'_s}, L^1_E)$. Comme E est réflexif séparable et A est linéaire continu, il est facile de montrer que Au_{n_k} converge vers Au pour $\sigma(L^1_E, L^\infty_{E'_s})$. Il en résulte immédiatement que

$$\forall\, t \in I\,, \qquad x(t) = x_0 + \int_0^t Au(s)\, ds\ . \tag{3.8.10}$$

D'autre part, pour tout $n > 0$, on a $\|x_n(\theta_n(t)) - x(t)\| \le \|x_n(t) - x(t)\| + R\,\varepsilon_n$.

Donc, pour tout $t \in I$, on a $\lim_{n\to\infty} x_n(\theta_n(t)) = x(t)$.

Comme $u_{n_k}(t) \in \partial\gamma(x_{n_k}(\theta_{n_k}(t)))$ p.p. sur I, et $\partial\gamma$ étant une multifonction s.c.s. (cf. [17], Proposition I.17) il résulte d'un théorème classique de fermeture (cf. [9], Théorème VI.4) que $u(t) \in \partial\gamma(x(t))$ p.p.. En vertu de (3.8.10) et de ([3], Proposition 3.4), la fonction $(\gamma \circ x)$ est absolument continue et pour presque tout $t \in I$, on a

$$\Big\langle \partial\gamma(x(t)), Au(t) \Big\rangle = \Big\{ \frac{D(\gamma\circ x)}{dt}(t) \Big\}$$

où $D(\gamma \circ x)$ est la mesure différentielle.

Par suite $\frac{D(\gamma\circ x)}{dt}(t) = \langle u(t), Au(t)\rangle$ p.p.. D'autre part, en vertu de (3.8.3), on a

$$\begin{aligned} \limsup_{k\to\infty} \int_0^T \langle u_{n_k}(s), Au_{n_k}(s)\rangle\, ds &\le \gamma(x(T)) - \gamma(x_0) \\ &= \int_0^T \langle u(s), Au(s)\rangle\, ds\ . \end{aligned} \tag{3.8.11}$$

Posons $\Psi(x') = \langle x', Ax'\rangle$ si $x' \in L\overline{B}_{E'_s}$ et $\Psi(x') = +\infty$ ailleurs. Alors Ψ est une fonction $\sigma(E', E)$-s.c.i. et strictement convexe sur E' et (3.8.11) est équivalente à

$$\limsup_{k\to\infty} \int_0^T \Psi(u_{n_k}(s))\, ds \le \int_0^T \Psi(u(s))\, ds\ .$$

Donc en vertu de la Proposition 3.2 de [3], on a $u(t) \in Ls^\sigma\{u_{n_k}(t)\}$, où $Ls^\sigma\{u_{n_k}(t)\} := \bigcap_{p=1}^\infty \overline{\{u_{n_k}(t)\colon\ k \ge p\}}^\sigma$. Soit N un négligeable tel que, pour tout $t \in (I\backslash N)$, $u(t) \in Ls^\sigma\{u_{n_k}(t)\}$ et $\forall\, n > 0$, $Au_n(t) \in F(x_n(\theta_n(t)))$.

Fixons $t \in (I\backslash N)$, il existe une sous-suite $(u_{m_k}(t))$ de $(u_{n_k}(t))$ ((m_k) dépendant de t) qui converge pour $\sigma(E', E)$ vers $u(t)$. Comme A est un opérateur linéaire compact, quitte à extraire une sous-suite de $(Au_{m_k}(t))$, on peut supposer que $Au_{m_k}(t)$ converge en norme vers $y \in E$. D'autre part, $Au_{m_k}(t)$ converge vers $Au(t)$ pour $\sigma(E, E')$, par suite $y = Au(t)$ et $Au_{m_k}(t)$ converge en norme vers

$Au(t)$. Comme $Au_{m_k}(t) \in F(x_{m_k}(\theta_{m_k}(t)))$, on en déduit que $Au(t) \in F(x(t))$. Ce qui achève la démonstration. ∎

Commentaires. Il n'est guère possible d'utiliser les techniques préconisées dans [5] et [10] dans la démonstration du Théorème 3.7 car E n'est pas Hilbertien et γ est supposée seulement localement lipschitzienne et régulière. Ceci nécessite des techniques nouvelles dans la construction des solutions approchées (cf. Lemme 3.8) et dans la convergence de telles solutions. Dans le cas Hilbertien, C. Castaing a obtenu l'existence des solutions (locales) absolument continues pour le problème de rafle perturbé suivant

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} \in -N_{C(t)}(u(t)) + F(u(t)) \ , \\ u(0) = x_0 \in C(0) \ , \end{cases}$$

où C est une multifonction lipschitzienne de $[0,T]$ à valeurs convexes compactes non vides de H et F est une multifonction s.c.s. à valeurs compactes non vides de H telle que $\forall\, x \in H$, $F(x) \subset A(\partial\gamma(x))$ avec A un opérateur lineaire compact dans H et γ une fonction convexe continue sur H. Des résultats de ce type ont été obtenus récemment par A. Syam ([16], Chap. IV) en utilisant des techniques dévelopées dans [10].

RÉFÉRENCES

[1] Attouch, H. and Damlamian, A. – On multivalued evolution equations in Hilbert spaces, *Israel J. Math.,* 12 (1972), 373–390.

[2] Benabdellah, H. – Sur une classe d'équations différentielles multivoques semi-continues supérieurement à valeurs non convexes, *Séminaire d'Analyse Convexe Montpellier* (1991), exposé n° 6.

[3] Benabdellah, H., Castaing, C. and Salvadori, A. – Compactness and discretization methods for differential inclusions and evolution problems, *C. Rend. Acad. Sci. Paris,* 320(I) (1995), 769–774, and *Atti. Sem. Mat. Univ. Modena*, to appear.

[4] Benilan, P. and Brézis, H. – *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes non linéaires*, Cours de 3ème cycle, Paris, 1971.

[5] Bressan, A., Cellina, A. and Colombo, G. – Upper semi-continuous differential inclusions without convexity, *Proc. AMS.,* 106 (1989), 771–775.

[6] Brézis, H. – Propriétés régularisantes de certains semi-groupes non linéaires, *Israel J. Math.,* 9 (1971), 513–534.

[7] Brézis, H. – Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contraction dans les espaces de Hilbert, *Lecture Notes in Math.,* North-Holland, Amsterdam, 1973.

[8] Castaing, C. and Monteiro Marques, M.D.P. – A multivalued version of Scorza–Dragoni theorem with an application to normal integrands, *Bull. Pol. Acad. Sci. Mathematics,* 42 (1994), 133–140.

[9] Castaing, C. and Valadier, M. – Convex analysis and measurable multifunctions, *Lecture Notes in Math.,* 580, Springer Verlag, Berlin, 1977.

[10] Cellina, A. and Staicu, V. – On evolution equations having monotonicities of opposite sign, *J. Diff. Eqs.,* 90 (1991), 71–80.

[11] Clarke, F.H. – *Optimization and Nonsmooth Analysis*, Wiley, New York, 1983.

[12] Dellacherie, C. and Meyer, P.A. – *Probabilités et potentiel*, Hermann, Paris, 1975.

[13] Deimling, K. – *Non linear Functional Analysis*, Springer Verlag, 1985.

[14] Faïk, A. – *Contribution à l'Analyse des Multifonctions et à l'étude de quelques problèmes d'évolution*, Thèse, Université Montpellier II, Mai 1995, 122 pages.

[15] Gamal, A. – Perturbation semi-continue supérieurement de certaines équations d'évolution, *Sém. Anal. Convexe,* (1981), exposé nº 14.

[16] Syam, A. – *Contributions aux inclusions différentielles*, Thèse, Univ. Montpellier II, 1993.

[17] Thibault, L. – *Propriétés des sous-différentiels des fonctions localement lipschitziennes définis sur un espace de Banach séparable. Application*, Thèse de 3ème cycle, Montpellier, 1976.

[18] Ionescu Tulcea, A. and Ionescu Tulcea, C. – Topics in the theory of lifting, *Ergeb. Math. Grenzgeb,* 3(48), Springer Verlag, New York (1963).

[19] Vrabie, I.I. – *Compactness Methods for Nonlinear Evolutions*, Pitman, 1987.

H. Benabdellah,
Université Cadi Ayyad, Faculté des Sciences Semlalia,
Département de Mathématiques, B.P.: S15-Marrakech – MAROC

and

A. Faik,
Université des Sciences et Techniques du Languedoc,
Département de Mathématiques, Analyse Convexe, case 051, 34095 Montpellier – FRANCE