PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 80(94) (2006), 273–286 DOI:10.2298/PIM0694273J

ДОПУСТИМЫЕ ФУНКЦИИ ДЛЯ КОНУСА И АСИМПТОТИКА БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

А. Л. Якымив

Аннотация. Одним из возможных обобщений правильно меняющихся функций на многомерный случай являются допустимые функции для конуса. Допустимые функции для произвольного замкнутого выпуклого острого телесного n-мерного конуса были введены Ю. Н. Дрожжиновым и Б. И. Завьяловым в 1984 году в связи с приложениями в тауберовой теории и математической физике. В настоящей статье приводятся определения и примеры некоторых классов допустимых функций конуса, а также многомерные тауберовы теоремы для них. В качестве приложения в конце статьи дана асимптотика на бесконечности безгранично делимых распределений с носителем в произвольном замкнутом выпуклом остром телесном однородном конусе из R^n.

1. Введение

Как хорошо известно, правильно меняющиеся функции одной переменной ввёл в 1930 году Карамата [**18**] и доказал для них тауберовы теоремы [**19, 20, 21**]. Обобщениям правильно меняющихся функций на многомерный случай посвящены работы Байшанского и Караматы [**4**], Дрожжинова и Завьялова [**8**]–[**13**], Гринвуда и Резника [**14**], де Хаана [**15**], де Хаана, Омея и Резника [**17, 16**], Клюппельберг, Микоша и Шерф [**22**], Козлова [**23**], Меершаерта [**30, 31, 32**], Меершаерта и Шеффлера [**33**], Молчанова [**34**], Нагаева и Заиграева [**35, 36**], Омея [**38**], Острогорски [**39, 40, 41, 42**], Резника [**43, 44, 45, 46**], Рвачевой [**47**], Стама [**50**], автора [**52, 57, 59**].

Например, Байшански и Карамата [**4**], рассматривали непрерывные функции $f : G \to R_+$, где G – произвольная топологическая группа, на которой задан фильтр $\mathfrak{U}$ открытых выпуклых множеств из G со счётным базисом. При

2000 *Mathematics Subject Classification*: Primary 40E05, 60E07.

Ключевые слова и фразы: правильно меняющиеся функции вдоль семейства операторов, вполне допустимые функции для семейства операторов, допустимые функции для конуса, безгранично делимые распределения, спектральная мера Леви.

Работа написана при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 05-01-00583 и 06-01-00263) и гранта президента РФ по поддержке ведущих научных школ НШ-4129.2006.1.

этом фильтр $\mathfrak{U}$ считается G-инвариантным, то есть, для произвольного множества $U \in \mathfrak{U}$ и произвольного элемента $h \in U$, $Uh \in \mathfrak{U}$ и $hU \in \mathfrak{U}$. Согласно [**4**], функция f называется правильно меняющейся по отношению к фильтру $\mathfrak{U}$, если для каждого $h \in G$ существует предел

$$\lim_{g\to\infty} \frac{f(gh)}{f(g)} = \varphi(h),$$

где $g \to \infty$ обозначает сходимость по отношению к данному фильтру. В [**4**] была доказана также теорема о равномерной сходимости.

Исследования Байшанского и Караматы [**4**] продолжила Острогорски в работах [**39, 40, 41, 42**]. В качестве группы G она рассматривала различные конусы в R^n: гипероктант, световой конус будущего, произвольные однородные конусы, и получила в этом направлении ряд новых результатов.

Омей [**38**] изучал измеримые функции $f : R_+^2 \to R_+$ такие, что для некоторых вспомогательных функций $r, s : R_+ \to R_+$, $r(t) \to \infty$, $s(t) \to \infty$ $(t \to \infty)$ и некоторой положительной функции $\lambda(x, y)$ и всех $x, y > 0$ существует

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(r(t)x, s(t)y)}{f(r(t), s(t))} = \lambda(x, y).$$

Меершаерт [**30, 31**] исследовал функции $f(t)$ одной переменной t, значениями которых являются невырожденные линейные операторы из R^k и распространил понятие правильно меняющихся функций на этот случай.

Молчанов в [**34**] ввёл и изучил правильно меняющиеся функции $f(x)$, определённые в некотором m-мерном конусе, значениями которых являются замкнутые (компактные) множества из R^d.

Согласно Featuring Резнику [**43**], случайный вектор X со значениями в R^n называется правильно меняющимся на бесконечности с показателем $\alpha \geqslant 0$ и спектральным (вероятностным) распределением P_s на единичной сфере $S^{n-1} \subset R^n$, если существуют положительные числа c и σ_k $(k \in N)$ такие, что при $k \to \infty$

$$k\mathsf{P}\{\sigma_k^{-1} X \in A(r, B)\} \to c r^{-\alpha} P_s(B)$$

для всех множеств $B \subset S^{n-1}$ непрерывности предельной меры P_s и $r > 0$, где $A(r, B) = \{x : x \in R^n, |x| > r, x/|x| \in B\}$. В работе [**5**] Басрак, Дэвис и Микош показали, что, если случайный вектор X правильно меняется на бесконечности с показателем $\alpha > 0$, то для произвольного $x \in R^n$ и некоторой медленно меняющейся на бесконечности функции $L(t)$ существует предел

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathsf{P}\{(x, X) > t\}}{t^{-\alpha} L(t)} = \omega(x),$$

причём существует $x_0 \neq 0$, для которого $\omega(x_0) > 0$. Доказано также, что для нецелых $\alpha > 0$ справедливо соответствующее обратное утверждение, причём предельная мера P_s определяется однозначно по функции $\omega(x)$. Для случая $\alpha = 2$ приведён контрпример.

В статье [**52**] автор исследует положительные измеримые функции $f(x)$, определённые в конусе $\Gamma \subseteq R^n$ такие, что для всех $x \in \Gamma \setminus \{0\}$ при $x_t \to x$

$$(1), \qquad \frac{f(tx_t)}{f(te)} \to \varphi(x) \in (0, \infty) \quad (t \to \infty)$$

где t – положительная переменная, а e – заранее фиксированный вектор из $\Gamma \setminus \{0\}$. Совокупность таких функций $f(x)$ обозначается через $\Pi_2(\Gamma)$ ($\Pi_2(\Gamma)$ не зависит от вектора $e \in \Gamma \setminus \{0\}$). Этот, а также ряд других классов функций рассмотрены в недавно вышедшей книге автора [**57**] (английский вариант [**59**]).

Пусть неотрицательная функция $\lambda(x)$ непрерывна на единичной сфере $S^{n-1} \subset R^n$. В работе [**36**] Нагаев и Заиграев называют функцию $f(x)$, $x \in R^n$, (β, λ)-правильно меняющейся, если при $|x| \to \infty$

$$\sup_{e_x \in E_\lambda} \left| \frac{f(x)}{r_\beta(|x|)} - \lambda(e_x) \right| = o(1),$$

где $e_x = x/|x|$, $r_\beta(t)$ правильно меняется при $t \to \infty$ с показателем β, а $E_\lambda = \{a \in S^{n-1} : \lambda(a) > 0\}$. Это определение близко к определению только что упомянутого класса $\Pi_2(\Gamma)$, где $\Gamma = \{x \in R^n, x = ta, a \in E_\lambda, t > 0\}$. Так, если множество E_λ замкнуто, то множество всех измеримых (β, λ)-правильно меняющихся функций совпадает с множеством функций из $R_2(\Gamma)$, для которых предельная в соотношении (1) однородная функция $\varphi(x)$ имеет вид $\varphi(x) = c|x|^\beta \lambda(x/|x|)$, $x \in \Gamma$, где c – произвольная положительная постоянная (см. теоремы 1 и 2 из [**52**]).

В настоящей статье рассматривается ещё одно возможное многомерное обобщение правильно меняющихся функций – так называемые допустимые функции для произвольного замкнутого выпуклого острого телесного n-мерного конуса. Они были введены Дрожжиновым и Завьяловым в 1984 году [**8**] в связи с приложениями в тауберовой теории и математической физике. В разделе 2 приводятся определения и примеры некоторых классов допустимых функций конуса, а также многомерные тауберовы теоремы для них. В качестве приложения в конце статьи (раздел 3, теорема 4) дана асимптотика на бесконечности безгранично делимых распределений с носителем в произвольном замкнутом выпуклом остром телесном однородном конусе из R^n. Теорема 4 продолжает исследования асимптотики многомерных безгранично делимых распределений, проводившихся ранее в работах Круглова и его ученика Антонова [**1**]–[**3**], [**24**]–[**29**], Сгибнева [**49**], Улановского [**51**], Омея [**37**] и автора [**58**]. Отметим, что проблеме изучения асимптотики безгранично делимых распределений на бесконечности посвящено большое число работ (особенно в одномерном случае). Ряд ссылок имеется в статье Круглова и Антонова [**2**], а также в статье Сгибнева [**49**]. Некоторые вопросы асимптотики многомерных безганично делимых распределений на бесконечности затронуты в книге Кен-Ити Сато 1999 года [**48**].

2. Многомерные тауберовы теоремы

Пусть Γ – замкнутый выпуклый острый телесный конус в R^n с вершиной в нуле, то-есть, замкнутое выпуклое множество в R^n, такое, что для всех $x \in \Gamma$ и $t > 0$ $tx \in \Gamma$, причём $\operatorname{int}\Gamma \neq \emptyset$ и $\operatorname{int}\Gamma^* \neq \emptyset$, где

$$\Gamma^* = \{y : y \in R^n, (y, x) \geqslant 0 \quad \forall x \in \Gamma\}.$$

При этом сопряжённый конус тоже будет являться замкнутым выпуклым острым телесным. Более подробную информацию о конусах можно почерпнуть в книге Владимирова, Дрожжинова и Завьялова [**7**]. Положим $G = \operatorname{int}\Gamma, C = \operatorname{int}\Gamma^*$.

Пусть задано произвольное семейство $U = \{U_k,\, k \in I \subseteq [0, \infty)\}$ линейных операторов в R^n, которые оставляют конус Γ инвариантным:

$$U_k\Gamma = \Gamma \quad \forall k \in I, \quad J_k = \det U_k. \tag{2}$$

Мы будем считать, что множество I имеет ∞ своей предельной точкой. Оператор $V_k = (U_k^*)^{-1}$ оставляет сопряжённый конус Γ^* инвариантным. Для произвольного оператора U_k мы имеем числа

$$\Lambda(k) = \sup_{|e|=1} |U_k e|, \quad \lambda(k) = \inf_{|e|=1} |U_k e|. \tag{3}$$

Оператору V_k будут соответствовать числа:

$$\frac{1}{\lambda(k)} = \sup_{|e|=1} |V_k e|, \quad \frac{1}{\Lambda(k)} = \inf_{|e|=1} |V_k e|.$$

Определение 1. Мы будем говорить, что семейство $U_k, k \in I$ является семейством: первого типа, если $\Lambda(k) \to \infty$ и $\lambda(k) \to \infty$ при $k \to \infty$, $k \in I$; второго типа, если существует $b > 0$ такое, что $\Lambda(k) \to \infty$ при $k \to \infty$, $k \in I$ и $\lambda(k) \geqslant b > 0$ $(k \in I)$; третьего типа, если $\Lambda(k) \to \infty$ при $k \to \infty$, $k \in I$.

Определение 2. Мы будем говорить, что функция $f(x)$, определённая, положительная и измеримая в G, правильно меняется в G вдоль семейства $U = \{U_k,\, k \in I\}$ и писать, что $f \in R(U, \Gamma)$, если для некоторого вектора $e \in G$ и для всех $x \in G$ при $x_k \to x$ $(k \to \infty,\, k \in I)$

$$\frac{f(U_k x_k)}{f(U_k e)} \to \varphi(x) > 0, \ \varphi(x) < \infty. \tag{4}$$

Из (4) следует (см. [**54**, теорема 2]), что

$$\frac{f(U_k x)}{f(U_k e)} \overset{x \in K}{\rightrightarrows} \varphi(x) \in (0, \infty) \ (k \to \infty, k \in I) \tag{5}$$

для произвольного компакта $K \subset G$, причём $\varphi(x)$ непрерывна в G. Согласно (5) мы будем записывать $\varphi = H_e(U, \Gamma)$.

Замечание 1. Множество $R(U, \Gamma)$ не зависит от вектора $e \in G$. При этом, если (4) выполнено для некоторого вектора $e \in G$, то оно будет выполнено для произвольного вектора $e_1 \in G$, при этом функция φ умножится на

$$\lim_{k \to \infty, k \in I} \frac{f(U_k e)}{f(U_k e_1)}.$$

Определение 3. Функцию $f(x)$, определённую в G, мы будем называть вполне допустимой для семейства операторов $U = \{U_k,\, k \in I\}$, если $f \in R(U,\Gamma)$, f локально суммируема в G и существует k_0 такое, что

$$\frac{f(U_k x)}{f(U_k e)} \leqslant \eta(x),\ k > k_0,\ k \in I,\ x \in G, \tag{6}$$

где e – некоторый фиксированный вектор из G, причём η имеет медленный рост в G:

$$\int_G \frac{\eta(x)}{1+|x|^q} < \infty$$

для некоторого q.

Замечание 2. Определение 3 эквивалентно определению 0-вполне допустимой функции для семейства $U = \{U_k,\, k \in I\}$ из [**7**, глава II, раздел 5.2].

Определение 4. Функция $f(x)$, определённая в G, называется допустимой для конуса Γ, если для произвольного семейства линейных операторов $U = \{U_k,\, k \in I\}$, оставляющих конус Γ инвариантным, существует подсемейство $V = \{U_k,\, k \in J \subseteq I\}$ (J – неограничено), относительно которого $f(x)$ будет вполне допустимой).

Множество всех допустимых функций для конуса Γ обозначим через $D(\Gamma)$.

Определение 5. Функция $f(x)$, определённая в G, называется допустимой m-го типа ($m = 1, 2, 3$) для конуса Γ, если для произвольного семейства линейных операторов m-го типа $U = \{U_k,\, k \in I\}$, оставляющих конус Γ инвариантным, существует подсемейство $V = \{U_k,\, k \in J \subseteq I\}$ (J – неограничено), относительно которого $f(x)$ будет вполне допустимой).

Множество всех допустимых функций m-го типа для конуса Γ обозначим через $D_m(\Gamma)$, $m = 1, 2, 3$.

Обозначение 1. Через $R_m(\Gamma)$, $m = 1, 2, 3$ мы обозначим множество всех функций $f(x)$, определённых в G, таких, что для призвольного семейства линейных операторов m-го типа $U = \{U_k,\, k \in I\}$, оставляющих конус Γ инвариантным, существует подсемейство $V = \{U_k,\, k \in J \subseteq I\}$ (J – неограничено) такое, что $f \in R(V,\Gamma)$ (см. определение 2).

Обозначение 2. Через $R(\Gamma)$ мы обозначим множество всех функций $f(x)$, определённых в G, таких, что для призвольного семейства линейных операторов $U = \{U_k,\, k \in I\}$, оставляющих конус Γ инвариантным, существует подсемейство $V = \{U_k,\, k \in J \subseteq I\}$ (J – неограничено) такое, что $f \in R(V,\Gamma)$ (см. определение 2).

Ясно, что

$$D(\Gamma) \subseteq D_3(\Gamma) \subseteq D_2(\Gamma) \subseteq D_1(\Gamma)$$

и

$$R(\Gamma) \subseteq R_3(\Gamma) \subseteq R_2(\Gamma) \subseteq R_1(\Gamma).$$

Приведём примеры функций из $R(\Gamma)$ и $D(\Gamma)$.

Пусть $R^n_+ = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n, x_i \geqslant 0 \ \forall i = 1, \dots, n\}$ – положительный координатный угол (октант), $V^+_n = \{x = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in R^{n+1}, x_0 \geqslant \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}\}$ – световой конус будущего в R^{n+1}.

Пример 1 [**7**, глава II, раздел 5.3, теорема 1]. Пусть $f(x)$ – положительная, непрерывно дифференцируемая функция в $\operatorname{int} R^n_+$, удовлетворяющая условию

$$a \leqslant \frac{x_j \partial f(x) \partial x_j}{f(x)} \leqslant b, \quad x_j > 0, \quad j = 1, \dots, n$$

при некоторых $a, b \in (-\infty, \infty)$. Тогда $f \in R(R^n_+)$. В частности, если $a > -1$, то $f \in D(R^n_+)$.

Пример 2 [**7**, глава II, раздел 5.3, теорема 2]. Пусть $f(x)$ – положительная, непрерывно дифференцируемая функция в $\operatorname{int} V^+_n$ и

$$a \leqslant \frac{(l, x)(l, \nabla f(x))}{f(x)} \leqslant b, \quad x \in V^+_n, \quad l \in \partial V^+_n, \quad |l| = 1$$

при некоторых $a, b \in (-\infty, \infty)$, где $\nabla = (\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n)$. Тогда $f \in R(V^n_+)$. В частности, если $a > -1$, то $f \in D(V^+_n)$.

Пусть Γ – замкнутый выпуклый острый телесный конус в R^n с вершиной в нуле. Рассмотрим функцию χ, представимую в виде

$$\chi(t) = \eta(t)\varphi(t), \quad t \in (0, \infty), \tag{7}$$

где функции η и φ удовлетворяют условиям:

(8) Существуют числа $c_1, c_2 > 0$ такие, что $c_1 \leqslant \eta(t) \leqslant c_2$, $t \in (0, \infty)$.

$$\omega(\lambda, t) = \eta(\lambda t)/\eta(t) \overset{t \in (0,\infty)}{\rightrightarrows} 1, \quad \lambda > 1. \tag{9}$$

(10) Функция φ положительна, непрерывно дифференцируема и удовлетворяет неравенствам $a \leqslant t\varphi'(t)/\varphi(t) \leqslant b$ $(0 < t < \infty)$ при некоторых $a, b \in (-\infty, \infty)$.

Пример 3 [**7**, глава II, раздел 5.4]. Пусть функция χ удовлетворяет условиям (7)–(10) и фиксированы векторы $l_i \in \Gamma^*$, числа $A_i > 0$ и $\alpha \in R^1$. Тогда $f(x) = \chi(\omega(x)) \in R(\Gamma)$, где

$$\omega(x) = \frac{\sum_{i=1}^{p} A_i (l_i, x)^{\alpha_i}}{\sum_{i=p+1}^{p+q} A_i (l_i, x)^{\alpha_i}}, \quad x \in \Gamma.$$

В частности, если $-\alpha_i a < 1$ при $i = 1, \dots, p$ и $\alpha_i b < 1$ при $i = p+1, \dots, p+q$, то $f(x) \in D(\Gamma)$.

В случае $\Gamma = R^n_+$ справедлива следующая модификация примера 3 (см. [**56**, теорема 2]).

Пример 4. Пусть заданы некоторые числа $p, q \in N$, постоянные $c_j > 0$, $\beta_j \in R^1$, векторы $l_j \in R^n_+$, $\alpha_j \in R^n$, $j = 1, \ldots, p+q$ и возрастающая положительная дифференцируемая функция $\varphi(t)$, $t \in R^1_+$, причём

$$\frac{t\partial\varphi(t)/\partial t}{\varphi(t)} \leqslant b < \infty \quad \forall t \in R^1_+$$

и

$$\alpha_{ij}\beta_j < 0 \ (i = 1, \ldots, n, \ j = 1, \ldots, p),$$
$$\alpha_{ij}\beta_j > 0 \ (i = 1, \ldots, n, \ j = p+1, \ldots, p+q).$$

Тогда функция

$$f(x) = \varphi\left(\frac{\sum_{j=1}^{p} c_j \left(l_j, x^{\alpha_j}\right)^{\beta_j}}{\sum_{j=p+1}^{p+q} c_j \left(l_j, x^{\alpha_j}\right)^{\beta_j}}\right), \ x \in R^n_+$$

принадлежит $R(R^n_+)$. Если

$$\gamma = \left(\min_{i=1,\ldots,n}\min_{j=1,\ldots,p}\alpha_{ij}\beta_j - \max_{i=1,\ldots,n}\max_{j=p+1,\ldots,p+q}\alpha_{ij}\beta_j\right) b > -1,$$

то $f(x) \in D(R^n_+)$. Здесь $x^{\alpha_j} = \left(x_1^{\alpha_{1j}}, \ldots, x_n^{\alpha_{nj}}\right)$.

Сформулируем некоторые необходимые сведения из [**52**] (подробные доказательства имеются в [**53**]). Пусть, как и ранее, Γ – замкнутый выпуклый телесный конус в R^n с вершиной в нуле. В конусе Γ введём отношение порядка [**6**]: будем писать, что

$$x \overset{\Gamma}{\leqslant} y \quad (x \overset{\Gamma}{<} y),$$

если $x, y, y - x \in \Gamma$ (соответственно $x \in \Gamma, y, y - x \in G = \operatorname{int}\Gamma$). Действительную функцию $f(x)$, определённую в G, назовём неубывающей (соответственно невозрастающей) в G, если при $x, y \in G$, $x \overset{\Gamma}{<} y$ $\ f(x) \leqslant f(y)$ (соответственно $f(x) \geqslant f(y)$). В [**53**] доказана следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть f неубывает в G (невозрастает в G).*

(1) *Тогда для каждого $x \in G$ существуют два следующих предела:*

$$\lim_{y\uparrow x} f(y) \equiv \lim_{y\to x, y\overset{\Gamma}{<}x} f(y) = f(x_-),$$

$$\lim_{y\downarrow x} f(y) \equiv \lim_{y\to x, y\overset{\Gamma}{>}x} f(y) = f(x_+),$$

где

$$f(x_-) = \sup(f(y), \, y \overset{\Gamma}{<} x), \quad f(x_+) = \inf(f(y), \, y \overset{\Gamma}{>} x)$$

$$f(x_-) = \inf(f(y), \, y \overset{\Gamma}{<} x), \quad f(x_+) = \sup(f(y), \, y \overset{\Gamma}{>} x), \ (\textit{соответственно})$$

причём $f(x_-) \leqslant f(x) \leqslant f(x_+)$ (соответственно $f(x_-) \geqslant f(x) \geqslant f(x_+)$).

(2) *Для того, чтобы f была непрерывной в $x \in G$ необходимо и достаточно, чтобы $f(x_-) = f(x_+)$.*

Обозначение 3. Через $M_1(\Gamma)$ (соответственно через $M_2(\Gamma)$) обозначим множество всех неубывающих (соответственно невозрастающих функций в G, непрерывных "сверху", то-есть таких, что для всех $x \in G$ $f(x) = f(x_+)$, $M(\Gamma) = M_1(\Gamma) \cup M_2(\Gamma)$.

Преобразования Лапласа меры μ и функции f на Γ будем обозначать соответственно через $\widehat{f}(y)$ и $\widetilde{\mu}(y)$:

$$\widetilde{\mu}(y) = \int_\Gamma e^{-(y,x)}\,\mu(dx), \widehat{f}(y) = \int_\Gamma e^{-(y,x)} f(x)\,dx$$

в предположении, что они существуют при $y \overset{T}{>} a$ для некоторого $a \in T = \Gamma^*$.

Пусть Γ – произвольный замкнутый выпуклый острый телесный конус, допускающий семейство линейных преобразований $U = \{U_k, k \in I\}$, которые оставляют Γ инвариантным (см. (2)). Справедлива следующая тауберова теорема (см. [**55**, теорема 1]).

Теорема 1. *Пусть* $f(x) = u(x)v(x)$ $(x \in G = \operatorname{int}\Gamma)$, *где* $u(x) \in R(U, \Gamma)$ *(см. определение 2),* $v(x) \in M(\Gamma)$ *(см. обозначение* 3 *после леммы* 1), $v(x) \geqslant 0$ $(x \in G)$, *числа* $\rho_k > 0$ $(k \in I)$ *и для всех* $y \in C = \operatorname{int}\Gamma^*$ *существует* $\widehat{f}(y)$. *Предположим, что для всех* $y \in C$

$$\frac{\widehat{f}(V_k y)}{J_k \rho_k} \to \psi(y) < \infty \quad (k \to \infty,\ k \in I)$$

$$(V_k = (U_k^*)^{-1},\ J_k = \det U_k).$$

Тогда существует такая определённая в G *функция* $\varphi(x) < \infty$ $(x \in G)$, *что*

$$\frac{f(U_k x)}{\rho_k} \to \varphi(x) \quad (k \to \infty, k \in I) \tag{11}$$

почти всюду в G *и мера* μ *на* Γ, *что* φ *является её плотностью в* G *и*

$$\psi(y) = \widetilde{\mu}(y) < \infty \quad \forall y \in C.$$

В частности, если $\mu(\partial\Gamma) = 0$, *то*

$$\psi(y) = \widehat{\varphi}(y) < \infty \quad \forall y \in C.$$

Если функция $\varphi(x)$ *непрерывна в* G, *то соотношение* (11) *выполнено равномерно по* $x \in K$ *для призвольного компакта* $K \subset G$.

Замечание 3. Теорема 1 является аналогом теоремы 1 из [**7**, глава II, раздел 4.3]. Основное её отличие от цитируемой теоремы состоит в ослаблении тауберова условия и в отказе от предположения о регулярности конуса Γ.

Пусть, как и ранее, Γ – произвольный замкнутый выпуклый острый телесный конус, допускающий семейство линейных преобразований $U = \{U_k, k \in I\}$, которые оставляют Γ инвариантным. Справедлива следующая тауберова теорема сравнения (см. [**55**, теорема 2]).

Теорема 2. *Пусть* $f(x) = u(x)v(x)$ $(x \in G = \operatorname{int}\Gamma)$, *где* $u(x) \in R(U,\Gamma)$ (*см. определение* 2), $v(x) \in M(\Gamma)$ (*см. обозначение* 3 *после леммы* 1), $v(x) \geqslant 0$ $(x \in G)$ *и для всех* $y \in C = \operatorname{int}\Gamma^*$ *существует* $\widehat{f}(y)$. *Предположим, что функция* $g(x)$ *вполне допустима для семейства* $U = \{U_k,\ k \in I\}$ (*см. определение* 3). *Если для произвольного* $y \in C$

$$\frac{\widehat{f}(V_k y)}{\widehat{g}(V_k y)} \to 1 \quad (k \to \infty,\ k \in I)$$

$(V_k = (U_k^*)^{-1})$, *то существует предел*

$$\frac{f(U_k x)}{g(U_k x)} \overset{x \in K}{\rightrightarrows} 1 \quad (k \to \infty,\ k \in I)$$

для произвольного компакта $K \subset G$.

Пусть $\Delta_\Gamma(x)$ есть расстояние от точки $x \in \Gamma$ до границы конуса Γ ($\Delta_T(x)$ есть расстояние от точки $x \in T$ до границы конуса $T = \Gamma^*$).

Определение 6. Выпуклый конус Γ называется однородным, если для произвольных точек x_1 и x_2 из $G = \operatorname{int}\Gamma$ существует невырожденное линейное преобразование U (вообще говоря, зависящее от x_1 и x_2), оставляющее конус Γ инвариантным, такое, что $Ux_1 = x_2$.

Пусть Γ – произвольный замкнутый выпуклый острый телесный однородный конус в R^n с вершиной в нуле. Справедлива следующая тауберова теорема (см. [**55**, теорема 3]).

Теорема 3. *Пусть* $f(x) = u(x)v(x)$ $(x \in G = \operatorname{int}\Gamma)$, *причём* $v(x) \in M(\Gamma)$ (*см. обозначение* 3 *после леммы* 1), $v(x) \geqslant 0$ $(x \in G)$ *и для всех* $y \in C = \operatorname{int}\Gamma^*$ *существует* $\widehat{f}(y)$. *Справедливы следующие утверждения:*

(1) *Если* $g(x) \in D_1(\Gamma)$ (*см. определение* 5), $u(x) \in R_1(\Gamma)$ (*см. обозначение* 1) *и существует предел*

$$\frac{\widehat{f}(y)}{\widehat{g}(y)} \to 1 \quad (y \to 0,\ y \in C),$$

то

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to 1 \quad (x \in G,\ \Delta_\Gamma(x) \to \infty).$$

(2) *Если* $g(x) \in D_2(\Gamma)$ (*см. определение* 5), $u(x) \in R_2(\Gamma)$ (*см. обозначение* 1) *и для произвольного* $b > 0$ *существует предел*

$$\frac{\widehat{f}(y)}{\widehat{g}(y)} \to 1 \quad (\Delta_T(y) \to 0,\ y \in C,\ |y| < b),$$

то для произвольного $\delta > 0$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to 1 \quad (x \in G,\ \Delta_\Gamma(x) \geqslant \delta).$$

(3) *Если* $g(x) \in D_3(\Gamma)$ (*см. определение* 5), $u(x) \in R_3(\Gamma)$ (*см. обозначение* 1) *и существует предел*

$$\frac{\widehat{f}(y)}{\widehat{g}(y)} \to 1 \quad (\Delta_T(y) \to 0,\ y \in C),$$

то

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to 1 \quad (x \in G,\ |x| \to \infty).$$

3. Асимптотика безгранично делимых распределений в конусе

Пусть Γ – произвольный замкнутый выпуклый острый телесный однородный конус в R^n с вершиной в нуле. При $x \in \Gamma$ положим

$$\Gamma(x) = \{y :\ y \in \Gamma,\ x - y \in \Gamma\} = \{y :\ y \overset{\Gamma}{\leqslant} x\},$$

$$\widetilde{\Gamma}(x) = \Gamma \setminus \Gamma(x).$$

Предположим, что случайный вектор $\xi \in R^n$ имеет безгранично делимое распределение, сосредоточенное в Γ, причём преобразование Лапласа его имеет вид:

$$\mathsf{M}e^{-(\lambda,\xi)} = \exp\left(-\int_\Gamma \left(1 - e^{-(\lambda,x)}\right)\nu(dx)\right) \quad (\lambda \in \Gamma^*),$$

где ν – σ – конечная мера на Γ (возможно, неограниченная в окрестности нуля), для которой выполнены соотношения

$$\int_{|x|\leqslant 1} |x|\,\nu(dx) < \infty, \quad \int_{|x|>1} \nu(dx) < \infty$$

(см. [**58**, лемма 3]). Мера ν называется спектральной мерой Леви распределения случайного вектора ξ. Положим при $x \in G$

$$f(x) = \mathsf{P}\{\xi \in \widetilde{\Gamma}(x)\}, \quad g(x) = \nu(\widetilde{\Gamma}(x)).$$

Справедлива следующая предельная теорема (см [**55**, теорема 4]).

Теорема 4. *Пусть функция* $g(x)$ *является допустимой функцией первого типа для конуса* Γ ($g(x) \in D_1(\Gamma)$) (*см. определение* 5). *Тогда*

$$f(x) = (1 + o(1))g(x) \quad (x \in G,\ \Delta_\Gamma(x) \to \infty), \tag{12}$$

то-есть, при $x \in G = \operatorname{int}\Gamma$, $\Delta_\Gamma(x) \to \infty$

$$\mathsf{P}\{\xi \in \widetilde{\Gamma}(x)\} = (1 + o(1))\nu(\widetilde{\Gamma}(x)),$$

где $\Delta_\Gamma(x)$ *есть расстояние от точки* x *до границы конуса* Γ.

Замечание 4. Теорема 4 обобщает соответствующие утверждения из работ [**37, 58**]. Отметим, что в цитируемых работах $\Delta_\Gamma(x)$ имела порядок $|x|$ при $|x| \to \infty$; здесь же допускается сколь угодно медленное стремление $\Delta_\Gamma(x)$ к бесконечности.

Теорема 4 доказана в [**55**], как следствие пункта 1 тауберовой теоремы 3. Заманчиво было бы, воспользовавшись пунктом 2 (соответственно 3) доказать, что (12) имеет место при $|x| \to \infty$ и $\Delta_\Gamma(x) \geqslant \delta > 0$ (соответственно при $|x| \to \infty$ и $x \in G$). Однако следующие простые соображения показывают, что (12), вообще говоря, не выполнено уже при $|x| \to \infty$ и $\Delta_\Gamma(x) \geqslant \delta > 0$. В самом деле, пусть $\Gamma = R^n_+ = \{x = (x_1, \dots, x_n),\ x_i \geqslant 0\ \forall i = 1, \dots, n\}$ и пусть $|x| \to \infty$ так, что $x_1 = \delta > 0$, $\min(x_2, \dots, x_n) \to \infty$. Тогда

$$g(x) \to \nu(A),$$

где $A = \{y :\ y = (y_1, \dots, y_n) \in R^n_+,\ y_1 > \delta\}$ и, если $\nu(A) > 1$, то не может иметь места (12), так как $f(x) = \mathsf{P}\{\xi \in \widetilde{\Gamma}(x)\} \leqslant 1$.

В качестве примеров $g(x)$ мы можем привести примеры 1–4 в дополнительном предположении, что $g(x)$ не возрастает в Γ (см. раздел 2). Приведём ещё один пример, разобранный в [**56**].

Через $\mathfrak{F}$ обозначим класс функций распределения на R^1_+ таких, что для произвольной функции распределения $F(x) \in \mathfrak{F}$ верно представление

$$1 - F(x) \equiv \overline{F}(x) = \exp\left(-\int_0^x \frac{\epsilon(u)}{u}\,du\right), \quad \forall x \geqslant 0 \tag{13}$$

для некоторой измеримой функции $\epsilon(x)$ на R^1_+, обладающей свойствами:

$$0 \leqslant \inf_{0 \leqslant x < \infty} \epsilon(x) \leqslant \sup_{0 \leqslant x < \infty} \epsilon(x) < 1. \tag{14}$$

$$\text{Для произвольного } x \in (0, \infty) \quad \int_0^x \frac{\epsilon(u)}{u}\,du < \infty. \tag{15}$$

$$\int_0^\infty \frac{\epsilon(u)}{u}\,du = \infty. \tag{16}$$

Заметим, что произвольная измеримая функция $\epsilon(x)$, обладающая свойствами (14)–(16), определяет некоторую функцию распределения $F(x)$, удовлетворяющую (13). В самом деле, из (14) следует, что $\epsilon(x)$ неотрицательна при $x \geqslant 0$, стало быть, $\overline{F}(x)$ не возрастает, а $F(x)$ не убывает при $x \geqslant 0$. Кроме того, из (13) следует, что $F(0) = 0$, а из (16) следует, что $F(\infty) = 1$. Таким образом, условия (14)–(16) действительно определяют некоторую функцию распределения $F(x)$. В [**56**] доказана следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть спектральная мера Леви ν безгранично делимого Распределения абсолютно непрерывна на R^n_+ и имеет вид:*

$$\nu(A) = \int_A h(x)\,dx,$$

где A – произвольное борелевское множество из R^n_+,

$$h(x) = \sum_{i=1}^m c_i h_i(x), \quad x \in R^n_+,$$

где $c_i > 0$ $(i = 1, \dots, m)$ — некоторые положительные постоянные,

$$h_i(x) = h_{i1}(x_1) \cdots h_{in}(x_n)$$

для произвольных $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n_+$ и $i = 1, \dots m$, где $h_{ij}(t)$ — плотности функций распределения $F_{ij}(t) \in \mathfrak{F}$ для всех $i = 1, \dots, m$ и $j = 1, \dots, n$. Тогда функция $g(x) = \nu(\widetilde{R}^n_+(x))$, $x \in R^n_+$, допустима для конуса R^n_+.

Список литературы

[1] С. Н. Антонов, *К асимптотическому поведению безгранично делимых законов*, Мат. заметки **28**:6 (1980), 939–946.

[2] С. Н. Антонов, В. М. Круглов, *Об асимптотическом поведении безгранично делимых распределений в банаховом пространстве*, Теор. вероятн. примен. **27**:4 (1982), 625–642.

[3] С. Н. Антонов, В. М. Круглов, *Еще раз об асимптотическом поведении безгранично делимых распределений в банаховом пространстве*, Теор. вероятн. примен. **29**:4 (1984), 735–742.

[4] B. Bajšanski, J. Karamata, *Regularly varying functions and the principle of equicontinuity*, Publ. Ramanujan Inst. **1** (1968/69), 235–246.

[5] B. Basrak, R. A. Davis, T. Mikosh, *A characterization of multivariate regular variation*, Ann. Appl. Probab. **12**:3 (2002), 908–920.

[6] В. С. Владимиров, *Многомерное обобщение тауберовой теоремы Харди и Литтлвуда*, Изв. АН СССР, сер. мат. **40** (1976), 1084–1101.

[7] В. С. Владимиров, Ю. Н. Дрожжинов, Б. И. Завьялов, *Многомерные тауберовы теоремы для обобщенных функций*, Наука, Москва, 1986.

[8] Ю. Н. Дрожжинов, Б. И. Завьялов, *Теоремы сравнения тауберова типа*, Доклады АН СССР **3** (1984), 680–682.

[9] Ю. Н. Дрожжинов, Б. И. Завьялов, *Асимптотические свойства некоторых классов обобщенных функций*, Известия АН СССР, сер. мат. **1** (1985), 77–131.

[10] Ю. Н. Дрожжинов, Б. И. Завьялов, *Многомерные тауберовы теоремы сравнения для обобщенных функций в конусах*, Мат. сборник **4** (1985), 499–524.

[11] Ю. Н. Дрожжинов, Б. И. Завьялов, *Многомерные абелевы и тауберовы теоремы сравнения*, Мат. сборник **180**:9 (1989), 85–110.

[12] Ю. Н. Дрожжинов, Б. И. Завьялов, *Многомерные тауберовы теоремы сравнения для голоморфных функций ограниченного аргумента*, Известия АН СССР **6** (1991), 1097–1112.

[13] Ю. Н. Дрожжинов, Б. И. Завьялов, *Тауберовы теоремы для квазиасимптотических разложений мер с носителем в положительном октанте*, Мат. сборник **2** (1994), 185–209.

[14] P. Greenwood, S. Resnick, *A bivariate stable characterization and domains of attraction*, J. Multivar. Anal. **9** (1979), 206–221.

[15] L. de Haan, *Multivariate regular variation and application in probability theory*, Multivariate Analysis VI, Elselvier, B. V., 1985.

[16] L. de Haan, E. Omey, *Integrals and derivatives of regularly varying functions in R^d and domains of attraction of stable distributions II*, Stoch. Proc. Appl. **16** (1983), 157–170.

[17] L. de Haan, E. Omey, S. Resnick, *Domains of attraction and regular variation in R^d*, J. Multiv. Anal. **14** (1984), 17–33.

[18] J. Karamata, *Sur un mode croissanse régulière des fonctions*, Mathematica (Cluj) **4** (1930), 38–53.

[19] J. Karamata, *Über die Hardy–Littelwoodsche Umkehrungen des Abelschen Steitigkeitssatzes*, Math. Z. **32** (1930), 319–320.

[20] J. Karamata, *Neuer Beweis und Verallgemeinerung einiger Tauberian-Sätze*, Math. Z. **33**:2 (1931), 294–299.

[21] J. Karamata, *Sur la rapport entre la convergence d'une suite des fonctions*, Studia Math. **3** (1931), 67–76.

[22] C. Klüppelberg, T. Mikosh, A. Schärf, *Regular variation in the mean and stable limits for Poisson shot noise*, Bernoulli **9**:3 (2003), 467–496.

[23] С. М. Козлов, *Многомерные спектральные асимптотики для эллиптических операторов*, ДАН СССР **4** (1983), 789–793.

[24] В. М. Круглов, *Замечание к теории безгранично делимых законов*, Теор. вероятн. примен. **15**:2 (1970), 330–336.

[25] В. М. Круглов, *Интегралы по безгранично делимым распределениям в гильбертовом пространстве*, Мат. заметки **11**:6 (1972), 669–676.

[26] В. М. Круглов, *Сходимость числовых характеристик сумм независимых случайных величин со значениями в гильбертовом пространстве*, Теор. вероятн. примен. **18**:4 (1973), 734–752.

[27] В. М. Круглов, *О безгранично делимых распределениях в гильбертовом пространстве*, Мат. заметки **16**:4 (1974), 585–594.

[28] Круглов В. М. *Характеризация одного класса распределений в гильбертовом пространстве*, Мат. заметки **16**:5 (1974), 777–782.

[29] В. М. Круглов, *Дополнительные главы теории вероятностей*, Учеб. пособие. М.: Высшая школа, 1984.

[30] M. M. Meerschaert, *Regular variation and domains of attraction in R^k*, Stat. Probab. Letters **4** (1986), 43–45.

[31] M. M. Meerschaert, *Regular variation in R^k*, Proc. Am. Math. Soc. **102**:2 (1988), 341–348.

[32] M. M. Meerschaert, *Regular variation and generalized domains of attraction in R^k*, Stat. Probab. Letters. **18** (1993), 233–239.

[33] M. M. Meerschaert, H. P. Scheffler, *Multivariable regular variation of functions and measures*, J. Appl. Anal. **5**:1 (1999), 125–146.

[34] I. S. Molchanov, *On regularly varying multivalued functions*, in: *Stability problems for stochastic models* (Suzdal,1991), Lecture Notes in Math. 1546, 1993, pp. 121–129.

[35] A. V. Nagaev, A. Yu. Zaigraev, *Multidimensional limit theorems allowing large deviations for densities of regular variation*, J. Multivariate Anal. **67** (1998), 385–397.

[36] А. В. Нагаев, А. Ю. Заиграев, *Абелевы теоремы, граничные свойства сопряжённых распределений и большие уклонения сумм независимых случайных векторов*, Теор. вероятн. примен. 48:4 (2003), 701–719.

[37] E. Omey, *Infinite divisibility and random sums of random vectors*, Yokohama Math. J. **33**:1?2 (1985), 39–48.

[38] E. Omey, *Multivariate regular variation and application in probability theory*, Brussel, 1989.

[39] T. Ostrogorski, *Regular variation on homogeneous cones*, Slobodan Aljančić memorial volume of Publ. Inst. Math. **58(72)** (1995), 51–70.

[40] T. Ostrogorski, *Regular variation in R^n_+*, Mathematica **39(62)**:2 (1997), 265–276.

[41] T. Ostrogorski, *Regular variation on the light cone*, Math. Moravica (1977) (Proc. Internat. Workshop Anal. Appl.), pp. 71–84.

[42] T. Ostrogorski, *Regular variation and Banach–Steinhaus theorem*, Nieuw Arch. Wisk. **4(16)**:1-2 (1998), 27–36.

[43] S. Resnick, *Point processes, regular variation and weak convergence*, Adv. Appl. Probab. **18**:1 (1986), 66–138.

[44] S. Resnick, *Extreme values, regular variation and point processes*, Springer-Verlag, New York, 1987.

[45] S. Resnick, *Point processes and Tauberian theory*, Math. Sci. **16**:2 (1991), 83–106.

[46] S. Resnick, *Hidden regular variation, second order regular variation and asymptotic independence*, Extremes **5**:4 (2003), 303–336.

[47] E. Rvačeva, *On the domains of attraction of multidimensional distributions*, Select. Transl. Math. Stat. Probab. **2** (1962), 183–207.

[48] Ken-Iti Sato, *Levy Processes and Infinitely Divisible Distributions*, Cambridge University Press, 1999.

[49] М. С. Сгибнев, *Асимптотика безгранично делимых распределений в R^n*, Труды инст. Мат. СО АН СССР **13** (1989), 100–116.

[50] A. J. Stam, *Regular variation in R_+^d and Abel–Tauber theorem*, Report T.W.-189, Math. Inst. Rijksuniversiteit, Groningen, 1977.

[51] А. М. Улановский, *Об асимптотическом поведении безгранично делимых распределений на бесконечности*, Теор. Функц. Функц. Анал. Прилож. **35** (1981), 100–107.

[52] А. Л. Якымив, *Многомерные тауберовы теоремы и их применение к ветвящимся процессам Беллмана–Харриса*, Матем. сборник **115**:3 (1981), 463–477.

[53] А. Л. Якымив, *Предельные теоремы для ветвящихся процессов*, Кандидатская диссертация, МГУ, 1981.

[54] А. Л. Якымив, *Асимптотика вероятности продолжения критических ветвящихся процессов Беллмана–Харриса*, Труды МИАН СССР **177** (1986), 177–205.

[55] А. Л. Якымив, *Тауберовы теоремы и асимптотика безгранично делимых распределений в конусе*, Теор. вероятн. примен. **48**:3 (2003), 487–502.

[56] А. Л. Якымив, *Допустимые функции для октанта*, Мат. заметки **76**:3 (2004), 466–472.

[57] А. Л. Якымив, *Вероятностные приложения тауберовых теорем*, Физматлит, Москва, 2005.

[58] A. L. Yakymiv, *The asymptotics of multidimesional infinite divisible distributions*, J. Math. Sci. **84**:3 (1997), 1197–1207.

[59] A. L. Yakymiv, *Probabilistic applications of Tauberian theorems*, Modern Probability and Statistics, 2005, VSP, Utrecht.

Математический институт им. В. А. Стеклова,
Москва, Россия
arsen@mi.ras.ru

(Поступила 06 03 2006)