UNE APPLICATION DU LEMME DE MITTAG-LEFFLER DANS LA CATEGORIE DES QUOTIENTS D'ESPACES DE FRECHET

Belmesnaoui Aqzzouz, Sala Eljadida

(Reçu le 6 juillet 2006)

Abstract. An application of Mittag-Leffler lemma in the category of quotients of Fréchet spaces. We use Mittag-Leffler Lemma to prove that for a nonempty interval $]a,b[\subset\mathbb{R}$, the restriction mapping $H^{\infty}(]a,b[+\mathrm{i}\mathbb{R})\rightarrow C^{\infty}(]a,b[)$ is surjective and we give a corollary.

Keywords: Fréchet space, projective limit, surjective mapping

MSC 2000: 46M05, 46M15, 46M40

1. Introduction et notations

Le Lemme de Mittag-Leffler est un résultat classique. Dans son livre ([5], chapitre 3, Section 3.4) Jochen Wengenroth a donné la connection entre le Lemme de Mittag-Leffler et l'exactitude du foncteur limite projective, il a montré que la procédure de Mittag-Leffler peut être utilisée pour donner une condition suffisante pour qu'un système projectif (X_n) satisfait $\mathrm{Proj}_1\,(X_n)=0$. Notons que les espaces du système projectif et dénombrable (X_n) peuvent être des groupes topologiques métrisables et complets ou des espaces de Fréchet. Aussi, notons que le Lemme de Mittag-Leffler joue un rôle centrale dans les travaux de Palamodov [2] et [3] i.e. concernant les foncteurs Proj_1 et Ext_1 pour les espaces de Fréchet et les limites projectives des espaces $\mathcal{DF}$.

Dans [1] nous avons étendu le Lemme de Mittag-Leffler à la catégorie des quotients d'espaces de Fréchet. L'objectif de ce papier est de donner une application de cette extension. Pour cela nous utiliserons le Lemme de Mittag-Leffler dans la catégorie des espaces de Fréchet pour établir que si $]a,b[$ est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, alors toute fonction $f\in C^{\infty}(]a,b[)$ est la restriction d'une fonction $\tilde{f}\in H^{\infty}(]a,b[+\mathrm{i}\mathbb{R})$ tel que $f=\tilde{f}_{|]a,b[}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}^2$, pour tout $n=(n_1,n_2)\in\mathbb{N}^2$, on a $D^n f(x)=0$.

Ensuite, nous déduirons à partir du Lemme de Mittag-Leffler dans la catégorie des quotients d'espaces de Fréchet (Théorème 3.2 de [1]) que $\varprojlim_k (E_k|F_k) = (\varprojlim_k E_k)|(\varprojlim_k F_k)$, où $E_k = H^k(]a,b[+\mathrm{i}\mathbb{R})$ et $F_k = \mathrm{Ker}(R_k)$ et R_k est la restriction $H^k(]a,b[+\mathrm{i}\mathbb{R}) \to C^k(]a,b[)$, où $H^k(]a,b[+\mathrm{i}\mathbb{R})$ est l'espace de Fréchet des fonctions de classe C^k sur $]a,b[+\mathrm{i}\mathbb{R}$ dont la restriction à $]a,b[$ est de classe C^k et $D^\alpha f(x) = 0$ pour tout $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \leqslant k-1$.

Enfin, rappelons la définition de la catégorie des quotients d'espaces de Fréchet. Soit (E, τ_E) un espace de Fréchet. Un sous-espace de Fréchet de E est un sous-espace vectoriel F, muni d'une topologie s_F telle que l'injection $(F, s_F) \to (E, \tau_E)$ est continue. Un quotient d'espaces de Fréchet $E|F$ est un couple (E,F), où E est un espace de Fréchet et F un sous-espace de Fréchet de E. Si $E|F$ et $E_1|F_1$ sont deux quotients d'espaces de Fréchet, un morphisme strict $u\colon E|F \to E_1|F_1$ est induit par une application linéaire continue $u_1\colon E \to E_1$ dont la restriction $u_{1_{|F}}\colon F \to F_1$ est continue; le morphisme u est injectif si $u_1^{-1}(F_1) = F$ i.e. si $x \in E$ est tel que $u_1(x) \in F_1$ alors $x \in F$. Le morphisme strict u est dit un pseudo-isomorphisme s'il est induit par une application linéaire continue et surjective $u_1\colon E \to E_1$ telle que $u_1^{-1}(F_1) = F$. Dans [4], L. Waelbroeck a construit la catégorie abélienne **qFré**, elle a comme objets les quotients d'espaces de Fréchet et pour morphismes les applications de la forme $u = v \circ s^{-1}$, où s est un pseudo-isomorphisme et v est un morphisme strict. Pour plus d'informations voir [4].

2. Le résultat principal

Nous notons par $C^\infty(]a,b[)$ l'espace de toutes les fonctions C^∞ sur $]a,b[$. Il est bien connu que $C^\infty(]a,b[)$ est un espace de Fréchet. Définissons maintenant l'espace $H^k_\infty(]a,b[+\mathrm{i}\mathbb{R})$.

On désigne par $H^k_\infty(]a,b[+\mathrm{i}\mathbb{R})$, l'espace des fonctions $f \in C^k(]a,b[+\mathrm{i}\mathbb{R})$ telles que $f_{|]a,b[} \in C^\infty(]a,b[)$ et

$$\forall \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2,\ |\alpha| \leqslant k-1\colon\ D^\alpha f\,(x) = 0.$$

La topologie de Fréchet de l'espace $H^k_\infty(]a,b[+\mathrm{i}\mathbb{R})$ est donnée par la famille des semi-normes $(\|.\|_{n,k})$, où

$$\|f\|_{n,k} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{x\in K} |f^{(n)}(x)| + \sup_{|\alpha|\leqslant k-1} \sup_{x\in K'} |D^\alpha f(x)|$$

et où K et K' sont des compacts contenus dans $]a,b[$.

L'espace $H^k_\infty(]a,b[+\mathrm{i}\mathbb{R})$, muni de la topologie ci-dessus, est un espace de Fréchet.

Notons que l'application restriction

$$R_k\colon\ H^k_\infty(]a,b[+\mathrm{i}\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(]a,b[),\ \ f \longmapsto \tilde{f}$$

est continue.

Nous allons utiliser le Lemme de Mittag-Leffler pour montrer qu'elle est surjective. Pour cela, nous aurons besoin de deux Lemmes.

Mais rappelons d'abord que si K est une partie compacte d'une variété $V \subset U$, où U est un voisinage ouvert de K, alors une fonction plateau associée à (K,V) est une fonction de classe C^∞, à support compact dans V, et égale à 1 sur un voisinage de K.

Lemme 2.1. *Il existe une suite de fonctions plateaux* $(\varphi_n)_n$ *telle que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*, on a* $\operatorname{supp}(\varphi_n) \subset [-1/n, 1/n]$.

Preuve. On considère une suite décroissante de nombres positifs $(\lambda_n)_n$ qui converge vers 0 lorsque $n \to \infty$, on considère aussi la fonction $\psi \in \mathcal{D}([-1,+1])$ qui est égale à 1 sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Nous prolongeons la fonction ψ en disant que $\psi(x) = 0$ si $|x| \geqslant 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous posons $\varphi_n(x) = \psi(\lambda_n x)$, alors $\operatorname{supp}(\psi) \subset]-\lambda_n/n, \lambda_n/n[$ et par suite, $\operatorname{supp}(\varphi_n) \subset [-1/n, 1/n]$. □

Lemme 2.2. *Toute fonction* $f \in \mathcal{D}([a,b])$ *est la restriction d'une fonction* $\tilde{f} \in H^k_\infty(]a,b[+\mathrm{i}\mathbb{R})$.

Preuve. Soit $K = \operatorname{supp}(f)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$M_n = \sup_{x\in K} |f^{(n)}(x)|$$

puis

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon\ \lambda_n = M_n \ \text{ et } \ \alpha_n = \sum_{p=0}^{n+k} \lambda_p$$

On voit que $\alpha_n \to \infty$ lorsque $n \to \infty$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(]-1,1[)$. La suite $(1/\alpha_n)_n$ donne une suite de fonctions plateaux $(\psi_n)_n$ avec $\psi_n(x) = \psi(x/\alpha_n)$.

La série $\tilde{f}(x+\mathrm{i}y) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} n!^{-1} f^{(n)}(x+\mathrm{i}y)\psi_n(y)(\mathrm{i}y)^n$ converge si $y \neq 0$ (elle est localement finie) et elle est d'ordre C^k sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Si $y=0$, seul le premier terme qui n'est pas nul, et donc la série est convergente. Par conséquent, la fonction $\tilde{f}$ est d'ordre C^k sur un voisinage de $\mathbb{R}$.

Soit $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2$ tel que $|\alpha| \leqslant k$. Alors

$$\begin{aligned} D^{(\alpha_1,\alpha_2)}(f^{(n)}(x)\psi_n(y)(\mathrm{i}y)^n) &= f^{(n+\alpha_1)}(x)D^{\alpha_2}(\psi_n(y)(\mathrm{i}y)^n) \\ &= f^{(n+\alpha_1)}(x)\sum_{i=0}^{\alpha_2}\psi_n^{(\alpha_2)}(y)n(n-1)\dots(n-p-1) \end{aligned}$$

Mais

$$|D^{\alpha_2}(\psi_n(y)(\mathrm{i}y)^n)| \leqslant n! \sup_{y\in[0,1],0\leqslant p\leqslant n} \psi_n^{(\alpha_2-p)}\sum_{p\neq 0}^{\alpha_2}\binom{1}{p}$$

La série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!^{-1}f^{(n)}(x)(x)\psi_n(y)(\mathrm{i}y)^n$ est dominée par la série géométrique convergente de terme général $(1/\delta_0)^{n-k}$. Donc $\tilde{f} \in C^k(K+\mathrm{i}\mathbb{R})$.

Du calcul de

$$\tilde{f}(x+\mathrm{i}y) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\tilde{f}\Big)$$

on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n+1)}(x)\psi_n(x)(\mathrm{i}y)^n + \frac{i}{2}\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}\psi_n'(y) + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(x)\psi_n'(y)(\mathrm{i}y)^n \\ &\quad = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(x)(\psi_n(x)-\psi_{n+1}(x)) + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x)(\mathrm{i}y)^n \end{aligned}$$

Le Lemme 2.2. est établi. □

Théorème 2.3. *L'application restriction* $R_k\colon H^k_\infty(]a,b[+\mathrm{i}\mathbb{R}) \to C^\infty(]a,b[)$ *est surjective.*

Preuve. Soit $(U_j)_{j\in\mathbb{N}}$ un recouvrement ouvert de $]a,b[$ localement fini. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, soit $\psi_j \in \mathcal{D}(U_j)$ telle que $\operatorname{supp}(\psi_j) \subset U_j$.

Soit $f \in C^\infty(]a,b[)$. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, nous considérons $f_j = \psi_j f$. D'après le Lemme 2.2 ce f_j se prolonge en une fonction $\tilde{f}_j$. On obtient ainsi une famille de fonctions $(\tilde{f}_j)_j$ localement d'ordre finis sur $]a,b[$. Ce qui montre que la restriction $H^k_\infty(]a,b[+\mathrm{i}\mathbb{R}) \to C^\infty\,([a,b])$ est surjective, et par suite le Théorème 2.3. est établi.

□

Enfin, pour établir notre résultat fondamental, nous aurons besoin de rappeler le Lemme de Mittag-Leffler.

Lemme de Mittag-Leffler 2.4. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soient E_n, E'_n, E''_n des espaces de Fréchet, $i_n\colon\ E''_n \to E'_n$ des applications linéaires continues injectives et $s_n\colon\ E'_n \to E_n$ des applications linéaires continues surjectives tels que la suite*

$$(0, i_n, s_n, 0)\colon\ 0 \longrightarrow E''_n \longrightarrow E'_n \longrightarrow E_n \longrightarrow 0$$

est exacte. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n\colon\ E_{n+1} \to E_n$, $u'_n\colon\ E'_{n+1} \to E'_n$, et $u''_n\colon\ E''_{n+1} \to E''_n$ sont des applications linéaires continues telles que

$$u'_n \circ i_{n+1} = i_n \circ u'_{n+1} \quad \text{et} \quad s'_n \circ u_{n+1} = s_n \circ i'_{n+1}$$

Si de plus les images des applications u'_n sont denses, alors la suite

$$0 \longrightarrow \varprojlim_n E''_n \longrightarrow \varprojlim_n E'_n \longrightarrow \varprojlim_n E_n \longrightarrow 0$$

est exacte.

P r e u v e. Pour une démonstration de ce Lemme voir par exemple le livre de J. Wengenroth ([5], section 3). $\square$

Maintenant nous sommes en mesure d'établir notre résultat fondamental

Théorème 2.5. *L'application restriction $H^\infty(]a, b[+\mathrm{i}\mathbb{R}) \to C^\infty(]a, b[)$ est surjective.*

P r e u v e. Soit K une partie compacte de $]a, b[$, et $k \in \mathbb{N}$. Notons par $C_0^k(K)$ l'espace des fonctions de classe C^k sur $\mathbb{R}$ à support dans K, et par $H^k(K + \mathrm{i}\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de classe C^k sur $]a, b[+\mathrm{i}\mathbb{R}$ dont la restriction à $]a, b[$ est de classe C^k et

$$D^\alpha f(x) = 0 \text{ pour tout } \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \leqslant k - 1$$

On sait que les espaces $C^k(]a, b[)$ et $H^k(K + \mathrm{i}\mathbb{R})$ sont de Fréchet et pour tout k, la restriction

$$R_k\colon\ H^k(]a, b[+\mathrm{i}\mathbb{R}) \longrightarrow C^k(]a, b[)$$

a une image fermé, et donc $\mathrm{Im}\,(R_k)$ est un espace de Fréchet.

Il est facile de montrer que chacun des systèmes $(\mathrm{Ker}(R_k))_k$, $\big(H^k(]a, b[+\mathrm{i}\mathbb{R})\big)_k$ et $\big(C^k(]a, b[)\big)_k$ est projectif dans la catégorie des espaces de Fréchet. Notons par $\mathrm{Ker}(R_\infty) = \varprojlim_k \mathrm{Ker}(R_k)$, $H^\infty(]a, b[+\mathrm{i}\mathbb{R}) = \varprojlim_k H^k(]a, b[+\mathrm{i}\mathbb{R})$ et $C^\infty(]a, b[) = \varprojlim_k C^k(]a, b[)$ leurs limites projectives, qui sont aussi des espaces de Fréchet.

Montrons que le complexe

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(R_\infty) \longrightarrow H^\infty(]a,b[+\mathrm{i}\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(]a,b[) \longrightarrow 0$$

est exact.

En effet, nous avons le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(R_{k+1}) \arrow[r] \arrow[d] & H^{k+1}(]a,b[+\mathrm{i}\mathbb{R}) \arrow[r] \arrow[d] & C^{k+1}(]a,b[) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(R_k) \arrow[r] \arrow[d] & H^k(]a,b[+\mathrm{i}\mathbb{R}) \arrow[r] \arrow[d] & C^k(]a,b[) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

où l'application $u'_k\colon\ H^{k+1}(]a,b[+\mathrm{i}\mathbb{R}) \to H^k(]a,b[+\mathrm{i}\mathbb{R})$ est l'injection canonique, $v_{k+1,k}\colon\ C^{k+1}(K) \to C^k(K)$ est l'application identité, l'application $u''_k\colon\ \mathrm{Ker}(R_{k+1}) \to \mathrm{Ker}(R_k)$ est l'injection canonique et l'application $i_j\colon\ \mathrm{Ker}(R_j) \to H^j(K+\mathrm{i}\mathbb{R})$ est l'injection canonique pour $j = k, k+1$.

Comme les applications u''_k ont des images denses, il résulte du Lemme de Mittag-Leffler ci-dessus que la suite

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\,(R_\infty) \longrightarrow H^\infty(]a,b[+\mathrm{i}\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(]a,b[) \longrightarrow 0$$

est exacte. En d'autres mots, toute fonction $f \in C^\infty(K)$ se prolonge en une fonction $\tilde{f}$ de classe C^∞ sur $K + \mathrm{i}\mathbb{R}$ tel que

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^2, \forall x \in K\colon\ D^\alpha f(x) = 0.$$

Donc

$$\tilde{f}_{|]a,b[} = f \text{ et } \forall x \in K\colon\ D^\alpha \tilde{f}(x) = 0.$$

Ce qui montre le résultat. $\square$

Comme conséquence du Théorème 2.1, nous obtenons le résultat suivant:

Corollaire 2.6.

$$\varprojlim_k \big(H^k(]a,b[+\mathrm{i}\mathbb{R})|\operatorname{Ker}(R_k)\big) = (\varprojlim_k H^k(]a,b[+\mathrm{i}\mathbb{R}))\big|(\varprojlim_k \operatorname{Ker}(R_k)).$$

P r e u v e. Soient $(\operatorname{Ker}(R_k))_k$ et $\big(H^k(]a,b[+\mathrm{i}\mathbb{R})\big)_k$ les systèmes projectifs du Théorème 2.5 et soient $\operatorname{Ker}(R_\infty) = \varprojlim_k \operatorname{Ker}(R_k)$, $H^\infty(]a,b[+\mathrm{i}\mathbb{R}) = \varprojlim_k H^k(]a,b[+\mathrm{i}\mathbb{R})$ leurs limites projectives. D'abord il est clair que chaque quotient d'espaces de Fréchet $H^k(]a,b[+\mathrm{i}\mathbb{R})|\operatorname{Ker}(R_k)$ définit une suite exacte qui est la suivante:

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker}(R_k) \longrightarrow H^k(]a,b[+\mathrm{i}\mathbb{R}) \longrightarrow H^k(]a,b[+\mathrm{i}\mathbb{R})\big|\operatorname{Ker}(R_k) \longrightarrow 0$$

En appliquant le foncteur limite projective, il découle du Théorème 3.2 de [1] que la suite suivante:

$$0 \longrightarrow \varprojlim_k \operatorname{Ker}(R_k) \longrightarrow \varprojlim_k H^k(]a,b[+\mathrm{i}\mathbb{R}) \longrightarrow \varprojlim_k \big(H^k(]a,b[+\mathrm{i}\mathbb{R})\big|\operatorname{Ker}(R_k)\big) \longrightarrow 0$$

est exacte dans la catégorie **qFré**. Ceci montre que

$$\begin{aligned}\varprojlim_k (H^k(]a,b[+\mathrm{i}\mathbb{R})|\operatorname{Ker}(R_k)) &= \operatorname{Coker}(\varprojlim_k \operatorname{Ker}(R_k) \longrightarrow \varprojlim_k H^k(]a,b[+\mathrm{i}\mathbb{R}))\\ &= (\varprojlim_k H^k(]a,b[+\mathrm{i}\mathbb{R}))\big|(\varprojlim_k \operatorname{Ker}(R_k)).\end{aligned}$$

Par conséquent, le Corollaire est établi. □

Bibliographie

[1] *B. Aqzzouz, R. Nouira*: L'exactitude du foncteur limite projective sur la catégorie des quotients d'espaces de Fréchet. To appear in Czech. Math. J. in 2008.
[2] *V. P. Palamodov*: The projective limit functor in the category of topological linear spaces. Mat. Sb. (N.S.) *75* (1968), 567–603. (Russian.) zbl
[3] *V. P. Palamodov*: Homological methods in the theory of locally convex spaces. Usp. Mat. Nauk *26* (1971), 3–65. (Russian.) zbl
[4] *L. Waelbroeck*: Quotient Fréchet spaces. Rev. Roum. Math. Pures Appl. *34* (1989), 171–179. zbl
[5] *J. Wengenroth*: Derived Functors in Functional Analysis. Lect. Notes Math. 1810, Springer, Berlin, 2003. zbl

L'adresse de l'auteur: *Belmesnaoui Aqzzouz*, Université Mohammed V-Souissi, Faculté des Sciences Economiques, juridiques et sociales, Département d'Economie, B.P. 5295, Sala Eljadida, Morocco, e-mail: `baqzzouz@hotmail.com`.