PORTUGALIAE MATHEMATICA
Vol. 52 Fasc. 2 – 1995

SUR UNE NOTION DE LIMITE À L'INFINI D'UNE ULTRADISTRIBUTION

Luísa Ribeiro

Abstract: Dans cet article nous étudions une notion de limite à l'infini pour les ultradistributions. Etant donné que nous voulons généraliser la notion correspondante pour les distributions, établie par Sebastião e Silva, nous étudions d'abord l'image de Stieltjes d'une distribution ayant une limite à l'infini, ce qui nous amène à definir les espaces $V(+\infty;]a; +\infty[)$ ($a \in \mathbb{R}$). Au paragraphe §2, nous introduisons la notion d'ultradistribution convergente en $+\infty$ et nous étudions quelques propriétés de la limite. Finalement, au paragraphe §3, nous étudions la compatibilité entre la notion de limite à l'infini et la notion de limite d'une ultradistribution en un point $a \in \mathbb{R}$, que nous avons introduit en [8].

1 – Les espaces $V(+\infty;]a; +\infty[)$

Soit I un intervalle ouvert non majoré de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{U}(I)$ l'espace des ultradistributions (d'ordre finie) sur I.

Puisque nous voulons introduire une notion de limite à l'infini qui généralise la notion de limite d'une distribution due à Sebastião e Silva, nous commencerons par analyser l'image de Stieltjes d'une distribution convergente en $+\infty$.

Théorème 1.1. *Soit $f \in C_\infty(I)$ une distribution qui tend vers $\lambda \in \mathbb{C}$ lorsque $t \to +\infty$.*

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, la restrition de f à l'intervalle $]a; +\infty[$, $r_{]a,+\infty[}f$, a un représentant φ de son image de Stieltjes de la forme $\varphi = D^n \phi$ où $n \in \mathbb{N}_0$ et $\phi \in H_0(]a, +\infty[)$(1), vérifiant les conditions suivantes:

Received: July 30, 1993.

(1) Comme en [8], si $k \in \mathbb{N}_0$ et J est un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, nous notons respectivement $H_k(J)$ et $H(J)$ les espaces vectoriels de fonctions définies et holomorphes sur $\{z \in \mathbb{C}\colon\, x \in J \text{ et } |y| > k\}$ et $\{z \in \mathbb{C}\colon\, x \in J\}$.

(**i**) *φ est une fonction prolongeable analytiquement à* $\mathbb{C}\backslash[a;+\infty[$;

(**ii**) *Pour tout $p\in]0,1[$, ils existent des constantes réelles $M, R>0$ telles que*

$$|\phi(z)| \leq M\,\frac{|z|^{2p+n}}{|y|^p}\,, \qquad \forall\, z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}\colon\ |z|>R\ ;$$

(**iii**) *Pour tout $b\in\mathbb{R}$, la limite* $\lim_{y\to+\infty}[\varphi(b+iy)-\varphi(b-iy)]$ *existe au sens des distributions et est égale à $\lambda/2$.*

Démonstration: Du fait que $f\in C_\infty(I)$ est une distribution convergente en $+\infty$, ils existent $n\in\mathbb{N}_0$ et une fonction F, continue sur I, tels que $f=D^nF$ et $\lim_{t\to+\infty}\frac{F(t)}{t^n}=\frac{\lambda}{n!}$. Supposons d'abord que $a\in I$ est un nombre réel positif et considérons la fonction ϕ, définie et holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash[a;+\infty[$, donnée par

$$\phi=\frac{z^{n+1}}{2\pi i}\int_a^{+\infty}\frac{F(t)}{t^{n+1}(t-z)}\,dt\ .$$

La restrition de ϕ à $\{z\in\mathbb{C}:\ x>a\}$ est une représentante de l'image de Stieltjes de la restrition de F à l'intervalle $]a,+\infty[$ et, par conséquent, la fonction $\varphi=D^n\phi$, définie sur $\{z\in\mathbb{C}\colon\ x>a\}\backslash[a,+\infty[$, est une représentante de l'image de Stieltjes de la restrition de f à $]a,+\infty[$, vérifiant (i).

Soit $s=\sup_{t>a}|\frac{F(t)}{t^n}|$; pour tout $z\in\mathbb{C}\backslash[a;+\infty[$ l'on obtient

$$|\phi(z)|\leq\frac{s\,|z|^{n+1}}{2\pi}\int_a^{+\infty}\frac{1}{t\,|t-z|}\,dt$$

et, pour $z\neq 0$,

$$|\phi(z)|\leq\frac{s\,|z|^{n}}{2\pi}\int_0^{a^{-1}}\frac{1}{|t-z^{-1}|}\,dt\ .$$

Notons par u et v respectivement, les parties réelle et imaginaire de z^{-1} ($z\neq 0$); l'on a

$$\begin{aligned}|\phi(z)| &\leq \frac{s\,|z|^n}{2\pi}\Big(\operatorname{argsh}\frac{a^{-1}-u}{|v|}+\operatorname{argsh}\frac{u}{|v|}\Big)\\ &\leq \frac{s\,|z|^n}{2\pi}\Big(\log\frac{2\,|a^{-1}-z^{-1}|}{|v|}+\log\frac{2\,|z^{-1}|}{|v|}\Big)\end{aligned}$$

d'où, pour tout $z\in\mathbb{C}\backslash[a;+\infty[$ tel que $|z|>a$,

$$|\phi(z)|\leq\frac{s\,|z|^n}{2\pi}\log\frac{8}{a^2\,v^2}\ .$$

On voit aisément que, pour tout $p \in]0,1[$, il existe un nombre réel $R > a$ tel que

$$|\phi(z)| \leq \frac{s\,|z|^n}{\pi\,|v|^p} = \frac{s\,|z|^{2p+n}}{\pi\,|y|^p}\,, \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}\colon\ |z| > R\,,$$

et ϕ vérifie (ii).

Puisque, pour tout $y > 0$ et $b \in \mathbb{R}$, l'on a

$$\varphi(b+iy) - \varphi(b-iy) = (-i)^n\, D_y^n\Big[\phi(b+iy) - (-1)^n\,\phi(b-iy)\Big] \tag{1.1}$$

il en découle que l'existence de la limite (au sens usuel) $\lim_{y\to+\infty} y^{-n}[\phi(b+iy) - (-1)^n\,\phi(b-iy)]$, égale à $\lambda\, i^n/(2n!)$, est une condition suffisante pour que φ vérifie (iii), ce qui termine la démonstration dans le cas $a > 0$. Or, si θ est la fonction définie en $\mathbb{C}\backslash([a,+\infty[\cup\{0\})$ par $\widehat{z}^{n+1}\phi$, l'on obtient, pour $y > 0$,

$$\begin{aligned}\Big[\phi(b+iy) &- (-1)^n\,\phi(b-iy)\Big] = \\ &= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\, b^k (iy)^{n+1-k}\Big[\theta(b+iy) + (-1)^k\,\theta(b-iy)\Big]\ ;\end{aligned}$$

si, d'ailleurs, l'on fixe $p \in]0,1[$ et l'on applique (ii), on conclut que, pour tout $y > \max\{r,|b|\}$,

$$y^{1-k}\,\Big|\theta(b+iy) + (-1)^k\,\theta(b-iy)\Big| \leq M\,2^{2p+1}\,y^{p-k}$$

et, alors, la fonction

$$y^{-n}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}\, b^k (iy)^{n+1-k}\Big[\theta(b+iy) + (-1)^k\,\theta(b-iy)\Big]$$

tend vers zéro lorsque $y \to +\infty$. Comme, pour $k = 0$, l'on a

$$i^{n+1}\,y\Big[\theta(b+iy) + \theta(b+iy)\Big] = \frac{i^n\,y}{2\pi}\int_a^{+\infty} \frac{2(t-b)\,F(t)}{t^{n+1}\Big[(t-b)^2 + y^2\Big]}\,dt\ ,$$

il reste à montrer que la fonction au deuxième membre de l'égalité précédente tend vers $\lambda i^n/(2n!)$ lorsque $y \to +\infty$.

Etant donné $\delta > 0$, soit $\mu > 0$ tel que $|\frac{F(t)}{t^n} - \frac{\lambda}{n!}| < \frac{\delta}{2}$, pour $t > \mu$. Ainsi, en supposant $\mu > a$ et $y > |b|$,

$$\left|\frac{y}{\pi}\int_a^{+\infty}\frac{2(t-b)\,F(t)}{t^{n+1}\Big[(t-b)^2+y^2\Big]}\,dt-\frac{\lambda}{n!}\right| =$$

$$= \left|\frac{y}{\pi}\int_a^{\mu}\frac{2(t-b)\,F(t)}{t^{n+1}\Big[(t-b)^2+y^2\Big]}\,dt+\frac{y}{\pi}\int_\mu^{+\infty}\frac{2(t-b)}{t\Big[(t-b)^2+y^2\Big]}\left(\frac{F(t)}{t^n}-\frac{\lambda}{n!}\right)dt\right.$$

$$\left.+\frac{\lambda}{\pi\,n!}\int_\mu^{+\infty}\frac{2(t-b)\,y}{t\Big[(t-b)^2+y^2\Big]}\,dt-\frac{\lambda}{n!}\right| \le$$

$$\le \frac{s}{\pi}\int_a^{\mu}\frac{2\,|t-b|\,y}{t\Big[(t-b)^2+y^2\Big]}\,dt+\frac{\delta}{2\pi}\int_\mu^{+\infty}\frac{2\,|t-b|\,y}{t\Big[(t-b)^2+y^2\Big]}\,dt$$

$$+\frac{|\lambda|}{\pi\,n!}\left|\int_\mu^{+\infty}\frac{2(t-b)\,y}{t\Big[(t-b)^2+y^2\Big]}\,dt-\pi\right|.$$

Après quelques calculs très simples, nous concluons que, pour tout $b \in \mathbb{R}$, le premier et le troisième termes du deuxième membre de l'inégalité précédente tendent vers zéro lorsque $y \to +\infty$.

D'autre part, compte tenu que

$$\int_\mu^{+\infty}\frac{2(t-b)\,y}{t\Big[(t-b)^2+y^2\Big]}\,dt \quad \text{tend vers } \pi \text{ lorsque } \; y \to +\infty\;,$$

il est aisé de voir qu'il existe $\upsilon > 0$ (dépendant de b) tel que

$$\left|\frac{y}{\pi}\int_a^{+\infty}\frac{2(t-b)\,F(t)}{t^{n+1}\Big[(t-b)^2+y^2\Big]}\,dt-\frac{\lambda}{n!}\right| < \delta, \qquad \text{pour tout } \; y > \upsilon\;.$$

Supposons maintenant $a \in I$ et $a \le 0$; soit c un nombre reél tel que $c > |a|$ et considérons la distribution g définie sur $I + c = \{t + c :\ t \in I\}$ par $g = \tau_c\, f = f(\widehat{t} - c)$. g est alors une distribution qui tend vers λ lorsque $t \to +\infty$ et, d'après la première partie de cette démonstration, nous concluons qu'il existe une représentante ψ de l'image de Stieltjes de la restrition de g à l'intervalle $]c, +\infty[$ vérifiant les conditions enoncées. Pour terminer la démonstration il suffit d'observer que la fonction $\varphi = \tau_{-c}\,\psi = \psi(\widehat{z} + c)$ appartient à l'image de Stieltjes de la restrition de f à $]a, +\infty[$. ∎

Ce théorème nous suggère l'introduction des ensembles définis comme suit:

Si $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}_0$, nous désignons par $V_n(+\infty;]a, +\infty[)$ l'ensemble des fonctions φ définies et holomorphes sur $\mathbb{C}\backslash[a, +\infty[$ de la forme $\varphi = D^n\phi$ où ϕ vérifie les conditions suivantes:

(**i**) Ils existent des nombres réels positifs M, R et p, avec $p < 1$, tels que

$$|\phi(z)| \leq M\, \frac{|z|^{2p+n}}{|y|^p}\,, \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}\colon\ |z| > R\,. \tag{1.2}$$

(**ii**) Il existe la limite, lorsque $y \to +\infty$, de $y^{-n}[\phi(a+iy) - (-1)^n\, \phi(a-iy)]$.

On reconnait aussitôt que, si φ appartiens à $V_n(+\infty;]a,+\infty[)$, alors une quelconque primitive de φ dans $\mathbb{C}\backslash[a,+\infty[$ appartient au même ensemble et la valeur de la limite en (ii) ne dépend pas de la primitive choisie.

Muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire usuelles, $V_n(+\infty;]a,+\infty[)$ est un espace vectoriel complexe. D'ailleurs,

Proposition 1.1. *Quels que soient $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}_0$, $V_n(+\infty;]a,+\infty[)$ est un sous-espace vectoriel de $V_{n+1}(+\infty;]a,+\infty[)$.*

Démonstration: Soit $\varphi \in V_n(+\infty;]a,+\infty[)$ dans les conditions (1.2) où la limite en (ii) est égale à $\lambda i^n/n!$ ($\lambda \in \mathbb{C}$). Si l'on considére la fonction ψ définie sur $\mathbb{C}\backslash[a,+\infty[$ par

$$\psi = \int_{a+iR}^{\widehat{z}} \phi(\lambda)\, d\lambda\ ,$$

compte tenue de (i), l'on voit aisément qu'il existe une constante réel $C > 0$ telle que

$$|\psi(z)| \leq C\, \frac{|z|^{2p+n+1}}{|y|^p}\,, \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}\colon\ |z| > R\,.$$

D'autre part, pour $y > R$, l'on a

$$\frac{\psi(a+iy) - (-1)^{n+1}\, \psi(a-iy)}{y^{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{y^{n+1}} \int_R^y i\Big[\phi(a+it) - (-1)^n\, \phi(a-it)\Big]\, dt + \frac{(-1)^n}{y^{n+1}} \int_\gamma \phi(\lambda)\, d\lambda\ ,$$

où γ désigne une ligne simple rectifiable contenue dans $\mathbb{C}\backslash[a,+\infty[$ d'origine $a+iR$ et extremité $a-iR$; on reconnait aussitôt que le dernier terme du second membre tend vers zéro lorsque $y \to +\infty$. Pour $\delta > 0$ donné, soit α la fonction

$$\alpha(t) = \frac{\phi(a+it) - (-1)^n\, \phi(a-it)}{t^n} - \frac{\lambda\, i^n}{n!}\,, \qquad \forall\, t > 0\ ,$$

et soit $\mu > 0$ tel que $|\alpha(t)| < \delta/2$, si $t > \mu$.

Nous avons

$$\frac{1}{y^{n+1}} \int_R^y i\Big[\phi(a+iy) - (-1)^n\, \phi(a-iy)\Big]\, dt =$$

$$= \frac{i}{y^{n+1}} \int_R^\mu t^n\, \alpha(t)\, dt + \frac{i}{y^{n+1}} \int_\mu^y t^n\, \alpha(t)\, dt + \frac{1}{y^{n+1}} \int_R^y \frac{\lambda\, i^{n+1}}{n!}\, t^n\, dt\ ,$$

où le premier terme tend vers zéro lorsque $y \to +\infty$, le deuxième est, en valeur absolue et pour tout $y > \mu$, majoré par $\delta/[2(n+1)]$ et le dernier tend vers $\frac{\lambda\, i^{n+1}}{(n+1)!}$ lorsque $y \to +\infty$; donc la limite $\lim_{y\to+\infty} \frac{\psi(a+iy)-(-1)^{n+1}\,\psi(a-iy)}{y^{n+1}}$ existe et sa valeur est $\frac{\lambda\, i^{n+1}}{(n+1)!}$.

Puisque l'on a $\varphi = D^{n+1}\psi$, l'on conclut que $\varphi \in V_{n+1}(+\infty;]a,+\infty[)$. ∎

Posons

$$V(+\infty;]a,+\infty[) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} V_n(+\infty;]a,+\infty[) \ ;$$

muni de la structure vectorielle complexe naturelle, $V(+\infty;]a,+\infty[)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}(\mathbb{C}\backslash[a,+\infty[)$ (espace des fonctions définies et holomorphes sur $\mathbb{C}\backslash[a,+\infty[$).

Proposition 1.2. *Une fonction $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\backslash[a,+\infty[)$ appartient à l'espace $V(+\infty;]a,+\infty[)$ ssi*(2) *φ est telle que:*

(**1**) *Il existe $n \in \mathbb{N}_0$ tel que φ a une primitive ϕ d'ordre n dans $\mathbb{C}\backslash[a,+\infty[$ qui vérifie la condition (i) de (1.2).*

(**2**) *Il existe, au sens des distributions, la limite de $[\varphi(a+i\widehat{y}) - \varphi(a-i\widehat{y})]$ lorsque $y \to +\infty$.*

Démonstration: La condition $\varphi \in V(+\infty;]a,+\infty[)$ est évidemment suffisante; nous allons prouver qu'elle est aussi nécessaire. Soit $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\backslash[a,+\infty[)$ vérifiant (1) et (2); par (1.2), nous savons qu'il existent $k \in \mathbb{N}_0$, $\lambda \in \mathbb{C}$ et une fonction G, continue dans $\mathbb{R}^+$(3), tels que $\varphi(a+i\widehat{y}) - \varphi(a-i\widehat{y}) = D^k G$ et $\lim_{y\to+\infty} \frac{G(y)}{y^k} = \frac{\lambda}{k!}$.

Donc, si $\psi \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\backslash[a,+\infty[)$ est une primitive d'ordre k de φ, (1.1) nous montre que $\lim_{y\to+\infty} \frac{\psi(a+iy)-(-1)^k\,\psi(a-iy)}{y^k}$ existe et est égale à $\frac{\lambda i^k}{k!}$.

Considérons maintenant une primitive Ψ d'ordre n (où n est un nombre entier comme en (1)) de la fonction ψ; on a $\varphi = D^{n+k}\Psi$ et, en procédant comme dans la proposition 1.1, l'on démontre aisèment que

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{\Psi(a+iy) - (-1)^{n+k}\,\Psi(a-iy)}{y^{n+k}} = \frac{\lambda\, i^{n+k}}{(n+k)!} \ .$$

Puisque $\phi - D^k\Psi$ est un polynôme de degré $\leq n$, nous voyons alors que $\varphi \in V_{n+k}(+\infty;]a,+\infty[)$. ∎

Les deux propositions precédentes nous permettent de conclure le suivant:

(2) si et seulement si
(3) $\mathbb{R}^+ =]0,+\infty[$.

Si $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$ et $\varphi \in V_n(+\infty;]a,+\infty[)$ est une fonction de la forme $\varphi = D^n\phi = D^{n+k}\psi$ où $\phi, \psi \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\backslash[a,+\infty[)$ et $k \in \mathbb{N}_0$, alors

$$\lim_{y\to+\infty}\Big[\varphi(a+it)-\varphi(a-it)\Big] = \frac{n!}{i^n}\lim_{y\to+\infty}\frac{\phi(a+iy)-(-1)^n\,\phi(a-iy)}{y^n}$$
$$= \frac{(n+k)!}{i^{n+k}}\lim_{y\to+\infty}\frac{\psi(a+iy)-(-1)^{n+k}\,\psi(a-iy)}{y^{n+k}}\ ,$$

la première limite étant prise au sens des distributions et les deux dernières au sens classique.

2 – Limite d'une ultradistribution; ultradistributions bornées

Pour le but envisagé dans ce travail, nous devrons maintenant prouver le résultat suivant: si f est une ultradistribution sur $]a,+\infty[$ de la forme $f = \varphi+H(]a,+\infty[)$, dont la restrition à l'intervalle $]b,+\infty[$ ($b \in \mathbb{R}$, $b > a$) peut s'écrire $r_{]b,+\infty[}f = \psi+H(]b,+\infty[)$, où φ et ψ sont des fonctions prolongeables en éléments des espaces $V(+\infty;]a,+\infty[)$ et $V(+\infty;]b,+\infty[)$ respectivement, alors la limite (au sens des distributions) $\lim_{y\to+\infty}[\varphi(a+iy)-\varphi(a-iy)-\psi(b+iy)+\psi(b-iy)]$ est nulle.

En effet, $\varphi-\psi$ est une fonction prolongeable analytiquement à $\mathbb{C}\backslash[a,b]$, donc, en identifiant $\varphi-\psi$ à ce prolongement, elle pourra être decomposée dans une somme (unique) de la forme

$$\varphi-\psi = \theta+\chi \quad \text{sur} \ \ A = \mathbb{C}\backslash\Big\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| \le |a|+|b|\Big\}\ ,$$

où θ désigne une fonction prolongeable à $\mathbb{C}$ comme entière et χ est définie et holomorphe sur A, nulle à l'infini.

Compte tenue de la proposition 1.1, nous supposons $\varphi \in V_n(+\infty;]a,+\infty[)$ et $\psi \in V_n(+\infty;]b,+\infty[)$ ($n \in \mathbb{N}_0$) et, en appliquant la formule intégrale de Cauchy, nous concluons aisément qu'ils existent des nombres réels $M, R > 0$ et $p \in]0,1[$ tels que

$$|\theta(z)| \le M\,\frac{|z|^{2p+n}}{|y|^{p+n}}\ , \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}\colon\ |z| > R\ .$$

Par conséquent $\theta(1/\widehat{z})$ est une fonction prolongeable analytiquement à $\mathbb{C}$ et donc θ est une fonction constante; puisque l'on a encore $\lim_{|z|\to+\infty}\chi(z) = 0$, le résultat est démontré.

Ces considérations justifient la cohérence de la définition qui suit:

Une ultradistribution $f \in \mathcal{U}(I)$ est dite *convergente lorsque* $y \to +\infty$ s'il existe $a \in I$ tel que la restrition de f à l'intervalle $]a,+\infty[$ est de la forme

$r_{]a,+\infty[}f = \varphi + H(]a,+\infty[)$ où φ est une fonction prolongeable en un élément de l'espace $V(+\infty;]a,+\infty[)$.

Dans ces conditions, nous appellerons *limite de f lorsque $t \to +\infty$*, et nous noterons $f(+\infty)$, le nombre complexe $2\lim_{y\to+\infty}[\varphi(a+iy) - \varphi(a-iy)]$, la limite étant prise au sens des distributions.

Nous noterons $\mathcal{U}(+\infty; I)$ le sous-sensemble de l'espace $\mathcal{U}(I)$ des ultradistributions convergentes lorsque $t \to +\infty$.

D'après le théorème 1.1 cette définition généralise, comme prétendu, la notion de limite d'une distribution. En particulier, si $f \in \mathcal{U}(I)$ est une ultradistribution constante sur l'intervalle $]a,+\infty[$ $(a \in I)$ et égale à $\lambda \in \mathbb{C}$, alors f est convergente lorsque $t \to +\infty$ et $f(+\infty) = \lambda$; en effet

$$r_{]a,+\infty[}f = \left[-\frac{\lambda}{2\pi i}\log(\widehat{z} - a)\right] + H(]a,+\infty[) \ (^4)$$

et $-\frac{\lambda}{2\pi i}\log(\widehat{z} - a)$ appartient à $V_0(+\infty;]a,+\infty[)$.

Avant de démontrer la propriété suivante:

Proposition 2.1. *Soit $\varphi \in V_n(+\infty;]a,+\infty[)$ $(a \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}_0)$. Alors, pour tout $b \in \mathbb{R}$, il existe (au sens des distributions) la limite de $[\varphi(b+iy) - \varphi(b-iy)]$ quand $y \to +\infty$, et sa valeur ne dépend pas de b.*

Nous avons besoin du lemme qui suit:

Lemme 2.1. *Soient $c \in]0,+\infty]$, $\chi \in W_0(0;]0,c[)$ et, pour $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, soit $B_\alpha = \{z \in \mathbb{C} \colon |z-\alpha| = |\alpha| \wedge x < c \wedge y > 0\}$. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes:*

(**i**) *Il existe la limite* $\lim_{y\to 0^+}[\chi(iy) - \chi(-iy)]$.

(**ii**) *Il existe $\alpha > 0$ tel que la limite* $\lim_{z\in B_\alpha,\, z\to 0}[\chi(z) - \chi(\overline{z})]$ *existe.*

(**iii**) *Pour tout $\alpha \neq 0$, la limite* $\lim_{z\in B_\alpha,\, z\to 0}[\chi(z) - \chi(\overline{z})]$ *existe.*

Les limites considérés, si elles existent, sont égales.

Démonstration: L'équivalence entre les conditions est une conséquence immédiate de l'existence de chacune des limites $\lim_{z\in B_\alpha,\, z\to 0}[\chi(z) - \chi(i\,\mathrm{Im}\,z)]$ et $\lim_{z\in B_\alpha,\, z\to 0}[\chi(\overline{z}) - \chi(i\,\mathrm{Im}\,\overline{z})]$ et du fait qu'elles soient zéro, où α désigne un nombre réel arbitraire non nul.

En effet, soit $\alpha > 0$ (la démonstration est tout à fait analogue dans le cas $\alpha < 0$) et remarquons que tout $z \in B_\alpha$ peut s'écrire $z = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - y^2} + iy$ avec

(^{4}) Ici et dans la suite, $\log z = \log|z| + i\arg z$, avec $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^+$ et $\arg z \in [0, 2\pi[$.

$y > 0$. Puisque'ils existent des constantes $M, R > 0$ et $p \in]0,1[$ telles que

$$|\chi(z)| \leq \frac{M}{|y|^p}\,, \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}\colon\ |z| > R\ \wedge\ x < c\,,$$

nous avons, pour $z \in B_\alpha \cap B_{R/2}(0)$,

$$|\chi(z) - \chi(iy)| = \left|\int_0^{\alpha-\sqrt{\alpha^2-y^2}} \chi'(t+iy)\,dt\right| \leq 2^{p+1}\,M\,\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2-y^2}}{y^{p+1}}\,,$$

où $y^{-p-1}(\alpha - \sqrt{\alpha^2-y^2})$ tend vers zéro lorsque $y \to 0^+$. ∎

Il reste à démontrer la proposition 2.1.

Démonstration: Observons que, si $\varphi \in V_n(+\infty;]a,+\infty[)$ est de la forme $\varphi = D^n\phi$ dans $\mathbb{C}\backslash[a,+\infty[$, alors, et d'après la notation introduite dans [8], la fonction $\psi = -\phi(a+1/\widehat{z})$, définie et holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash[0,+\infty[$, est telle que $\widehat{z}^n\psi \in V_0(0;]0,+\infty[)$; d'ailleurs, nous avons

$$\lim_{y\to 0^+}\Big[(iy)^n\,\psi(iy) - (-iy)^n\,\psi(-iy)\Big] = \lim_{y\to+\infty}(-i)^n\,\frac{\phi(a+iy)-(-1)^n\,\phi(a-iy)}{y^n}\,.$$

En considérant un nombre réel $b \neq a$, nous obtenons

$$\frac{\phi(b+iy)-(-1)^n\,\phi(b-iy)}{y^n} =$$

$$= (-1)^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\,(b-a)^k\,(-i)^k\,y^{k-n}\bigg[\frac{1}{(b-a-iy)^n}\,\psi\Big(\frac{1}{b-a-iy}\Big) + (-1)^{n+k+1}\,\frac{1}{(b-a+iy)^n}\,\psi\Big(\frac{1}{b-a+iy}\Big)\bigg]$$

et, en utilisant la majoration en (1.2), nous concluons que chacun des termes correspondant à $k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$ converge vers zéro lorsque $y \to +\infty$.

Puisque, avec $y > 0$, $(b-a-iy)^{-1}$ appartiens à B_α où $\alpha = [2(b-a)]^{-1}$, le lemme 2.1 nous montre l'existence de la limite (au sens des distributions) $\lim_{y\to+\infty}[\varphi(b+iy) - \varphi(b-iy)]$, qui est égale à

$$\frac{n!}{i^n}\lim_{y\to+\infty}\frac{\phi(b+iy)-(-1)^n\,\phi(b-iy)}{y^n} = \frac{(-1)^n\,n!}{i^n}\lim_{z\in B_\alpha,\,z\to 0}(-i)^n\Big[z^n\,\psi(z) - \overline{z}^n\,\psi(\overline{z})\Big]\,.$$

Ceci achève la démonstration. ∎

Il est évidemment désirable que l'ensemble $\mathcal{U}(+\infty; I)$ soit un sous-espace vectoriel de $\mathcal{U}(I)$ et, tandis que la multiplication par un scalaire n'offre pas de difficulté, on ne peut pas dire le même en ce qui concerne l'addition. Dans ce sens, nous énonçons un résultat prouvé en [3]:

Lemme 2.2. *Soit $I =]a,b[$ $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ et soit $F : I \to \mathbb{C}$ une fonction localement bornée dans I. Alors, il existe une fonction complexe χ, définie et holomorphe dans $\mathbb{C}\backslash A$, positive sur I, et telle que*

$$\chi(t) \geq |F(t)|\,, \qquad \forall\, t \in I\ ,$$

où $A = \mathbb{R} \cap \{a,b\}$.

Nous prouvons maintenant le théorème suivant:

Théorème 2.1. *$\mathcal{U}(+\infty; I)$ est un espace vectoriel complexe et l'application*

$$\mathcal{U}(+\infty; I) \ni f \to f(+\infty) \in \mathbb{C}$$

est linéaire.

Démonstration: Soient f et g deux ultradistributions dans $\mathcal{U}(+\infty; I)$ et soient a et b deux nombre réels tels que la restrition de f à $]a,+\infty[$ et la restrition de g à $]b,+\infty[$ ont des répresentantes prolongeables en éléments de $V(+\infty;]a,+\infty[)$ et $V(+\infty;]b,+\infty[)$, respectivement. En supposant $b > a$, nous voyons que l'ultradistribution $f+g$ est convergente quand $t \to +\infty$ ssi la restrition de f à $]b,+\infty[$ a un représentante prolongeable en un élément de l'espace $V(+\infty;]b,+\infty[)$; dans ces conditions, on voit tout de suite que $(f+g)(+\infty) = f(+\infty) + g(+\infty)$.

Supposons que $r_{]a,+\infty[}f = \varphi + H(]a,+\infty[)$, où $\varphi = D^n\phi \in V_n(+\infty;]a,+\infty[)$, $n \geq 1$, $\phi \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\backslash[a,+\infty[)$, et considérons la fonction $\psi = -\phi(a + \frac{1}{z})$. Soit c le nombre réel positif $(b-a)^{-1}$; comme $\psi(c + \widehat{it})$ est une fonction indéfinement dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, le lemme 2.1, nous assure l'existence de fonctions ν_1 et ν_2, définies et holomorphes dans $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, positives sur $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^-$ respectivement, et telles que l'on peut définir

$$\begin{aligned}\nu(z) = {} & \frac{\nu_1(z)}{2\pi i}\int_0^{+\infty} \frac{\psi(c+it)}{\nu_1(t)\,(t-z)}\,dt \\ & + \frac{\nu_2(z)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{0} \frac{\psi(c+it)}{\nu_2(t)\,(t-z)}\,dt, \qquad \text{pour tout } \ z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}\ .\end{aligned}$$

D'après les propriétés de la transformation de Stieltjes, nous concluons que la fonction donnée dans $\mathbb{C}\backslash\{z \in \mathbb{C}\colon\ x = 0 \vee y = 0\}$ par

$$\begin{cases} \psi(c + i\,\widehat{z}) - \nu & \text{si } x \neq 0 \ \wedge\ y > 0, \\ -\nu & \text{si } x \neq 0 \ \wedge\ y < 0\ , \end{cases}$$

est prolongeable analytiquement à $\mathbb{C}\backslash\{it\colon\ t \in [0, c]\}$; par conséquent, la fonction χ définie par

$$\chi(z) = \begin{cases} \psi(z) - \widetilde{\nu} & \text{si } x < c \ \wedge\ y \neq 0, \\ -\widetilde{\nu} & \text{si } x > c \ \wedge\ y \neq 0\ , \end{cases}$$

où $\widetilde{\nu} = \nu[-i(\widehat{z} - c)]$, peut se prolonger analytiquement à $\mathbb{C}\backslash[0, c]$.

En idéntifiant χ à ce prolongement, nous considérons la fonction $\theta = -\chi(\frac{1}{\widehat{z}-a})$; θ est définie et holomorphe dans $\mathbb{C}\backslash[b, +\infty[$ et, pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash[b, +\infty[$ tel que $|z - (a + \frac{1}{2c})| > \frac{1}{2c}$, nous avons $\theta(z) = \phi(z) + \widetilde{\nu}(\frac{1}{z-a})$.

Puisque $\widetilde{\nu}$ est holomorphe dans $\{z \in \mathbb{C}\colon\ x < c\}$, nous concluons que $\theta - \phi$ est prolongeable comme holomorphe à $\{z \in \mathbb{C}\colon\ x > b\}$, ce qui signifie que la fonction $D^n\theta$ est une représentante de la restrition de f à l'intervalle $]b, +\infty[$. Pour tout nombre réel $r \in]0, c[$, $\widetilde{\nu}[(\widehat{z}-a)^{-1}]$ est une fonction bornée sur $\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z-a| > \frac{1}{r}\}$ ce qui nous donne pour θ une majoration du type (1.2); d'autre part, et parce que l'on a supposé $n \geq 1$, il en découle aussi l'existence de la limite, lorsque $y \to +\infty$, de $y^{-n}[\theta(b + iy) - (-1)^n\, \theta(b - iy)]$, ce qui termine la démonstration. ∎

En généralisant la notion de distribution bornée à droite, et d'aprés les considérations précédentes, il est naturel d'introduire la définition suivante:

Une ultradistribution $f \in \mathcal{U}(I)$ est dite *bornée à droite* s'il existent $a \in I$, $n \in \mathbb{N}_0$ et $\phi \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\backslash[a, +\infty[)$ tels que $r_{]a,+\infty[}f = D^n\phi + H(]a, +\infty[)$(5) et, en plus, ϕ vérifie les conditions:

(i) Ils existent des constantes positives M, R et p, $p < 1$, telles que

$$|\phi(z)| \leq M\, \frac{|z|^{2p+n}}{|y|^p}\,, \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}\colon\ |z| > R\ ;$$

(ii) $\widehat{y}^{-n}[\phi(a + i\widehat{y}) - (-1)^n\, \phi(a - i\widehat{y})]$ est une fonction bornée (au sens usuel) dans un voisinage de $+\infty$.

Remarquons que, dans ce cas, $\widehat{y}^{-n}[\phi(b + i\widehat{y}) - (-1)^n\, \phi(b - i\widehat{y})]$ est aussi une fonction bornée dans un voisinage de $+\infty$, pour tout $b \in \mathbb{R}$.

De plus nous voyons aisément que:

---

(5) En idéntifiant ϕ et sa restrition à $\{z \in \mathbb{C}\colon\ x > a\}$.

Proposition 2.2. *Toute ultradistribution $f \in \mathcal{U}(+\infty; I)$ est bornée à droite.*

De façon analogue, dans le cas où I est un intervalle non minoré de $\mathbb{R}$, nous pouvons introduire les notions d'ultradistribution bornée à gauche ou convergente lorsque $t \to -\infty$.

3 – Changement de variable

Dans ce paragraphe nous étudierons la compatibilité entre la définition de limite en $+\infty$ et la définition de limite en un point de $\mathbb{R}$, introduite en [8].

Nous savons que, si $a \in \mathbb{R}$ et $f \in C_\infty(]a, +\infty[)$, la distribution f a une limite $\lambda \in \mathbb{C}$ en $+\infty$ ssi la distribution $f(a + \frac{1}{\hat{t}})$ (appartenant à $C_\infty(\mathbb{R}^+)$) a une limite quand $t \to 0^+$ égale à λ.

Supposons, sans perte de généralité, que $a = 0$; nous rappelons que, si $f \in C_\infty(\mathbb{R}^+)$, la distribution $f(1/\hat{t})$ est définie par

$$f(1/\hat{t}) = (-t^2\, D)^n\, F(1/\hat{t}) \ ,$$

où $n \in \mathbb{N}_0$, $F \in C(\mathbb{R}^+)$, $f = D^n F$ et

$$\begin{cases} (-t^2 D)^0 = \mathrm{id}\, C(\mathbb{R}^+), \\ (-t^2 D)^n = -t^2\, D[(-t^2 D)^{n-1}] \quad \text{si } n \geq 1 \ . \end{cases}$$

De façon analogue nous pouvons définir l'opérateur $(-z^2 D)^n$ ($n \in \mathbb{N}_0$) dans l'espace $\mathcal{H}(\mathbb{C} \backslash [0, +\infty[)$(6). Si φ est une représentante de la transformée de Stieltjes de la distribution f, prolongeable analytiquement à $\mathbb{C} \backslash [0, +\infty[$, on voit sans difficulté que la fonction $\psi = -\varphi(1/\hat{z})$ est une représentante de l'image de Stieltjes de $f(1/\hat{t})$.

Soient $n \in \mathbb{N}_0$ et $\varphi \in V_n(+\infty;]0, +\infty[)$ tels que $\varphi = D^n \phi$ dans $\mathbb{C} \backslash [0, +\infty[$ et ϕ vérifie les conditions (1.2), avec la limite en (ii) égale à $\frac{\lambda\, i^n}{n!}$. Soient ψ et Ψ les deux fonctions holomorphes en $\mathbb{C} \backslash [0, +\infty[$ définies par $\psi = -\varphi(1/\hat{z})$, $\Psi = -\phi(1/\hat{z})$; on a

$$\psi = (-z^2 D)^n\, \Psi \quad \text{ en } \ \mathbb{C} \backslash [0, +\infty[\ .$$

En vue de prouver que $\psi \in V_n(0;]0, +\infty[)$, nous utiliserons les résultats qui suivent, que nous énonçons dans le cadre plus général d'un ouvert non vide Ω de $\mathbb{C}$.

(6) Plus généralement, dans $\mathcal{H}(\Omega)$ avec Ω ouvert non vide de $\mathbb{C}$.

Lemme 3.1. *On a, pour tout $\phi \in \mathcal{H}(\Omega)$ et $n \in \mathbb{N}_0$,*

$$(-z^2 D)^n \phi = \sum_{k=0}^{n} a_{k,n}\, D^k(\widehat{z}^{n+k}\, \phi)\ ,$$

où $a_{0,n}, ..., a_{n,n}$ sont des constantes réelles vérifiant $\sum_{k=0}^{n} k!\, a_{k,n} = n!$.

Démonstration: Le résultat est trivial dans le cas $n = 0$ et $n = 1$, avec $a_{0,0} = 1$, $a_{0,1} = 2$ et $a_{1,1} = -1$. Par récurrence on voit facilement que, pour tout $n \geq 2$,

$$(-z^2 D)^n \phi = \sum_{k=0}^{n} a_{k,n}\, D^k(\widehat{z}^{n+k}\, \phi)\ ,$$

où les coefficients sont donnés par

$$a_{0,n} = 2(a_{0,n-1} - a_{1,n-1})\ ,$$

$$a_{k,n} = -a_{k-1,n-1} + 2(k+1)\, a_{k,n-1} - (k+1)\,(k+2)\, a_{k+1,n-1} \qquad \text{si } \ n \geq 3 \ \text{ et } \ 1 \leq k \leq n-1\ ,$$

$$a_{n-1,1} = -a_{n-2,n-1} + 2n\, a_{n-1,n-1}\ ,$$

$$a_{n,n} = -a_{n-1,n-1}\ .$$

Donc

$$\sum_{k=0}^{n} k!\, a_{k,n} = a_{0,n-1}$$

et, par ailleurs,

$$a_{k,n} = (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(n+1)!}{(k+1)!} \qquad \text{si } \ 0 \leq k \leq n\ .$$

En particulier on a, pour tout $n \geq 2$,

$$\sum_{k=0}^{n} k!\, a_{k,n} = n!\ ,$$

ce qui termine la démonstration. ∎

Lemme 3.2. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\phi \in \mathcal{H}(\Omega)$; on a*

$$D^n(\widehat{z}^n \phi) = (\partial + n - I) \cdots (\partial + I)\, \partial\phi\ ;$$

de plus ils existent des constantes réelles $c_{1,n}, ..., c_{n,n}$ telles que

$$\sum_{k=1}^{n} k!\, c_{k,n} = 1 \qquad \text{et} \qquad \partial^n \phi = \sum_{k=1}^{n} c_{k,n}\, D^k(\widehat{z}^k\, \phi)\ ,$$

où

$$\begin{cases} \partial\phi = D(\widehat{z}\,\phi), \\ \partial^n\phi = \partial(\partial^{n-1}\phi) \quad si\ n \geq 2\ . \end{cases}$$

Démonstration: Analogue à celle présentée par F. Viegas en [12]. ∎

D'après le lemme 3.1, ils existent des constantes réelles $a_{0,n}, ..., a_{n,n}$ telles que

$$\psi = \sum_{k=0}^{n} a_{k,n}\, D^k(\widehat{z}^{n+k}\,\Psi)\ .$$

D'autre part, le lemme 3.2 nous montre que

$$\psi = \sum_{k=0}^{n} a_{k,n}\, T_k(\widehat{z}^{n}\,\Psi)\ ,$$

où, pour simplifier la notation, nous notons T_0 l'opérateur identité dans $\mathcal{H}(\mathbb{C}\backslash[0,+\infty[)$ et T_k $(k \geq 1)$ l'opérateur $(\partial + k - 1)\cdots(\partial + 1)\,\partial$.

Pour tout $k \geq 1$ on voit facilement par récurrence l'existence de constantes réelles $b_{1,k}, ..., b_{k,k}$ telles que

$$T_k = \sum_{j=1}^{k} b_{j,k}\,\partial^j \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{k} b_{j,k} = k!\ .$$

Dans ces conditions la fonction ψ peut s'écrire

$$\psi = a_{0,n}\,\widehat{z}^n\,\psi + \sum_{k=1}^{n} a_{k,n} \sum_{j=1}^{k} b_{j,k}\,\partial^j(\widehat{z}^n\,\Psi)$$

et, en remarquant que $\widehat{z}^n\Psi \in W_0(0,\mathbb{R}^+)$, nous concluons que $\psi = D^n\theta$ dans $\mathbb{C}\backslash[0,+\infty[$, où θ est la fonction définie et holomorphe dans $\mathbb{C}\backslash[0,+\infty[$ donnée par

$$\theta = a_{0,n}\,\rho^n(\widehat{z}^n\,\Psi) + \sum_{k=1}^{n} a_{k,n} \sum_{j=1}^{k} b_{j,k}\,\rho^{n-j}(\widehat{z}^n\,\Psi)$$

et les opérateurs ρ^m $(m \in \mathbb{N}_0)$ sont définis en [8]. Comme en [8], on reconnait facilement que θ est une fonction de $W_0(0,\mathbb{R}^+)$; par ailleurs, $\theta \in V_0(0;\mathbb{R}^+)$ ssi la limite de la fonction $[(i\widehat{y})^n\,\psi(i\widehat{y}) - (-i\widehat{y})^n\,\psi(-i\widehat{y})]$, définie pour $y > 0$, existe quand $y \to 0^+$. Mais, d'après la démonstration de la proposition 2.1, cette limite existe et est égale à $\lambda/n!$. Donc, comme voulu, $\psi \in V_n(0;\mathbb{R}^+)$ et

$$\lim_{y\to 0^+}\Big[\theta(iy) - \theta(-iy)\Big] = a_{0,n}\,\frac{\lambda}{n!} + \sum_{k=1}^{n} a_{k,n} \sum_{j=1}^{k} b_{j,k}\,\frac{\lambda}{n!} = \lambda\ .$$

Reciproquement, soit ψ une fonction donnée de la forme $\psi = \partial^n \Psi$ où $n \geq 1$ et $\Psi \in V_n(0; \mathbb{R}^+)$ (remarquons que, si $n = 0$, c'est à dire $\psi \in V_0(0; \mathbb{R}^+)$, alors $\varphi \in V_0(+\infty; \mathbb{R}^+)$); par le lemme 3.2, ils existent n nombre réels $c_{1,n}, ..., c_{n,n}$ tels que

$$\psi = \sum_{k=1}^{n} c_{k,n}\, D^k(\widehat{z}^k\, \Psi)\ .$$

En posant $\varphi = -\psi(1/\widehat{z})$, on a

$$\varphi = -\sum_{k=1}^{n} c_{k,n} (-z^2 D)^k \left[\frac{1}{\widehat{z}^k}\, \Psi\Big(\frac{1}{\widehat{z}}\Big)\right]$$

et, si $\phi = -\Psi(1/\widehat{z})$, le lemme 3.1 nous montre que

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} c_{k,n} \sum_{j=0}^{k} a_{j,k}\, D^j(\widehat{z}^j\, \phi)$$

où, pour chaque $k \in \{1, 2, ..., n\}$, les constantes $a_{0,k}, ..., a_{k,k}$ vérifient $\sum_{j=0}^{k} j!\, a_{j,k} = k!$.

Soit $m \in \mathbb{N}_0$, notons $\mathcal{J}^m \phi$ une primitive quelconque d'ordre m de ϕ dans $\mathbb{C} \backslash [0, +\infty[$ et considérons la fonction χ, definie et holomorphe dans $\mathbb{C} \backslash [0, +\infty[$ telle que

$$\chi = \sum_{k=1}^{n} c_{k,n} \sum_{j=0}^{k} a_{j,k}\, \mathcal{J}^{n-j}(\widehat{z}^j\, \phi)\ ;$$

on a $\varphi = D^n \chi$ dans $\mathbb{C} \backslash [0, +\infty[$. Puisque $\Psi \in V_0(0, \mathbb{R}^+)$, ils existent des constantes réelles positives M, R et p, $p < 1$, telles que

$$|\widehat{z}^j\, \phi(z)| \leq M\, \frac{|z|^{2p+j}}{|y|^p}\ , \qquad \forall\, z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}\colon\ |z| > R\ ;$$

par conséquent, pour chaque $j \in \{0, 1, ..., n\}$, il existe une constante $M_j > 0$ telle que

$$\Big|[\mathcal{J}^{n-j}(\widehat{z}^j\, \phi)](z)\Big| \leq M_j\, \frac{|z|^{2p+n}}{|y|^p}\ , \qquad \forall\, z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}\colon\ |z| > R\ ,$$

et donc

$$|\chi(z)| \leq C\, \frac{|z|^{2p+n}}{|y|^p}\ , \qquad \forall\, z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}\colon\ |z| > R\ ,$$

avec $C \in \mathbb{R}^+$.

D'autre part, si $\lambda \in \mathbb{C}$ est la valeur de la limite $\lim_{y \to +\infty} [\Psi(iy) - \Psi(-iy)]$, on voit facilement que, pour tout $j \in \{0, 1, ..., n\}$,

$$\lim_{y \to +\infty} \frac{(iy)^j\, \phi(iy) - (-1)^j\, (-iy)^j\, \phi(-iy)}{y^j} = i^j\, \lambda\ ;$$

la proposition 1.1 nous permet de voir que la limite $\lim_{y\to+\infty} \frac{\chi(iy)-(-1)^n \chi(-iy)}{y^n}$ existe, ce qui entraine $\varphi \in V_n(+\infty; \mathbb{R}^+)$, et est égale à

$$\sum_{k=1}^{n} c_{k,n} \sum_{j=0}^{k} a_{j,k} \frac{i^n}{n!} \lambda\, j! = \frac{\lambda\, i^n}{n!} \ .$$

Nous sommes donc en mesure d'énoncer le théorème suivant:

Théorème 3.1. *Soient $n \in \mathbb{N}_0$ et $a \in \mathbb{R}$.*
Alors, $\varphi \in V_n(+\infty;]a, +\infty[)$ ssi $\psi = -\varphi(a + 1/\widehat{z}) \in V_n(+\infty; \mathbb{R}^+)$.
De plus, si $\phi \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\backslash[a, +\infty[)$ et $\Psi \in V_0(0; \mathbb{R}^+)$ sont des fonctions telles que $\varphi = D^n\phi$ et $\psi = \partial^n\Psi$, on a

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{\phi(a + iy) - (-1)^n\, \phi(a - iy)}{y^n} = \frac{i^n}{n!} \lim_{y\to 0^+} \Big[\Psi(iy) - \Psi(-iy)\Big] \ .$$

Nous introduisons la définition suivante:

Etant donnée une ultradistribution f sur $]a, +\infty[$ $(a \in \mathbb{R})$ telle que $f = \varphi + H(]a, +\infty[)$ avec $\varphi \in H_0(]a, +\infty[)$, nous notons $f(a+1/\widehat{t})$ l'ultradistribution sur $\mathbb{R}^+$ définie par

$$f(a + 1/\widehat{t}) = -\varphi(a + 1/\widehat{z}) + H(\mathbb{R}^+) \ .$$

Du théorème précédent découle immédiatement, comme prétendu,

Corollaire. *Soit f une ultradistribution de $\mathcal{U}(I)$. Alors f a une limite en $+\infty$ égale à $\lambda \in \mathbb{C}$ ssi il existe $a \in I$ tel que la restrition de f à l'intervalle $]a, +\infty[$ possède une représentante $\varphi \in H_0(]a, +\infty[)$ et l'ultradistributions $g = f(a + 1/\widehat{t}) \in \mathcal{U}(\mathbb{R}^+)$ a une limite égale à λ quand $t \to 0^+$.*

Remarque. Comme en [9], si $f \in \mathcal{U}(]a, b[)$ $(a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\})$ nous dirons, par définition, que f *est intégrable dans* $]a, b[$ ssi f a une primitive $g \in \mathcal{U}(]a, b[)$ avec limite en a^+ et en b^-. Dans ces conditions, nous appellerons *intégral de f dans* $]a, b[$, et nous noterons $\int_a^b f$, le nombre complexe $g(b^-) - g(a^+)$. On reconnait aisément la cohérence de cette définition; comme en [9], on prouve que l'ensemble des ultradistributions intégrables dans $]a, b[$ est un espace vectoriel complexe et que l'intégrale est une fonctionnelle linéaire. On démontre encore que toute ultradistribution de support compact sur $\mathbb{R}$ est intégrable sur tout intervalle ouvert non vide I de $\mathbb{R}$ contenant son support, avec $\int_I f = \int_{\mathbb{R}} f$, où $\int_{\mathbb{R}} f$ désigne l'intégrale de S. Oliveira en [7].

REFERENCES

[1] Bak, J. and Newmann, D. – *Complex Analysis*, Springer Verlag.

[2] Cartan, H. – *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Hermann, Paris, 1961.

[3] Dias, J. Carvalho – *As ultradistribuições de uma variável como translatadas formais (Teoria de A. Sousa Menezes)*, Centro de Estudos Matemáticos de Lisboa, 1967.

[4] Ferreira, J. Campos – *Alguns problemas de prolongamento de distribuições com aplicações à integração*, Lisboa, 1967.

[5] Ferreira, J. Campos – Sur une notion de limite en un point, plus générale que celle de M.S. Lojasiewicz, *Rev. Fac. Ciências,* Lisboa, 2ª S., XVI (1973).

[6] Menezes, A. Sousa – *Sobre uma construção axiomática da teoria das ultradistribuições na recta e alguns dos seus possíveis modelos*, XXVII Congresso Luso-Espanhol para o progresso das ciências, Bilbau, 1964.

[7] Oliveira, J. Silva – *Sobre certos espaços de ultradistribuições e uma noção generalizada de produto multiplicativo*, CMAF, Textos e Notas, 29, 1983.

[8] Ribeiro, L. – Sur une notion de limite d'une ultradistribution en un point, I, *Portugaliae Math.,* 50(1) (1993).

[9] Ribeiro, L. – Sur une notion de limite d'une ultradistribution en un point, II, *Portugaliae Math.* 50(3) (1993).

[10] Silva, J. Sebastião – Les fonctions analytiques comme ultradistributions dans le calcul opérationnel, *Math. Ann.,* 136 (1958).

[11] Silva, J. Sebastião – *Les séries de multipôles des physiciens et la théorie des ultradistributions*, Obras Completas, Vol. III, INIC, Lisboa, 1985.

[12] Viegas, F. – *Sobre as noções de traço na teoria das distribuições*, Lisboa, 1987.

Luísa Ribeiro,
Departamento de Matemática, I.S.T.,
Av. Rovisco Pais, 1096 Lisboa Codex – PORTUGAL