

Triple correlation of the Riemann zeros

par J. BRIAN CONREY et NINA C. SNAITH

RÉSUMÉ. La conjecture de Conrey, Farmer et Zirnbauer [3] concernant les moyennes de quotients de la fonction ζ de Riemann nous permet de déterminer tous les termes d'ordre inférieur de la corrélation triple des zéros de la fonction ζ de Riemann. Bogomolny et Keating [1], en s'inspirant de méthodes semi-classiques, avaient suggéré en 1996 une approche permettant de s'attaquer à ce problème mais n'avaient pas donné explicitement le résultat qui est l'objet de cet article. Notre méthode permet de déterminer rigoureusement tous les termes d'ordre inférieur jusqu'au terme constant en admettant les conjectures de quotients de Conrey, Farmer et Zirnbauer. Bogomolny et Keating [1] se sont de nouveau penchés sur leurs résultats en même temps que ce travail et ont donné l'expression entière explicite. Le résultat décrit dans cet article coïncide exactement avec leur formule et est en accord avec nos calculs numériques qui sont aussi présentés ici.

Nous donnons également une autre preuve de la corrélation triple des valeurs propres des matrices aléatoires $U(N)$ qui suit une méthode quasiment identique à celle employée pour les zéros de la fonction ζ de Riemann mais qui repose sur le théorème concernant les moyennes des quotients de polynômes caractéristiques [4, 5].

ABSTRACT. We use the conjecture of Conrey, Farmer and Zirnbauer for averages of ratios of the Riemann zeta function [3] to calculate all the lower order terms of the triple correlation function of the Riemann zeros. A previous approach was suggested by Bogomolny and Keating [2] taking inspiration from semi-classical methods. At that point they did not write out the answer explicitly, so we do that here, illustrating that by our method all the lower order terms down to the constant can be calculated rigorously if one assumes the ratios conjecture of Conrey, Farmer and Zirnbauer. Bogomolny and Keating [1] returned to their previous results simultaneously with this current work, and have written out the full expression. The result presented in this paper agrees precisely

Manuscrit reçu le 3 novembre 2006.

Research of the first author supported by the American Institute of Mathematics. The second author was supported by an EPSRC Advanced Research Fellowship. Both authors have been supported by a Focused Research Group grant (0244660) from the National Science Foundation.

with their formula, as well as with our numerical computations, which we include here.

We also include an alternate proof of the triple correlation of eigenvalues from random $U(N)$ matrices which follows a nearly identical method to that for the Riemann zeros, but is based on the theorem for averages of ratios of characteristic polynomials [4, 5].

References

- [1] E.B. BOGOMOLNY, J.P. KEATING, private communication.
- [2] E.B. BOGOMOLNY, J.P. KEATING, *Gutzwiller's trace formula and spectral statistics: beyond the diagonal approximation*. Phys. Rev. Lett. **77**(8) (1996), 1472–1475.
- [3] J.B. CONREY, D.W. FARMER, M.R. ZIRNBAUER, *Autocorrelation of ratios of characteristic polynomials and of L -functions*. arXiv:0711.0718.
- [4] J.B. CONREY, D.W. FARMER, M.R. ZIRNBAUER, *Howe pairs, supersymmetry, and ratios of random characteristic polynomials for the unitary groups $U(N)$* . Preprint. arXiv:math-ph/0511024.
- [5] J.B. CONREY, P.J. FORRESTER, N.C. SNAITH, *Averages of ratios of characteristic polynomials for the compact classical groups*. Int. Math. Res. Notices **7** (2005), 397–431.

J. Brian CONREY
 American Institute of Mathematics
 360 Portage Ave
 Palo Alto, CA 94306

School of Mathematics
 University of Bristol
 Bristol, BS8 1TW, United Kingdom
E-mail : conrey@aimath.org

Nina C. SNAITH
 School of Mathematics
 University of Bristol
 Bristol, BS8 1TW, United Kingdom
E-mail : N.C.Snaith@bris.ac.uk