PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 79(93) (2006), 37–49 DOI: 10.2298/PIM0693037K

GITTERPUNKTE IN SUPERKUGELN

Ekkehard Krätzel

Communicated by Aleksandar Ivić

ZUSAMMENFASSUNG. The number of weighted lattice points in a p-dimensional centralsymmetric sphere can be represented by an infinite series over Bessel functions. This is well known. In the present article this result will be generalized to super spheres, which contain points with Gaussian curvature zero at the boundary. In the representation of the number of lattice points in these super spheres the Bessel functions are replaced by convolution products over generalized Bessel functions. These products can be developed into a series over modified generalized Bessel functions. Then one is in the position to prove some new or modified estimates for the number of lattice points inside super spheres.

1. Einführung und Formulierung des Hauptergebnisses

Es seien k, p natürliche Zahlen mit $k \geqslant 3,\ p \geqslant 2$ und ν reelle Zahlen mit $\nu > -1$. Weiterhin seien $\vec{t}_p = (t_1, t_2, \dots, t_p) \in \mathbb{R}^p$ und $\vec{n}_p = (n_1, n_2, \dots, n_p) \in \mathbb{Z}^p$. Es werden *Superkugeln*

$$SS_{k,p} = \{\vec{t}_p \in \mathbb{R}^p : F(\vec{t}_p) \leqslant 1\}$$

betrachtet, deren Distanzfunktion F durch

$$F^k(\vec{t}_p) = |t_1|^k + |t_2|^k + \cdots + |t_p|^k$$

gegeben ist. Es interessieren die *Anzahl der Gitterpunkte*

$$A(x; SS_{k,p}) = \#\{\vec{n}_p \in \mathbb{Z}^p : F(\vec{n}_p) \leqslant x\}$$

in den Superkugeln oder allgemeiner

$$A_\nu(x; SS_{k,p}) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \sum_{F(\vec{n}_p) \leqslant x} \big(x^k - F^k(\vec{n}_p)\big)^\nu,$$

2000 *Mathematics Subject Classification*: Primary 11P21.
Key words and phrases: Lattice points, convex bodies, super spheres.

wobei im Falle $-1 < \nu < 0$ $F(\vec{n}_p) \neq x$ sein muß. Wir setzen $A_0(x; SS_{k,p}) = A(x; SS_{k,p})$. Es sind die folgenden asymptotischen Darstellungen bekannt (siehe [**3**] und [**2**]):

$$A(x; SS_{k,p}) = V_{k,p}x^p + O\big(x^{p-2+\frac{2}{p+1}}\big) \quad \text{für} \quad k \leqslant p+1. \tag{1}$$

In der Tat liegen schon bessere Abschätzungen als (1) vor, was aber jetzt nicht weiter interessiert. $V_{k,p}$ ist gegeben durch

$$V_{k,p} = \Big(\frac{2}{k}\Big)^p \frac{\Gamma^p(\frac{1}{k})}{\Gamma(1+\frac{p}{k})}.$$

Hier interessieren wir uns hauptsächlich für den Fall $k > p+1$. Die bislang besten Ergebnisse sind in [**2**] aufgelisted. Sie lauten für $k > p+1,\ p \geqslant 5$

$$A(x; SS_{k,p}) = V_{k,p}x^p + H_{k,p,1}(x) + O\left(x^{\vartheta_{k,p}}\right) \tag{2}$$

mit

$$\vartheta_{k,p} = (p-2)\Big(1 - \frac{2}{5k}\Big) + \frac{2}{5} + \frac{4}{5k} \qquad \text{für} \quad k < \frac{533p - 482}{168}, \tag{3}$$

$$= (p-2)\Big(1 - \frac{165}{146k}\Big) + \frac{46}{73} + \varepsilon \qquad \text{für} \quad k \geqslant \frac{533p - 482}{168}. \tag{4}$$

Dabei sind $\frac{533}{168} = 3,17\ldots,\ \varepsilon > 0$.

Von grundlegender Wichtigkeit ist die in [**3**] bewiesene Entwicklung

$$\sum_{|n|<x} (x^k - |n|^k)^\nu = V_{k,1}^{(\nu)}\Gamma(\nu+1)x^{k\nu+1} + \psi_{\nu+1/k}^{(k)}(x) \tag{5}$$

für $x > 0,\ k \geqslant 2,\ \nu > -1$. Es werden die Abkürzungen

$$V_{k,p}^{(\nu)} = \Big(\frac{2}{k}\Big)^p \frac{\Gamma^p(\frac{1}{k})}{\Gamma(\nu+1+\frac{p}{k})}, \qquad V_{k,p}^{(0)} = V_{k,p}$$

benutzt. Es bedeutet

$$\psi_{\nu+1/k}^{(k)}(x) = 2\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1) \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{x}{\pi m}\right)^{\frac{k\nu+1}{2}} J_{\nu+1/k}^{(k)}(2\pi m x) \tag{6}$$

mit den verallgemeinerten Bessel-Funktionen

$$J_\nu^{(k)}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1-\frac{1}{k})} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{k\nu}{2}} \int_0^1 (1-t^k)^{\nu-\frac{1}{k}} \cos xt\, dt$$

für $\nu > \frac{1}{k} - 1$. Auf Grund der asymptotischen Entwicklung der verallgemeinerten Bessel-Funktionen erhält man für (6) die folgende asymptotischen Reihenentwicklung

$$\psi_{\nu+1/k}^{(k)}(x) \sim -2\Big(\frac{k}{2}\Big)^\nu \Gamma(\nu+1)x^{\nu(k-1)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi m x - \frac{\pi}{2}\nu)}{(\pi m)^{\nu+1}} \tag{7}$$

für gerade k und auch für ungerade $k > \nu$. Man erkennt, (6) ist für $\nu > 0$ absolut konvergent und auch konvergent für $-1 < \nu \leqslant 0$ unter der Voraussetzung $x \notin \mathbb{Z}$. Schließlich wird der zweite Hauptterm in (2) durch

$$H_{k,p,1}(x) = pV_{k,p-1}\psi^{(k)}_{p/k}(x) \tag{8}$$

dargestellt.

Das Ziel des Artikels besteht in Folgendem: Im Abschnitt 2 werden Darstellungen für die Anzahlfunktionen $A_\nu(x; SS_{k,p})$ auf elementarem Wege hergeleitet, deren einzelnen Terme aus Faltungsprodukten über Reihen verallgemeinerter Bessel-Funktionen bestehen (Satz 1). Ab Abschnitt 4 werden die k auf gerade Zahlen eingeschränkt. Satz 2 gibt die Entwicklung der Restglieder in unendliche Reihen über modifizierte verallgemeinerte Bessel-Funktionen, die im Abschnitt 3 erklärt werden, und asymptotische Entwicklungen. Satz 3 im Abschnitt 5 gibt als Anwendung Abschätzungen der einzelnen Restglieder an. Im Abschnitt 6 werden schließlich neue Abschätzungen im Hauptfall $\nu = 0$ mit Einschränkung auf die Dimension $p \geqslant 5$ hergeleitet. Für die Dimensionen $p = 2, 3, 4$ ergibt sich nichts Neues. Satz 4 bildet dann die wesentliche Grundlage für den folgenden Hauptsatz.

Hauptsatz. *Es sei k gerade, $k > p + 1$, $p \geqslant 5$. Dann ist*

$$A(x; SS_{k,p}) = V_{k,p}x^p + pV_{k,p-1}\psi^{(k)}_{p/k}(x) + O\left(x^{\vartheta_{k,p}}\right)$$

mit

$$\vartheta_{k,p} = p - 2 + \frac{2}{p+1} \qquad \textit{für} \quad k \leqslant \frac{165}{92}\Big(p + \frac{27p-46}{23p-50}\Big) \tag{9}$$

$$\vartheta_{k,p} = (p-2)\Big(1 - \frac{165}{146k}\Big) + \frac{46}{73} + \varepsilon \quad \textit{für} \quad k > \frac{165}{92}\Big(p + \frac{27p-46}{23p-50}\Big). \tag{10}$$

Hinweise. $(p-2)\Big(1 - \dfrac{2}{5k}\Big) + \dfrac{2}{5} + \dfrac{4}{5k} > p - 2 + \dfrac{2}{p+1}$ für $k > p + 1$. Damit bedeutet (9) für $k > p+1$ einen glatten Übergang zu (1) für $k \leqslant p+1$ im Gegensatz zum Übergang (2) zu (1).

$$\frac{165}{92} = 1,79\ldots, \qquad 1,17\ldots < \frac{27p-46}{23p-50} < 1,36\ldots, \qquad \varepsilon > 0.$$

Hiermit ist der Gültigkeitsbereich der guten Abschätzung in (3) beziehungsweise in (10) deutlich erweitert worden. □

2. Darstellung der Gitterpunktsanzahlen

In Folgendem bezeichne

$$f(x) * g(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)\,dt,$$

die Faltung zweier Funktionen und

$$\prod_{r=1}^{p} {*f_r(x)} = f_1(x) * f_2(x) * \cdots * f_p(x)$$

und $(f(x))^{*p}$ die p-fache Faltung von $f(x)$ mit sich selbst.

Satz 1. *Es seien $k,p \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 3$, $p \geqslant 2$ und $\nu > -1$. Dann ist*

$$A_\nu(x;SS_{k,p}) = V_{k,p}^{(\nu)} x^{k\nu+p} + \sum_{r=1}^{p-1} H_{k,p,r}^{(\nu)}(x) + \Delta_{k,p}^{(\nu)}(x) \tag{11}$$

mit

$$\Delta_{k,p}^{(\nu)}\big(x^{\frac{1}{k}}\big) = \frac{1}{\Gamma^p(\frac{\nu+1}{p})} \Big(\psi_{(\nu+1)/p+1/k-1}^{(k)}\big(x^{\frac{1}{k}}\big)\Big)^{*p}, \tag{12}$$

$$H_{k,p,1}^{(\nu)}(x) = pV_{k,p-1}^{(\nu)} \psi_{\nu+p/k}^{(k)}(x), \tag{13}$$

$$H_{k,p,r}^{(\nu)}(x) = \Big(\frac{2}{k}\Big)^{p-r} \binom{p}{r} \Gamma^{p-r}\Big(\frac{1}{k}\Big) \Delta_{k,r}^{(\nu+(p-r)/k)}(x) \tag{14}$$

für $1 < r < p$.

Beweis. Es ist bei Verwendung von (5)

$$\begin{aligned}
A_\nu\big(x^{\frac{1}{k}};SS_{k,p}\big) &= \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \sum_{F^k(\vec{n}_p) \leqslant x} \big(x - F^k(\vec{n}_p)\big)^\nu \\
&= \frac{1}{\Gamma^p(\frac{\nu+1}{p})} \Bigg(\sum_{|n|^k < x} \big(x - |n|^k\big)^{\frac{\nu+1}{p}-1} \Bigg)^{*p} \\
&= \frac{1}{\Gamma^p(\frac{\nu+1}{p})} \Bigg(\frac{2}{p} \frac{\Gamma(\frac{1}{k})}{\Gamma(\frac{\nu+1}{p} + \frac{1}{k})} x^{\frac{\nu+1}{p}+\frac{1}{k}-1} + \psi_{(\nu+1)/p+1/k-1}^{(k)}\Big(x^{\frac{1}{k}}\Big) \Bigg)^{*p}.
\end{aligned}$$

Entwickelt man jetzt die rechte Seite, so ergibt sich sofort (11), wobei man den Hauptterm und das Restglied (12) sogleich erkennt. Für $H_{k,p,r}^{(\nu)}$ hat man zunächst

$$\begin{aligned}
H_{k,p,r}^{(\nu)}\big(x^{\frac{1}{k}}\big) &= \frac{(2/k)^{p-r}\binom{p}{r}\Gamma^{p-r}(\frac{1}{k})}{\Gamma^r(\frac{\nu+1}{p})\Gamma\big((p-r)(\frac{\nu+1}{p}+\frac{1}{k})\big)} x^{(p-r)(\frac{\nu+1}{p}+\frac{1}{k})-1} \\
&\quad * \Big(\psi_{(\nu+1)/p+1/k-1}^{(k)}\big(x^{\frac{1}{k}}\big)\Big)^{*r} \\
&= \frac{(2/k)^{p-r}\binom{p}{r}\Gamma^{p-r}(\frac{1}{k})}{\Gamma^r(\frac{\nu+1}{p})\Gamma\big(\frac{p-r}{r}(\frac{\nu+1}{p}+\frac{1}{k})\big)} \\
&\quad \cdot \Big(x^{(p-r)(\frac{\nu+1}{p}+\frac{1}{k})-1} * \psi_{(\nu+1)/p+1/k-1}^{(k)}\big(x^{\frac{1}{k}}\big)\Big)^{*r}.
\end{aligned}$$

Nun ergibt sich über die Reihendarstellung (6) und die Integraldarstellung der verallgemeinerten Bessel-Funktionen leicht das allgemeine Faltungsgesetz

$$x^\mu * \psi_\nu^{(k)}\big(x^{\frac{1}{k}}\big) = \frac{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1-\frac{1}{k})}{\Gamma(\mu+\nu+2-\frac{1}{k})} \psi_{\mu+\nu+1}^{(k)}\big(x^{\frac{1}{k}}\big)$$

für $\mu > -1$, $\nu > \frac{1}{k} - 1$. Daraus ergeben sich (13) und (14) sofort. □

Korollar 1. *Es ist*

$$A_{k,p}^{(\nu)}(x) = \sum_{\varrho=1}^{p}(-1)^{\varrho-1}\binom{p}{\varrho}\left(\frac{2}{k}\right)^{p-\varrho}\Gamma^{p-\varrho}\left(\frac{1}{k}\right)A_{\nu+(p-\varrho)/k}(x;SS_{k,\varrho})$$

$$= V_{k,p}^{(\nu)}x^{k\nu+p} + (-1)^{p-1}\Delta_{k,p}^{(\nu)}(x). \tag{15}$$

Beweis. (11) läßt sich mit Hilfe von (14) folgendermaßen schreiben:

$$A_\nu(x;SS_{k,p}) = V_{k,p}^{(\nu)}x^{k\nu+p} + \sum_{r=1}^{p}\binom{p}{r}\left(\frac{2}{k}\right)^{p-r}\Gamma^{p-r}\left(\frac{1}{k}\right)\Delta_{k,r}^{(\nu+(p-r)/k)}(x). \tag{16}$$

Diese Darstellung läßt sich auch für $p = 1$ verwenden, wenn man (5) in der Form

$$A_\nu(x;SS_{k,1}) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\sum_{|n|<x}\left(x^k - |n|^k\right)^\nu = V_{k,1}^{(\nu)}x^{k\nu+1} + \Delta_{k,1}^{(\nu)}(x)$$

mit

$$\Delta_{k,1}^{(\nu)}(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\psi_{\nu+1/k}^{(k)}(x)$$

schreibt. Wendet man die Bildung der linken Seite von (15) auf (16) an, so erhält man für die rechte Seite von (16)

$$\begin{aligned}
&\sum_{\varrho=1}^{p}(-1)^{\varrho-1}\binom{p}{\varrho}\left(\frac{2}{k}\right)^{p-\varrho}\Gamma^{p-\varrho}\left(\frac{1}{k}\right)V_{k,\varrho}^{(\nu+(p-\varrho)/k)}x^{k\nu+p}\\
&+\sum_{\varrho=1}^{p}\sum_{r=1}^{\varrho}(-1)^{\varrho-1}\binom{p}{\varrho}\binom{\varrho}{r}\left(\frac{2}{k}\right)^{p-r}\Gamma^{p-r}\left(\frac{1}{k}\right)\Delta_{k,r}^{(\nu+(p-r)/k)}(x)\\
&\qquad= \sum_{\varrho=1}^{p}(-1)^{\varrho-1}\binom{p}{\varrho}V_{k,p}^{(\nu)}x^{k\nu+p}\\
&\qquad\quad+\sum_{\varrho=1}^{p}\sum_{r=1}^{\varrho}(-1)^{\varrho-1}\binom{p}{\varrho}\binom{\varrho}{r}\left(\frac{2}{k}\right)^{p-r}\Gamma^{p-r}\left(\frac{1}{k}\right)\Delta_{k,r}^{(\nu+(p-r)/k)}(x)\\
&\qquad= V_{k,p}^{(\nu)}x^{k\nu+p} + (-1)^{p-1}\Delta_{k,p}^{(\nu)}(x).
\end{aligned}$$

□

3. Verallgemeinerte Bessel-Funktionen

Es ist zweckmäßig, neben den in der Einführung erklärten verallgemeinerten Bessel-Funktionen noch sogenannte *modifizierte verallgemeinerte* Bessel-*Funktionen* einzubeziehen. Es bezeichne k natürliche Zahlen, ν und $q_r (r = 1, 2, \dots, p)$ beliebige reelle Zahlen mit $k \geqslant 2$, $\nu > -1$, $q_r > 0$ und $\vec{q}_p = (q_1, q_2, \dots, q_p)$. Weiter wird festgelegt

$$F_p = F_p(\vec{t}_p) = \left(t_1^k + t_2^k + \cdots + t_p^k\right)^{\frac{1}{k}}, \qquad t_1, t_2, \dots, t_p \geqslant 0,$$

$$Q_p = Q_p(\vec{q}_p) = \left(q_1^{\frac{k}{k-1}} + q_2^{\frac{k}{k-1}} + \cdots + q_p^{\frac{k}{k-1}}\right)^{1-\frac{1}{k}}.$$

Definition 1. Als modifizierte verallgemeinerte Bessel-Funktion werde bezeichnet

$$J_{p,\nu}^{(k)}(\vec{q}_p, x) = \left(\frac{4}{\pi}\right)^{\frac{p}{2}} \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \int \cdots \int_{F_p \leqslant x} \left(x^k - F_p^k\right)^{\nu} \prod_{r=1}^{p} (\cos(q_r t_r)\, dt_r). \tag{17}$$

Man erkennt unmittelbar

$$J_{1,\nu}^{(k)}(\vec{q}_1, x) = \left(\frac{2x}{q_1}\right)^{\frac{k\nu+1}{2}} J_{\nu+1/k}^{(k)}(q_1 x) \tag{18}$$

und

$$J_{1,\nu}^{(k)}\left(\vec{q}_1, x^{\frac{1}{k}}\right) = \frac{2}{k\sqrt{\pi}} \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} x^{\nu} * x^{\frac{1}{k}-1} \cos\left(q_1 x^{\frac{1}{k}}\right).$$

Durch fortgesetztes Falten erhält man leicht

$$J_{p,\nu}^{(k)}\left(\vec{q}_p, x^{\frac{1}{k}}\right) = \prod_{r=1}^{p} * J_{1,\nu_r}^{(k)}\left(q_r, x^{\frac{1}{k}}\right) \tag{19}$$

mit $\nu = \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_p - 1$. Schließlich ist noch

$$J_{p,\nu}^{(k)}\left(\vec{q}_p, x^{\frac{1}{k}}\right) = \left(\frac{4}{\pi k^2}\right)^{\frac{p}{2}} \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\, x^{\nu} * \prod_{r=1}^{p} * \left(x^{\frac{1}{k}-1} \cos\left(q_r x^{\frac{1}{k}}\right)\right).$$

Von nun an werde stets k als gerade Zahl vorausgesetzt. Dann braucht man in (17) die Integration nicht mehr auf $t_r \geqslant 0$ einschränken, sondern auch $t_r < 0$ ist zulässig. Damit ergibt sich für *gerade k* die Integraldarstellung

$$J_{p,\nu}^{(k)}(\vec{q}_p, x) = \pi^{-\frac{p}{2}} \frac{x^{k\nu+p}}{\Gamma(\nu+1)} \int \cdots \int_{F_p \leqslant 1} \left(1 - F_p^k\right)^{\nu} \cos(\vec{q}_p \vec{t}_p x)\; dt_1 \cdots dt_p$$

mit $\vec{q}_p \vec{t}_p = q_1 t_1 + q_2 t_2 + \cdots + q_p t_p$. Mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung erkennt man

$$\vec{q}_p \vec{t}_p \leqslant \sum_{r=1}^{p} q_r |t_r| \leqslant Q_p F_p \leqslant Q_p.$$

Dies legt die Substitution

$$t_r \longrightarrow \left(\frac{q_r}{Q_p}\right)^{\frac{1}{k-1}} t_r, \qquad r = 1, 2, \ldots, p,$$

nahe. Eine anschließende Substitution

$$\sum_{r=1}^{p} q_r^{\frac{k}{k-1}} t_r = Q_p^{\frac{k}{k-1}} v,$$

mit der eine der Variablen t_r durch v ersetzt wird, führt für *gerade k* zu der weiteren Integraldarstellung

$$J_{p,\nu}^{(k)}(\vec{q}_p, x) = \pi^{-\frac{p}{2}} \frac{x^{k\nu+p}}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{q_1 q_2 \cdots q_p}{Q_p^p}\right)^{\frac{1}{k-1}} \left(Q_p^p\right)^{\frac{k}{k-1}} \int_{-1}^{+1} f(v) \cos(Q_p x v)\, dv \tag{20}$$

mit

$$f(v) = \int \cdots \int_{v^k \leqslant P \leqslant 1} (1-P)^\nu dt_1 dt_2 \cdots dt_{p-1}. \tag{21}$$

P bedeutet das Polynom

$$P = P(\vec{t}_{p-1}) = \sum_{r=1}^{p-1} \Big(\frac{q_r}{Q_p}\Big)^{\frac{k}{k-1}} t_r^k + \Big(\frac{q_p}{Q_p}\Big)^{\frac{k}{k-1}} t_p^k,$$

$$t_p = \Big(\frac{Q_p}{q_p}\Big)^{\frac{k}{k-1}} v - \sum_{r=1}^{p-1} \Big(\frac{q_r}{Q_p}\Big)^{\frac{k}{k-1}} t_r.$$

Dies ist Lemma 2 aus [**4**] in anderer Schreibweise.

Die asymptotische Entwicklung der modifizierten verallgemeinerten Bessel--Funktion für $x \to \infty$ kann gewonnen werden, indem man das Verhalten von $f(v)$ für $v \to \pm 1$ beurteilt. Dies erfolgte in Lemma 3 aus [**4**]. Die dortige Voraussetzung, daß die q_r natürliche Zahlen bedeuten sollen, ist überflüssig. Schließlich folgt aus (14), Theorem 2, von [**4**]

$$\begin{aligned} J_{p,\nu}^{(k)}(\vec{q}_p, x) = {}& \frac{2}{\sqrt{\pi}} k^\nu \Big(\frac{2}{k-1}\Big)^{\frac{p-1}{2}} \Big(\frac{Q_p^p}{q_1 q_2 \cdots q_p}\Big)^{\frac{k-2}{2k-2}} Q_p^{-\nu-\frac{p+1}{2}} \\ & \cdot x^{\nu(k-1)+\frac{p-1}{2}} \sin\Big(Q_p x - \frac{\pi}{2}\Big(\nu + \frac{p-1}{2}\Big)\Big)\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\sqrt{x}}\Big)\Big\}. \end{aligned} \tag{22}$$

4. Reihenentwicklungen für die Restglieder im Fall gerader k

Satz 2. *Es bezeichne* $\vec{m}_p = (m_1, m_2, \dots, m_p)$ *und*

$$M_p = \Big(m_1^{\frac{k}{k-1}} + m_2^{\frac{k}{k-1}} + \cdots + m_p^{\frac{k}{k-1}}\Big)^{1-\frac{1}{k}}.$$

Dann besteht für das Restglied in (11) *im Fall gerader* k *die Reihenentwicklung*

$$\Delta_{k,p}^{(\nu)}(x) = \sum_{m_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{m_p=1}^{\infty} J_{p,\nu}^{(k)}(2\pi \vec{m}_p x). \tag{23}$$

Die Reihe ist absolut konvergent für $\nu > \frac{p-1}{2}$, *und sie besitzt die asymptotische Darstellung*

$$\begin{aligned} \Delta_{k,p}^{(\nu)}(x) = {}& \pi^{-\frac{3}{2}} \Big(\frac{k}{2\pi}\Big)^\nu \Big(\frac{1}{\pi(k-1)}\Big)^{\frac{p-1}{2}} x^{\nu(k-1)+\frac{p-1}{2}} \\ & \cdot \sum_{m_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{m_p=1}^{\infty} \Big(\frac{M_p^p}{m_1 m_2 \cdots m_p}\Big)^{\frac{k-2}{2k-2}} \\ & \cdot \frac{\sin(2\pi M_p x - \frac{\pi}{2}(\nu + \frac{p-1}{2}))}{M_p^{\nu+\frac{p+1}{2}}} \Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\sqrt{x}}\Big)\Big\}. \end{aligned} \tag{24}$$

Die Reihenentwicklungen der Terme von $H^{(\nu)}_{k,p,r}(x)$ in (11) ergeben sich für $1 \leqslant r < p$ auf Grund von (13), (14) und (23) und sind absolut konvergent für $\nu + \frac{p-r}{k} > \frac{r-1}{2}$.

Beweis. Aus (12), (6) und (18) folgt

$$\Delta^{(\nu)}_{k,p}(x^{\frac{1}{k}}) = \sum_{m_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{m_p=1}^{\infty} \prod_{r=1}^{p} {}^{*} \left(J^{(k)}_{1,(\nu+1)/p-1}(2\pi m_r x^{\frac{1}{k}}) \right).$$

Unter Verwendung von (19) ergibt sich nun sofort (23). (24) folgt dann aus (22). □

5. Abschätzungen der Restglieder im Fall gerader k

Satz 3. *Für gerade k gilt*

$$\Delta^{(\nu)}_{k,p}(x) \ll x^{k\nu + \frac{p-1-2\nu}{p+1-2\nu} p} \qquad \text{für} \quad 0 \leqslant \nu < \frac{p-1}{2}, \tag{25}$$

$$\ll x^{k\,\frac{p-1}{2}} \log x \qquad \text{für} \quad \nu = \frac{p-1}{2}, \tag{26}$$

$$\ll x^{(k-1)\nu + \frac{p-1}{2}} \qquad \text{für} \quad \nu > \frac{p-1}{2}. \tag{27}$$

Beweis. Die Abschätzung (27) ist auf Grund von (24) klar. Im Fall $0 \leqslant \nu \leqslant \frac{p-1}{2}$ wird die Darstellung (15) benutzt. Sei $d = [\frac{p+1}{2}]$ und mit einem später zu bestimmenden y mit $0 < y < x$

$$D^{(d)}_y \left(A^{(\nu+d)}_{k,p}(x^{\frac{1}{k}}) \right) = \sum_{j=0}^{d} (-1)^{d-j} \binom{d}{j} A^{(\nu+d)}_{k,p}\left((x+jy)^{\frac{1}{k}}\right)$$
$$= \int\limits_{x}^{x+y} dt_1 \int\limits_{t_1}^{t_1+y} dt_2 \ldots \int\limits_{t_{d-1}}^{t_{d-1}+y} A^{(\nu)}_{k,p}(t_d^{\frac{1}{k}})\, dt_d.$$

$A^{(\nu)}_{k,p}(x)$ ist für hinreichend großes x wachsend. Deswegen ist

$$D^{(d)}_y \left(A^{(\nu+d)}_{k,p}(x^{\frac{1}{k}}) \right) \geqslant y^d A^{\nu}_{k,p}(x^{\frac{1}{k}}),$$
$$(-1)^d D^{(d)}_{-y} \left(A^{(\nu+d)}_{k,p}(x^{\frac{1}{k}}) \right) \leqslant y^d A^{\nu}_{k,p}(x^{\frac{1}{k}}).$$

Es wird nur die erste Ungleichung behandelt. Die Entwicklungen für die zweite Ungleichung sind analog. Mit (15) ist dann

$$A^{(\nu)}_{k,p}(x^{\frac{1}{k}}) \leqslant y^{-d} D^{(d)}_y \left\{ V^{(\nu+d)}_{k,p} x^{\nu+d+\frac{p}{k}} + (-1)^{p-1} \Delta^{(\nu+d)}_{k,p}(x^{\frac{1}{k}}) \right\}. \tag{28}$$

Zunächst ist selbstverständlich

$$y^{-d} D^{(d)}_y \left(V^{(\nu+d)}_{k,p} x^{\nu+d+\frac{p}{k}} \right) = V^{(\nu)}_{k,p} x^{\nu+\frac{p}{k}} + O\left(x^{\nu-1+\frac{p}{k}} y \right). \tag{29}$$

Die Abschätzung des verbleibenden Restes in (28) erfolgt ganz im Landauschen Stil. Es wird die asymptotische Darstellung (24) verwendet. Dann ergibt sich mit einem später zu bestimmenden z

$$
\begin{aligned}
&y^{-d} D_y^{(d)}\left(\Delta_{k,p}^{(\nu+d)}\big(x^{\frac{1}{k}}\big)\right)\\
&\qquad \ll x^{\nu(1-\frac{1}{k})+\frac{p-1}{2k}} \sum_{M_p \leqslant z} \left(\frac{M_p^p}{m_1 m_2 \cdots m_p}\right)^{\frac{k-2}{2k-2}} M_p^{-\nu-\frac{p+1}{2}}\\
&\qquad\quad + x^{(\nu+d)(1-\frac{1}{k})+\frac{p-1}{2k}} y^{-d} \sum_{M_p > z} \left(\frac{M_p^p}{m_1 m_2 \cdots m_p}\right)^{\frac{k-2}{2k-2}} M_p^{-\nu-d-\frac{p+1}{2}}\\
&\qquad \ll x^{\nu(1-\frac{1}{k})+\frac{p-1}{2k}} \sum_{m \leqslant z} m^{\frac{p-3}{2}-\nu} + x^{(\nu+d)(1-\frac{1}{k})+\frac{p-1}{2k}} y^{-d} \sum_{m > z} m^{\frac{p-3}{2}-\nu-d}\\
&\qquad \ll x^{\nu(1-\frac{1}{k})+\frac{p-1}{2k}} z^{\frac{p-1}{2}-\nu} + x^{(\nu+d)(1-\frac{1}{k})+\frac{p-1}{2k}} y^{-d} z^{\frac{p-1}{2}-\nu-d}
\end{aligned}
$$

für $0 \leqslant \nu < \frac{p-1}{2}$. Im Fall $\nu = \frac{p-1}{2}$ erhält der erste Term den Faktor $\log z$. Mit $z = x^{1-1/k}\frac{1}{y}$ erhält man hieraus

$$
\begin{aligned}
y^{-d} D_y^{(d)}\left(\Delta_{k,p}^{(\nu+d)}\big(x^{\frac{1}{k}}\big)\right) &\ll x^{\frac{p-1}{2}} y^{\nu-\frac{p-1}{2}} \quad \text{für} \quad 0 \leqslant \nu < \frac{p-1}{2},\\
&\ll x^{\frac{p-1}{2}} \log x \qquad \text{für} \qquad \nu = \frac{p-1}{2}.
\end{aligned}
$$

Der Abgleich mit dem O-Term in (29) erfolgt mit der Festlegung

$$
y = x^{1-\frac{2p}{p+1-2\nu}\,\frac{1}{k}}.
$$

Dann folgt für (28)

$$
A_{k,p}^{(\nu)}\big(x^{\frac{1}{k}}\big) \leqslant V_{k,p}^{(\nu)} x^{\nu+\frac{p}{k}} + O\left(x^{\nu+\frac{p-1-2\nu}{p+1-2\nu}\,\frac{p}{k}}\right)
$$

für $0 \leqslant \nu < \frac{p-1}{2}$. Im Fall von $\nu = \frac{p-1}{2}$ erhält die x-Potenz im O-Term den zusätzlichen Faktor $\log x$. Da in gleicher Weise die Ungleichung in entgegengesetzter Richtung aufgestellt werden kann, erhält man

$$
A_{k,p}^{(\nu)}\big(x^{\frac{1}{k}}\big) = V_{k,p}^{(\nu)} x^{\nu+\frac{p}{k}} + O\left(x^{\nu+\frac{p-1-2\nu}{p+1-2\nu}\,\frac{p}{k}}\right).
$$

Mit (15) folgert man hieraus (25) und den Grenzfall (26). □

KOROLLAR 2. *Über die Zusammenhänge* (7), (8), (13), (14) *ergeben sich sofort die Abschätzungen*

$$
\begin{aligned}
H_{k,p,r}^{(\nu)}(x) &\ll x^{k\nu+p-r+\frac{r-1-2(\nu+\frac{p-r}{k})}{r+1-2(\nu+\frac{p-r}{k})}\,r} && \textit{für} \quad 0 < \nu + \frac{p-r}{k} < \frac{r-1}{2},\\
&\ll x^{k\,\frac{r-1}{2}} \log x && \textit{für} \qquad \nu + \frac{p-r}{k} = \frac{r-1}{2},\\
&\ll x^{(k-1)(\nu+\frac{p-r}{2})+\frac{r-1}{2}} && \textit{für} \qquad \nu + \frac{p-r}{k} > \frac{r-1}{2}
\end{aligned}
$$

für gerade k *und* $1 \leqslant r \leqslant p-1$.

Der Spezialfall $\nu = 1$. Es ist

$$\Delta^{(1)}_{k,p}\big(x^{\frac{1}{k}}\big) = \int_0^x \Delta_{k,p}\big(t^{\frac{1}{k}}\big)\,dt$$

mit $\Delta_{k,p}(x) = \Delta^{(0)}_{k,p}(x)$. Hierfür ergibt sich aus Satz 3

$$\Delta^{(1)}_{k,2}(x) \ll x^{k-\frac{1}{2}}, \tag{30}$$

$$\Delta^{(1)}_{k,3}(x) \ll x^{k} \log x, \tag{31}$$

$$\Delta^{(1)}_{k,p}(x) \ll x^{k+\frac{(p-3)p}{p-1}} \quad \text{für } p \geqslant 4. \tag{32}$$

(30) wurde bereits in [**3**] und (31) in [**1**] bewiesen (siehe auch [**2**]). (32) bedeutet eine Verbesserung gegenüber Lemma 4.6 in [**3**], wo das Restglied nur mit dem größeren Exponenten $k + p - 2$ abgeschätzt wurde. Es ist

$$k + \frac{(p-3)p}{p-1} = k + p - 2 - \frac{2}{p-1}.$$

6. Asymptotische Darstellung der Gitterpunktsanzahl im Hauptfall

Der Hauptfall ist durch $\nu = 0$ gekennzeichnet. Der Index $\nu = 0$ in der Darstellung (11) werde jetzt weggelassen. Damit wird für (11)

$$A(x; SS_{k,p}) = V_{k,p}x^p + H_{k,p,1}(x) + \sum_{r=2}^{p-1} H_{k,p,r}(x) + \Delta_{k,p}(x)$$

geschrieben. Der Term $H_{k,p,1}(x)$ läßt sich vermöge (6) und (8)in eine absolut konvergente Reihe verallgemeinerter Bessel-Funktionen entwickeln und erweist sich mit Hilfe von (7) von der präzisen Größenordnung $x^{(p-1)(1-1/k)}$. Reihenentwicklungen für $H_{k,p,r}(x)$ mit $r \geqslant 2$ würden sich als divergent erweisen. Neben Abschätzungen für $\Delta_{k,p}(x)$ benötigt man also auch hinreichend gute Abschätzungen für $H_{k,p,r}(x)$ mit $r \geqslant 2$. In [**2**] wurde

$$H_{k,p,r}(x) \ll x^{(p-1)(1+\frac{r-3}{2k})} \big(\Delta^*_{k,r}(x)\big)^{1-\frac{p-r}{k}} (\log x)^{r-2}, \tag{33}$$

sogar mit Einschluß der ungeraden k, angegeben. Hierin ist $\Delta_{k,r}(t) \ll \Delta^*_{k,r}(x)$ für $1 \leqslant t \leqslant x$ zu verstehen, und es sei $k \geqslant p - r$ vorausgesetzt. Diese Abschätzung wurde für $r = 2$ in [**3**] und für $r = 3$ in [**1**] auch tatsächlich bewiesen. Für $r > 3$ ist sie lediglich eine Vermutung. Aus den Untersuchungen in Chapter 4.2 von [**3**] geht für $r > 3$ nur

$$H_{k,p,r}(x) \ll x^{(p-r)(1+\frac{r-2}{k})} \big(\Delta^*_{k,r}(x)\big)^{1-\frac{p-r}{k}} \tag{34}$$

hervor. Die Vermutung (33) für $r > 3$ liegt sehr tief, aber wir befinden uns in der Lage, (34) zumindest für gerade k zu verbessern. Das geschieht mit folgendem Satz, der den Hauptsatz entscheidend vorbereitet.

SATZ 4. *Es sei $k > 2$ gerade und*

$$\Delta_{k,r}(t) \ll \Delta^*_{k,r}(x), \qquad \Delta^{(1)}_{k,r}(t) \ll \Delta^{(1)*}_{k,r}(x)$$

für $1 \leqslant t \leqslant x$. Dann ist

$$H_{k,p,r}(x) \ll \left(\Delta^{(1)*}_{k,r}(x)\right)^{\frac{p-r}{k}} \left(\Delta^*_{k,r}(x)\right)^{1-\frac{p-r}{k}} \tag{35}$$

für $2 \leqslant r \leqslant p-1$ und $k \geqslant p-r$. Insbesondere ergibt sich

$$H_{k,p,2}(x) \ll x^{(p-2)(1-\frac{1}{2k})} \left(\Delta^*_{k,2}(x)\right)^{1-\frac{p-2}{k}}, \tag{36}$$

$$H_{k,p,3}(x) \ll x^{p-3} \left(\Delta^*_{k,3}(x)\right)^{1-\frac{p-3}{k}} (\log x)^{\frac{p-3}{k}}, \tag{37}$$

$$H_{k,p,r}(x) \ll x^{(p-r)(1+\frac{(r-3)r}{r-1}\frac{1}{k})} \left(\Delta^*_{k,r}(x)\right)^{1-\frac{p-r}{k}} \quad \text{für} \quad r \geqslant 4. \tag{38}$$

BEWEIS. Nach (14) ist mit einem noch zu bestimmenden $y,\ 0 < y < x$,

$$\begin{aligned} H_{k,p,r}\big(x^{\frac{1}{k}}\big) &\ll \left|\Delta^{((p-r)/k)}_{k,r}\big(x^{\frac{1}{k}}\big)\right| \\ &\ll \left|\int_0^x (x-t)^{\frac{p-r}{k}-1} \Delta_{k,r}\big(t^{\frac{1}{k}}\big)\, dt\right| \\ &\ll \left|\left\{\int_0^{x-y} + \int_{x-y}^x\right\}(x-t)^{\frac{p-r}{k}-1} \Delta_{k,r}\big(t^{\frac{1}{k}}\big)\, dt\right| \\ &\ll \left|y^{\frac{p-r}{k}-1} \int_0^{x-y} \Delta_{k,r}\big(t^{\frac{1}{k}}\big)\, dt\right| + y^{\frac{p-r}{k}} \Delta^*_{k,r}\big(x^{\frac{1}{k}}\big) \\ &\ll y^{\frac{p-r}{k}-1} \Delta^{(1)*}_{k,r}\big(x^{\frac{1}{k}}\big) + y^{\frac{p-r}{k}} \Delta^*_{k,r}\big(x^{\frac{1}{k}}\big). \end{aligned}$$

Wählt man jetzt

$$y = \Delta^{(1)*}_{k,r}\big(x^{\frac{1}{k}}\big)\left(\Delta^*_{k,r}\big(x^{\frac{1}{k}}\big)\right)^{-1},$$

so ergibt sich sofort (35). Aus (35) und (30) folgert man (36). Aus (35) und (31) erhält man (37), was gegenüber (33) sogar einen verbesserten logarithmischen Faktor liefert. Schließlich ergeben (35) und (32) die gegenüber (34) verbesserte Abschätzung (38). □

BEWEIS DES HAUPTSATZES. G. Kuba [**5**] zeigte, daß die Huxleysche Abschätzung beim Kreisproblem auf den vorliegenden Fall übertragen werden kann. Es ist

$$\Delta_{k,2}(x) \ll x^{\frac{46}{73}+\varepsilon}, \qquad \varepsilon > 0.$$

Dann folgt aus (36)

$$H_{k,p,2}(x) \ll x^{(p-2)(1-\frac{165}{146k})+\frac{46}{73}+\varepsilon.}$$

Weiter ist

$$\Delta_{k,r}(x) \ll x^{r-2+\frac{2}{r+1}},$$

so daß aus (37) und (38)

$$H_{k,p,r}(x) \ll x^{(p-r)(1-\frac{4r}{r^2-1}\frac{1}{k})+r-2+\frac{2}{r+1}}$$

für $3 \leqslant r \leqslant p$ folgt, wobei für $r = 3$ noch der logarithmische Faktor angefügt werden muß. Es ist

$$(p-2)\Big(1 - \frac{165}{146k}\Big) + \frac{46}{73} > (p-r)\Big(1 - \frac{4r}{r^2-1}\,\frac{1}{k}\Big) + r - 2 + \frac{2}{r+1}$$

für

$$k > \frac{165}{4}\,\frac{r+1}{23r-50}\,(p-2) - \frac{146r(p-r)}{(r-1)(23r-50)}.$$

Es ist die rechte Seite dieser Ungleichung in r monoton wachsend. Folglich ergeben $r = p$ die Abschätzung und Bedingung (10).

Nimmt man für k die gegenteilige Bedingung in (9) an, so erkennt man, daß

$$p - 2 + \frac{2}{p+1} \geqslant (p-r)\Big(1 - \frac{4r}{r^2-1}\,\frac{1}{k}\Big) + r - 2 + \frac{2}{r+1}$$

für $3 \leqslant r \leqslant p$ ist, sofern

$$k \leqslant 2\Big(1 + \frac{1}{r-1}\Big)(p+1)$$

ist. Das ergibt dann (9). □

7. Zwei Bemerkugen

Erste Bemerkung. Es liegen für $\Delta_{k,p}(x)$ bessere Abschätzungen für $p \geqslant 4$ als die in der Arbeit benutzten vor. Herr Kuba teilte mir zudem mit, daß auch für $p = 2$ die verbesserte Huxleysche Abschätzung im Kreisproblem auf den hier vorliegenden Fall der Lameschen Kurven übertragen werden kann. Zu den Resultaten sei auf [**2**] verwiesen. Folglich können auch hier die Ergebnisse des Hauptsatzes geringfügig verbessert werden. Dies würde aber zu einer nicht sehr übersichtlichen Fallunterscheidung führen.

Zweite Bemerkung. Ausgangspunkt für die im Hauptsatz genannten Abschätzungen war der Satz 1 mit den asymptotischen Darstellungen der Faltungsprodukte. Dieser Satz ist verallgemeinerbar auf zwei Typen von Superellipsoiden $SE_{k,p}$.

Der erste Typ von Superellipsoiden $SE_{k,p} = SE_{k,p}(\vec{A}, \vec{\lambda})$ hängt von den Vektoren $\vec{A} = (A_1, A_2, \dots, A_p)$ und $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ ab. Dabei seien die λ_i beliebige und die A_i positive reelle Zahlen. Für die Anzahl der Gitterpunkte

$$A(x; SE_{k,p}(\vec{A}, \vec{\lambda})) = \#\Big\{\vec{n}_p \in \mathbb{Z}^p : \sum_{r=1}^{p} A_r^k \,|n_r + \lambda_r|^k \leqslant x^k\Big\}$$

gilt dann unter den Einschränkungen auf gerade $k,\ k > p+1,\ p \geqslant 5$

$$A(x; SE_{k,p}(\vec{A}, \vec{\lambda})) = \frac{V_{k,p}}{A}\,x^p + H_{k,p,1}(\vec{A}, \vec{\lambda}; x) + O\left(x^{\vartheta_{k,p}}\right)$$

mit

$$A = A_1 A_2 \cdots A_p,$$

$$H_{k,p,1}(\vec{A},\vec{\lambda};x)=\frac{V_{k,p-1}}{A}\sum_{j=1}^{p}\psi_{p/k}^{(k)}\Big(\lambda_j,\frac{x}{A_j}\Big),$$

$$\psi_\nu^{(k)}(\lambda,x)=2\sqrt{\pi}\,\Gamma\Big(\nu+1-\frac{1}{k}\Big)\sum_{m=1}^{\infty}\cos 2\pi\lambda m\cdot\Big(\frac{x}{\pi m}\Big)^{\frac{k\nu}{2}}J_\nu^{(k)}(2\pi m x).$$

Die Exponenten $\vartheta_{k,p}$ sind wie im Hauptsatz angegeben mit den entsprechenden Bedingungen.

Der zweite Typ von Superellipsoiden $SE_{k,p}(\vec{a},(a_{ij}))$ hängt von dem Vektor $\vec{a}=(a_1,a_2,\dots,a_p)$ und der p-reihigen Matrix (a_{ij}) ab. Dabei seien die a_i und a_{ij} reelle Zahlen mit $a_i>0,\ a_{ii}>0,\ a_{11}=1,\ a_{ij}=0$ für $i>j$. Für die Anzahl der Gitterpunkte

$$A(x;SE_{k,p}(\vec{a},(a_{ij}))=\#\Big\{\vec{n}_p\in\mathbb{Z}^p:\sum_{r=1}^{p}a_r^k\Big|\sum_{j=1}^{r}a_{jr}n_j\Big|^k\leqslant x^k\Big\}$$

gilt dann unter den Einschränkungen auf gerade $k,\ k>p+1,\ p\geqslant 5$

$$A(x;SE_{k,p}(\vec{a},(a_{ij}))=\frac{V_{k,p}}{a}\,x^p+H_{k,p,1}(\vec{a},(a_{ij});x)+O\left(x^{\vartheta_{k,p}}\right)$$

mit

$$a=a_1a_{11}a_2a_{22}\cdots a_pa_{pp},$$
$$H_{k,p,1}(\vec{a},(a_{ij});x)=\frac{V_{k,p-1}}{a}\sum_{j=1}^{p}a_j^p\psi_{p/k}^{(k)}\Big(\frac{x}{a_j}\Big).$$

Die Exponenten $\vartheta_{k,p}$ entsprechen wieder dem Hauptsatz.

Literatur

[1] S. Höppner and E. Krätzel, *The number of lattice points inside and on the surface* $|t_1|^k+|t_2|^k+\cdots+|t_p|^k=x$, Math. Nachr. **163** (1993), 257–268.

[2] A. Ivić, E. Krätzel, M. Kühleitner and W. G. Nowak, *Lattice points in large regions and related arithmetic functions: Recent developments in a very classic topic*; in: W. Schwarz and J. Steuding (eds.), *Proceedings Conf. on Elementary and Analytic Number Theory ELAZ'04, held in Mainz, May 24–28, 2004*, Franz Steiner Verlag, 2006, pp. 89–128

[3] E. Krätzel, *Lattice Points*, Dt. Verlag d. Wiss., Berlin and Kluwer, Dordrecht / Boston / London, 1988.

[4] E. Krätzel, *Lattice points in super spheres*, Comment. Math. Univ. Carolinae **40** (1999), 373–391.

[5] G. Kuba, *On sums of two k-th powers of numbers in residue classes II*, Abh. Math. Sem. Univ Hamburg **63** (1993), 87–95.

Universität Wien
Institut für Mathematik
Nordbergstr. 15
A-1090 Wien Austria

(Received 22 11 2005)