PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 59 (73), 1996, 161–168

STABILITÉ DE L'ÉPI-CONVERGENCE EN DIMENSION FINIE

D. Mentagui

Communicated by Gradimir Milovanović

Résumé. Nous donnerons une extension du résultat de stabilité de McLinden et Bergstrom [**8**], concernant l'épi-convergence de la somme de deux suites de fonctions convexes. On discutera ensuite la portée de nos hypothèses de qualification qui permettent la stabilité de telle convergence.

Abstract. We give an extension of stability result of McLinden and Bergstrom [**8**], concerning the epi-convergence of sum of two sequences of convex functions. Afterwards, we discuss the nature of our qualification conditions which imply the stability of such a convergence.

1. Introduction. Soit X un espace vectoriel de dimension finie. On désigne par $\Gamma_0(X)$ l'ensemble des fonctions convexes semi-continues inférieurement (sci) et propres (i.e, non identiquement égales à $+\infty$ et ne prennent jamais la valeur $-\infty$), et par $C(X)$ l'ensemble des convexes fermés non vides de X. Une des convergences naturelles qu'on peut définir sur $C(X)$, fut introduite pour la première fois par Wijsman en 1964 [**12**], [**13**] suite à ses travaux en théorie de la décision statistique [**4**]: Une suite $(C_n)_n$ de $C(X)$ converge vers un ensemble C de $C(X)$ si pour tout $x \in X$, $d(x, C_n) \to d(x, C)$ où $d(x, C)$ désigne la fonction distance d'un point x à C. Lorsque pour tout n, C_n est l'épigraphe d'une fonction f_n de $\Gamma_0(X)$ et C est l'épigraphe de $f \in \Gamma_0(X)$, on dit alors que f_n épi-converge vers f [**1**]. Cette notion de convergence a connu depuis son introduction en analyse non linéaire, une large application dans diverses branches de l'optimisation (optimisation stochastique, algorithmique, programmation mathématique etc...). Elle s'est révélée aussi un outil puissant et efficace dans l'étude et l'approximation des problèmes variationnels et posséde de nombreuses propriétés remarquables [**1**], [**3**], [**6**], [**11**]. Cette convergence est en général différente de la convergence simple, cependant il existe dans la littérature des conditions sous lesquelles les deux convergences coïncident [**10**].

L'objet de cet article est de donner une extension des résultats de McLinden et Bergstrom [**8**] concernant la stabilité de cette convergence. L'intérêt de ce problème

AMS Subject Classification (1991): Primary 90C25; Secondary 26B25 réside entre autres dans l'interprétation suivante: Etant donné deux espaces X et Y de dimensions finies et f_n, g_n $n = 1, 2 \ldots$ des fonctions de $\Gamma_0(X \times Y)$ qui épi-convergent respectivement vers deux fonctions f et g de $\Gamma_0(X \times Y)$. Soient $\Phi_n = f_n + g_n$ et $\Phi = f + g$ les fonctions de perturbations associées respectivement aux problèmes de minimisation:

$$(P_n)\colon \inf\{\Phi_n(x,0)\colon x \in X\}; \qquad (P)\colon \inf\{\Phi(x,0)\colon x \in X\}.$$

Les problèmes duaux de (P_n) et (P) sont définis respectivement par:

$$(P_n^*)\colon \sup\{-\Phi_n^*(0,y)\colon y \in Y\}; \qquad (P^*)\colon \sup\{-\Phi^*(0,y)\colon y \in Y\},$$

où la notation Φ^* désigne la fonction conjuguée de Φ [**5**].

Dans de nombreux problèmes d'approximation (voir par exemple [**3**]), on s'intéresse à la convergence des solutions des problèmes $(P_n)_n$ et $(P_n^*)_n$ vers les solutions de (P) et (P^*) respectivement. Une des techniques utilisées, est de faire épi/hypo-converger les Lagrangiens associés aux fonctions Φ_n vers le Lagrangien associé à Φ [**3**]. Une condition nécessaire et suffisante pourque cette convergence ait lieu est que $(\Phi_n)_n$ épi-converge vers Φ [**3**], mais ceci n'est rien d'autre q'un problème de stabilité de l'épi-convergence de la suite $(f_n + g_n)_n$.

2. Préliminaires. Soient X et Y deux espaces vectoriels de dimensions finies. On désigne par $\Gamma_0(X)$ l'ensemble des fonctions convexes propres et sci définies sur X, et par $C(X)$ l'ensemble des convexes fermés non vides de X. Le domaine effectif d'une fonction $f \in \Gamma_0(X)$ est l'ensemble noté $\operatorname{Dom} f = \{x \in X\colon f(x) < +\infty\}$, et l'épigraphe de f est l'ensemble noté $\operatorname{epi} f$ avec $\operatorname{epi} f = \{(x,\lambda) \in X \times R\colon f(x) \le \lambda\}$. Si $C \in C(X)$, on désigne par δ_c la fonction qui vaut 0 sur C et $+\infty$ ailleurs et par 0^+C le cône asymptotique de C, i.e l'ensemble $\bigcap_{\varepsilon>0} \varepsilon(C - x_0)$ où x_0 est un élément quelconque de C. On vérifie classiquement que C ne dépend pas du choix de x_0 dans C, et qu'il existe une et une seule fonction notée $f0^+$ telle que 0^+ $(\operatorname{epi} f) = \operatorname{epi} f0^+$ [**7**].

Si $A\colon X \to Y$ est un opérateur linéaire, on note par Af la fonction définie par: $y \in Y \to (Af)(y) = \inf\{f(x)\colon Ax = y\}$ s'il existe x tel que $Ax = y$ et $(Af)(y) = +\infty$ sinon [**9**]. Soient maintenant $(C_n)_n$, C des ensembles de $C(X)$ et $(f_n)_n$, f des fonctions de $\Gamma_0(X)$. On dit que:

• C_n converge vers C et on note $C_n \xrightarrow{e} C$ [**12**] si $\forall x \in X$, $d(x, C_n) \to d(x, C)$, ce qui est encore équivalent à (voir [**1**]):

i) $\forall x \in C$, $\exists x_n \in C_n$, $x_n \to x$,

ii) Pour toute sous-suite $(n_k)_k$, si $x_k \in C_{n_k}$ et $x_k \to x$ alors $x \in C$.

• $(f_n)_n$ épi-converge vers f et on note $f_n \xrightarrow{e} f$ si $\operatorname{epi} f_n \xrightarrow{e} \operatorname{epi} f$ dans $X \times \mathbf{R}$. Cette définition est équivalente à la formulation fonctionnelle [**1**]:

i) $\forall x \in X$, $\forall x_n \to x$, $f(x) \le \underline{\lim}\, f_n(x_n)$

ii) $\forall x \in X$, $\exists x_n \to x$, $f_n(x_n) \to f(x)$

3. Extension des résultats de stabilité de l'épi-convergence de McLinden et Bergstrom. Dans [**8**], McLinden et Bergstrom ont montré que si f, g, f_n, g_n, $n = 1, 2\ldots$ sont des fonctions de $\Gamma_0(R^p)$ telles que $f_n \xrightarrow{e} f$ et $g_n \xrightarrow{e} g$, alors sous l'hypothèse de qualification $0 \in \operatorname{int}(\operatorname{Dom} f - \operatorname{Dom} g)$, la suite $(f_n + g_n)_n$ épi-converge vers $f + g$. Ils utilisent le résultat clé:

3.1 THÉORÈME. [**8**, Th. 3] *Soient C_n, C des parties convexes de R^p et A_n, $A\colon R^p \to R^q$ des opérateurs linéaires tels que A_n converge vers A, i.e $|A_n(x) - A(x)| \to 0$, $\forall x \in R^p$. Supposons que $C_n \xrightarrow{e} C$ et $\operatorname{Ker} A \cap 0^+C = \{0\}$. Alors:* (i) *$A_n C_n \xrightarrow{e} AC$;* (ii) *les ensembles $A_n C_n$ sont fermés pour n suffisamment grand si les ensembles C_n le sont aussi.*

Remarque. La conclusion du théorème 3.1 n'est plus vraie si on suppose que $\operatorname{Ker} A \cap 0^+C$ est un sous espace vectoriel non nul, comme le montre le contre-exemple suivant [**8**]:

Soit $A\colon (x, y) \in R^2 \to A(x, y) = (0, y)$ et soit $A_n = A$, $\forall n$. Il est clair que les ensembles $C_n = \{\lambda_1(-n, 0) + \lambda_2(n, 0) + \lambda_3(n, 1),\ \lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^3 \lambda_i = 1\}$ convergent vers l'ensemble $C = R \times \{0\}$ et que $\operatorname{Ker} A \cap 0^+C = R \times \{0\}$, mais $A_n C_n = \{0\} \times [0, 1]$ ne converge pas vers $AC = \{(0, 0)\}$.

3.2. THÉORÈME. *Soient C_n, C des parties convexes de R^p et A_n, $A\colon R^p \to R^q$ des opérateurs linéaires tels que A_n converge vers A, i.e. $|A_n(x) - A(x)| \to 0$, $\forall x \in R^p$. Supposons que,* (i) *$\operatorname{Ker} A \cap 0^+C = M$ est un sous-espace vectoriel;* (ii) *$M \subset \operatorname{Ker} A_n$, $\forall n \geq n_0$;* (iii) *$C_n + M \xrightarrow{e} C$. Alors, $A_n C_n \xrightarrow{e} AC$. Si de plus les $C_n + M$ sont fermés (en particulier ceci a lieu si C_n est fermé et si $0^+C_n \cap M$ est un sous-espace vectoriel), alors les ensembles $A_n C_n$ sont fermés pour n suffisamment grand.*

Preuve. On va se ramener aux hypothèses du théorème 3.1 par passage à l'espace quotient R^p/M. Comme $M \subset \operatorname{Ker} A_n \cap \operatorname{Ker} A$, les applications A_n et A se décomposent d'une manière canonique sous la forme $A_n = \overline{A}_n \circ s$ et $A = \bar{A} \circ s$ où $s\colon R^p \to R^p/M$ désigne la surjection canonique. Soit $m = \dim M^\perp$ et $\psi\colon R^m \to R^p/M$ un isomorphisme d'espace vectoriel. Posons:

$$B_n = \overline{A}_n \circ \psi, \qquad D_n = (\psi^{-1} \circ s)(C_n),$$
$$B = \bar{A} \circ \psi, \qquad D = (\psi^{-1} \circ s)(C).$$

Il est clair que les opérateurs linéaires B_n convergent vers B. Montrons maintenant que $\operatorname{Ker} B \cap 0^+D = \{0\}$ et $D_n \xrightarrow{e} D$.

• $\operatorname{Ker} B \cap 0^+D = \{0\}$: En effet soient $y \in \operatorname{Ker} B \cap 0^+D$, $y_0 \in D$ et $\lambda \geq 0$. Alors $y_0 + \lambda y \in D$ et $\psi(y_0) + \lambda\psi(y) \in s(C)$. Posons $\psi(y_0) = s(x_0)$ et $\psi(y) = s(t)$ avec $x_0 \in C$ et $t \in R^p$. D'après (i), nous avons $x_0 + \lambda t \in C + M = C$, par suite $t \in 0^+C$. D'autre part $B(y) = 0$ si et seulement si $A(t) = \bar{A}(s(t)) = 0$. Ainsi, $t \in \operatorname{Ker} A \cap 0^+C = M$. Par conséquent $\psi(y) = 0$ et $y = 0$.

• $D_n \xrightarrow{e} D$: L'hypothèse (iii) est équivalente à la convergence des $s(C_n)$ vers $s(C)$ et donc celle des D_n vers D car ψ est un isomorphisme.

Toutes les hypothèses du théorème 3.1 sont satisfaites, donc $B_nD_n \xrightarrow{e} BD$ i.e. $A_nC_n \to AC$. Si de plus $C_n + M$ est fermé alors $s(C_n)$ l'est aussi ainsi que D_n. Par conséquent $B_nD_n = A_nC_n$ est fermé pour n suffisamment grand d'après le théorème 3.1.

En particulier ceci aura lieu si C_n est un convexe fermé et si $0^+C_n \cap M$ est un sous-espace vectoriel [**9**], ce qui achève la preuve. □

3.3. COROLLAIRE. *Soient $(C_n)_n$ et $(D_n)_n$ deux suites de $C(R^p)$ qui convergent vers deux convexes C et D respectivement. Supposons que:*

(i) $0^+C \cap -0^+D = M$ *est un sous-espace vectoriel;*

(ii) $M \subset 0^+C_n \cap -0^+D_n$, $\forall n \geq n_0$*;*

Alors, $C_n + D_n \xrightarrow{e} C + D$ et $C_n + D_n$ est fermé pour n suffisamment grand.

Preuve. Considérons l'application linéaire $A: (x, y) \in R^p \times R^p \to x + y$. Alors:

- $\operatorname{Ker} A \cap 0^+(C \times D) = \{(x, -x): x \in M\}$ est un sous espace vectoriel.
- $C_n \times D_n + \{(x, -x): x \in M\} = C_n \times D_n \xrightarrow{e} C \times D$

Toutes les hypothèses du théorème 3.2 sont satisfaites, donc $A(C_n \times D_n) \xrightarrow{e} A(C \times D)$, i.e. $C_n + D_n \xrightarrow{e} C + D$; et les $C_n + D_n$ sont fermés pour n suffisamment grand.

L'hypothèse de qualification $0 \in \operatorname{int}(\operatorname{Dom} f - \operatorname{Dom} g)$ qui assure la stabilité de l'épi-convergence de la somme, revient à supposer que le cône engendré par $\operatorname{Dom} f - \operatorname{Dom} g$ est égal à l'espace R^p. Nous donnons une extension de ce résultat dans le théorème suivant:

3.4. THÉORÈME. *Soient f, g, f_n, g_n, $n = 1, 2 \ldots$ des fonctions de $\Gamma_0(R^p)$ telles que $f_n \xrightarrow{e} f$ et $g_n \xrightarrow{e} g$. Sous l'une ou l'autre des deux hypothèses suivantes:*

(H)

(i) $M = \bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda(\operatorname{Dom} f - \operatorname{Dom} g)$ *est un s.e.v. de dimension m.*

(ii) *Il existe une suite d'applications linéaires ψ_n, $\psi: R^p \to R^m$ telles que: $\psi_n(M) = \psi(M) = R^m$; $(\psi_n)_n$ converge vers ψ;* $\operatorname{Ker} \psi_n \cap \operatorname{Dom} f_n - \operatorname{Dom} g_n = \{0\}$, $\forall n \geq n_0$.

(iii) $\operatorname{Dom} f_n \cap \operatorname{Dom} g_n \subset M$.

(H')

(i) $M = \bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda(\operatorname{Dom} f - \operatorname{Dom} g)$ *est un s.e.v. de dimension m*

(ii) $\operatorname{Dom} f_n - \operatorname{Dom} g_n \subset M$, $\forall n \geq n_0$

(iii) $\operatorname{Dom} f_n \cap \operatorname{Dom} g_n \neq \emptyset$ *pour tout n suffisamment grand.*

Alors, $f_n + g_n$ est propre et $f_n + g_n \xrightarrow{e} f + g$.

Remarque. L'hypothèse $0 \in \operatorname{int}(\operatorname{Dom} f - \operatorname{Dom} g)$ implique évidemment que les hypothèses (H) et (H') sont satisfaites.

Pour la preuve du théorème 3.4, nous utiliserons le lemme:

3.5. LEMME. [**8**, Th. **7**] *Soient f_n, f des fonctions de $\Gamma_0(R^p)$ et A_n, $A: R^p \to R^q$ des opérateurs linéaires tels que $f_n \xrightarrow{e} f$ et $(A_n)_n$ converge vers A. Si* $\operatorname{Ker} A \cap \{x: f0^+(x) \leq 0\} = \{0\}$, *alors $A_n f_n \xrightarrow{e} Af$ et ces fonctions sont convexes propres et sci.*

Preuve du théorème 3.4. Si $m = p$ alors $(i - H)$ ou $(i - H')$ implique que $0 \in \operatorname{int}(\operatorname{Dom} f - \operatorname{Dom} g)$, et on est alors dans les conditions du théorème 5 [**8**]. On peut donc supposer que $0 < m < p$.

Etape 1. Supposons que l'hypothèse (H) soit satisfaite. La propreté de $f_n + g_n$ provient de (ii-H) puisque $0 \in \operatorname{Dom} f_n - \operatorname{Dom} g_n$ implique que $\operatorname{Dom} f_n \cap \operatorname{Dom} g_n$ est non vide, par conséquent $f_n + g_n$ n'est pas identiquement égale à $+\infty$. Montrons maintenant que $f_n + g_n \xrightarrow{e} f + g$:

• Soient $x \in R^p$ et $(x_n)_n$ une suite qui converge vers x. Nous avons toujours:

$$f(x) + g(x) \leq \underline{\lim}\, f_n(x_n) + \underline{\lim}\, g_n(x_n) \leq \underline{\lim}\, f_n(x_n) + g_n(x_n).$$

• $\forall x \in R^p$, $\exists x_n \to x$, $\overline{\lim}\, f_n(x_n) + g_n(x_n) \leq f(x) + g(x)$: Comme $\psi(\operatorname{Dom} f) = \operatorname{Dom}(\psi f)$ et $\psi(\operatorname{Dom} g) = \operatorname{Dom}(\psi g)$, les hypothèses (i-H) et (ii-H) impliquent:

$$R^m = \bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda(\psi(\operatorname{Dom} f) - \psi(\operatorname{Dom} g)) = \bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda(\operatorname{Dom} \psi f - \operatorname{Dom} \psi g)$$

ce qui est encore équivalent à $0 \in \operatorname{int}(\operatorname{Dom} \psi f - \operatorname{Dom} \psi g)$. D'autre part le fait que M soit un sous espace vectoriel implique que $\operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g$ est non vide [**2**]. Quitte à faire une translation, on peut supposer sans nuire à la généralité que $0 \in \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g$, donc $\operatorname{Dom} f \cup \operatorname{Dom} g \subset M$. Soit α un nombre réel tel que $\{x: f(x) \leq \alpha\}$ soit non vide et soit x_0 tel que $f(x_0) \leq \alpha$. D'après [**9**, Th. 8.7] nous avons:

$$\{y: f0^+(y) \leq 0\} = \bigcap_{\varepsilon > 0} \varepsilon[\{x: f(x) \leq \alpha\} - x_0] \subset \varepsilon(\operatorname{Dom} f - x_0) \subset M.$$

De la même façon $\{y: g0^+(y) \leq 0\} \subset M$. En utilisant (ii-H) on en déduit

$$\operatorname{Ker} \psi \cap \{y: f0^+(y) \leq 0\} = \operatorname{Ker} \psi \cap \{y: g0^+(y) \leq 0\} = \{0\}.$$

Les hypothèses du Lemme 3.5 sont satisfaites, par conséquent $\psi_n f_n \xrightarrow{e} \psi f$, $\psi_n g_n \xrightarrow{e} \psi g$ et ces fonctions sont convexes propres et sci. Mais compte tenu du fait que $0 \in \operatorname{int}(\operatorname{Dom} \psi f - \operatorname{Dom} \psi g)$, l'épi-convergence est stable pour la somme de fonctions convexes, donc $\psi_n f_n + \psi_n g_n \xrightarrow{e} \psi f + \psi g$ et ces fonctions sont convexes propres et sci pour n suffisamment grand.

Si $x \notin \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g$, alors $f(x) + g(x) = +\infty$, et pour toute suite $(x_n)_n$ qui converge vers x on a

$$\overline{\lim}\, f_n(x_n) + g_n(x_n) \leq f(x) + g(x).$$

Si $x \in \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g$, alors $y = \psi(x) \in \operatorname{Dom} \psi f \cap \operatorname{Dom} \psi g$. Il existe donc une suite $y_n \in \operatorname{Dom} \psi_n f_n \cap \operatorname{Dom} \psi_n g_n$ qui converge vers y telle que,

$$\overline{\lim}(\psi_n f_n + \psi_n g_n)(y_n) \leq \psi f(y) + \psi g(y) \leq f(x) + g(x) \tag{3.1}$$

Soit $(\varepsilon_n)_n$ une suite de nombres positifs qui tend vers 0. Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe $u_n \in \operatorname{Dom} f_n$ et $v_n \in \operatorname{Dom} g_n$ tels que

$$\begin{gathered} \psi_n(u_n) = \psi_n(v_n) = y_n \\ \psi_n f_n(y_n) \leq f_n(u_n) \leq \psi_n f_n(y_n) + \varepsilon_n \\ \psi_n g_n(y_n) \leq g_n(v_n) \leq \psi_n g_n(y_n) + \varepsilon_n \end{gathered} \tag{3.2}$$

Par (3.1) et (3.2) nous avons donc

$$\overline{\lim}(f_n(u_n) + g_n(v_n)) \leq f(x) + g(x).$$

D'autre part (ii-H) et (3.2) impliquent

$$u_n - v_n \in \operatorname{Ker} \psi_n \cap \operatorname{Dom} f_n - \operatorname{Dom} g_n = \{0\}.$$

Par suite

$$x_n = u_n = v_n \in \operatorname{Dom} f_n \cap \operatorname{Dom} g_n$$

et $x_n \in M$ d'après (iii-H). Il suffit maintenant de montrer que $x_n \to x$:

D'après (ii-H), ψ_n converge vers ψ et les restrictions de ψ_n et ψ à M sont bijectives, donc ψ_n^{-1} converge vers ψ^{-1}, et donc uniformément sur toute boule de R^m. Mais compte tenu de (3.2), nous avons $\psi_n(x_n) \to \psi(x)$. On déduit que $\psi_n^{-1}(\psi_n(x_n)) \to \psi^{-1}(\psi(x))$, c'est à dire $x_n \to x$.

Etape 2. Si maintenant l'hypothèse (H') est vérifiée, alors (ii-H) est nécessairement satisfaite, car on peut toujours trouver une application linéaire $\psi : R^p \to R^m$ telle que $\psi(M) = R^m$. On prendra alors $\psi_n = \psi$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. On peut alors construire comme précédemment pour tout $x \in \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g$, une suite $(x_n)_n$ de R^p telle que

$$\begin{gathered} \psi(x_n) \to \psi(x) \\ \overline{\lim}(f_n + g_n)(x_n) \leq f(x) + g(x) \\ x_n \in \operatorname{Dom} f_n \cap \operatorname{Dom} g_n \end{gathered} \tag{3.3}$$

Pour conclure il suffit de montrer que $x_n \to x$:

Comme $g_n \xrightarrow{e} g$ et $g(x) < +\infty$, il existe une suite $z_n \in \operatorname{Dom} g_n$ telle que $z_n \to x$. Par suite:

$$\psi(x_n - z_n) = \psi(x_n) - \psi(z_n) \to \psi(x) - \psi(x) = 0.$$

Mais d'après (3.3) et (ii-H'), nous avons $x_n - z_n \in \operatorname{Dom} f_n - \operatorname{Dom} g_n \subset M$. Par conséquent, $x_n - z_n \to 0$, c'est à dire que $(x_n)_n$ converge vers x. $\square$

4. Commentaires. (1) Dans [**3**, Th. 4.1], Azé a donné des hypothèses de qualification qui assurent la stabilité de l'épi-convergence de la somme de deux suites de fonctions de $\Gamma_0(X)$. Notons (H'') ces hypothèses avec $X = R^p$:

(H'')

(a) f, g, f_n, g_n, $n = 1, 2 \ldots$ sont des fonctions de $\Gamma_0(X)$ telles que $f_n \xrightarrow{e} f$ et $g_n \xrightarrow{e} g$.

(b) Il existe une boule $B(0,r)$ telle que pour tout $\xi \in B(0,r)$, il existe un indice N et deux suites bornées $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ telles que $\xi = x_n - y_n$, $\forall n \geq N$, $\overline{\lim}\, f_n(x_n) < +\infty$ et $\overline{\lim}\, g_n(y_n) < +\infty$.

Si $0 \in \operatorname{int}(\operatorname{Dom} f - \operatorname{Dom} g)$, alors (H'') est satisfaite [**3**, Coroll. 4.2]. Nos hypothèses (H) et (H') n'impliquent pas en général la réalisation de l'hypothèse (H''). En effet:

i) Si (H) est vérifiée avec $\psi_n = \psi$ pour tout n, et si M est un sous espace vectoriel propre, i.e. $M \neq X$, alors (H'') n'est jamais vérifiée: soit $x \in \operatorname{Ker}\psi$ et $x \neq 0$. L'hypothèse (H'') implique l'existence d'une boule $B(o,r)$ contenue dans l'ensemble $\bigcup_k \bigcap_{n \geq k} \operatorname{Dom} f_n - \operatorname{Dom} g_n$. Soit $\lambda \neq 0$ et $t \in R^p$ tels que $x = \lambda t$ et $|t| \leq r$. Alors, $t \in \operatorname{Ker}\psi \cap \operatorname{Dom} f_n - \operatorname{Dom} g_n = \{0\}$, ce qui est absurde.

ii) Si (H') est vérifiée avec M un sous espace propre, alors (H'') n'est jamais vérifiée: le fait que M soit un s.e.v. propre implique que l'ensemble $\bigcup_k \bigcap_{n \geq k} \operatorname{Dom} f_n - \operatorname{Dom} g_n$ ne contient aucune boule.

(2) Montrons enfin par des exemples que les hypothèses (H) et (H') sont indépendantes:

• Soient pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ les ensembles définis par:

$$C_n = \{(x,y) \in R^2 : y = nx\}, \qquad C = \{(x,y) \in R^2 : x = 0 \text{ et } y \in R\}$$

Considérons les fonctions $f = \delta_c$, $g = \delta_{(0,0)}$, $f_n = \delta_{c_n}$, $g_n = g + 1/n$. Nous avons:

(i-H): $M = \cup_{\lambda \geq 0} \lambda C = \{0\} \times \mathbf{R}$

(ii-H): $\psi_n = \psi : (x,y) \in R^2 \to y$, $\operatorname{Ker}\psi \cap C_n = \{(0,0)\}$ et $\psi(M) = R$

(iii-H): $C_n \cap \{(0,0)\} = \{(0,0)\} \subset M$.

L'hypothèse (H) est donc satisfaite alors que (H') ne l'est pas, car ii-H') n'est pas satisfaite.

• Soient les ensembles, $C_n = R \times \{1/n\}$, $C = R \times \{0\}$, et les fonctions $f_n = \delta_{c_n}$, $f = \delta_C$, $g_n = \delta_{(1/n,1/n)}$ et $g = \delta_{(0,0)}$. L'hypothèse (H') est satisfaite car:

(i-H'): $M = \bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda C = R \times \{0\}$;

(ii-H'): $\operatorname{Dom} f_n - \operatorname{Dom} g_n = M$;

(iii-H'): $\operatorname{Dom} f_n \cap \operatorname{Dom} g_n \neq \emptyset$ mais (ii-H) n'est pas satisfaite puisque, $\operatorname{Dom} f_n \cap \operatorname{Dom} g_n = \{(1/n, 1/n)\} \not\subset M$, $\forall n \geq 1$.

Références

1. H. Attouch, *Variational Convergence for Functions and Operators*, Pitman, 1984.

2. H. Attouch, H. Brezis, *Duality for the sum of convex functions in general Banach spaces*, Publications AVAMAC, Univ. de Perpignan **84–10** (1984).
3. D. Azé, *Convergences variationnelles et dualité. Applications en calcul des variations et en programmation mathématique*, Thèse d'Etat, Univ. de Perpignan, 1986.
4. D.L. Burkholder, R.A. Wijsman, *Optimum properties and admissibility of sequentiel tests*, Ann. Math. Statist. **34** (1963), 1–17.
5. I. Ekeland, R. Temam, *Analyse convexe et problèmes variationnels*, Dunod, Paris 1974.
6. J.L. Joly, *Une famille de topologies et de convergences sur l'ensemble des fonctionnelles convexes*, Thèse, Grenoble, 1970.
7. P.J. Laurent, *Approximation et optimisation*, Hermann, Paris 1972.
8. L. McLinden, R. Bergstrom, *Preservation of convergence of convex sets and functions in finite dimensions*, Trans. Amer. Math. Soc. **268** (1981), 127–142.
9. R.T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press, 1970.
10. G. Salinetti, R.J.B. Wets, *On the relations between two types of convergence for convex functions*, J. Math. Anal. Appl. **60** (1977), 211–226.
11. Y. Sonntag, *Convergence au sens de Mosco; théorie et applications à l'approximation des solutions d'inéquations*, Thèse d'Etat, Marseille, 1982.
12. R.A. Wijsman, *Convergence of sequences of convex sets, cones and functions*, Bull. Amer. Math. Soc. **70** (1964), 186–188.
13. R.A. Wijsman, *Convergence of sequences of convex sets, cones and funtions II*, Trans. Amer. Math. Soc. **123** (1966), 32–45.

Département de mathématique
Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix
Rempart de la Vierge, 8
B–5000 Namur, Belgique

(Reçu le 14 06 1995)