Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **19** (2007), 373–391

Produits et quotients de combinaisons linéaires de logarithmes de nombres algébriques : conjectures et résultats partiels

par Guy DIAZ

Résumé. Ce texte montre qu'en combinant le théorème fort des six exponentielles de D.Roy et la conjugaison complexe, on peut obtenir un certain nombre de cas particuliers de la conjecture forte des quatre exponentielles.

Abstract. In this paper, it is shown that the strong six exponentials theorem due to D.Roy and complex conjugation give partial results for the strong four exponentials conjecture.

0. Introduction

Que sait-on de la nature arithmétique des produits, quotients, inverses de logarithmes de nombres algébriques ? Les résultats sont peu nombreux. On sait que tout logarithme de nombre algébrique est transcendant ou nul (théorème de Lindemann, 1882), et que le quotient de deux logarithmes de nombres algébriques est rationnel ou transcendant (théorème de Gelfond-Schneider, 1934). Et c'est à peu près tout.

Par exemple, ℓ étant un logarithme de nombre algébrique, non nul, on ne sait pas si $\ell^2, 1/\ell$ peuvent être des logarithmes de nombres algébriques à leur tour. Une réponse négative pour ℓ^2 donnerait la transcendance de $\exp(\pi^2)$ en prenant $\ell := i\pi$, résultat conjecturé depuis longtemps mais toujours non démontré.

En l'absence de résultats, on peut se demander quelles sont les conjectures "naturelles", qu'est-ce qu'on peut espérer. Ce sera l'objet du paragraphe 1 ; en partant de la conjecture forte des quatre exponentielles, on verra que l'on dispose de conjectures pour les produits, quotients, modules de logarithmes de nombres algébriques. Ces conjectures semblent pour l'instant hors de portée dans toute leur généralité, mais on sait en démontrer certains cas particuliers ; ce sera l'objet du paragraphe 2. Les outils utilisés sont le théorème fort des six exponentielles de D.Roy et la conjugaison complexe.

Manuscrit reçu le 31 octobre 2005.

Même si les résultats ne sont que partiels, il est assez encourageant de constater que l'on n'est pas dans le noir complet.

Ce texte prolonge [Di 2004]. Il était rédigé pour l'essentiel quand j'ai pris connaissance d'une première version d'un texte de M.Waldschmidt consacré en gros aux mêmes problématiques. A la suite d'échanges cette version est devenue [Wa 2004], article qui contient une partie de ce qui suit et aborde d'autres questions. Puisqu'elle était commencée j'ai terminé la rédaction de ma version, en essayant de l'enrichir d'exemples nombreux. Depuis, M.Waldschmidt a obtenu une généralisation du théorème fort des six exponentielles de D.Roy (voir [Wa 2005]), qu'il serait intéressant d'exploiter.

Pour simplifier, j'utiliserai une seule référence quant aux résultats classiques, le livre [Wa 2000] de M.Waldschmidt.

1. Des conjectures

1.1. Introduction.

On notera $\overline{\mathbb{Q}}$ le corps des nombres algébriques (ie la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$) et $\mathcal{L}$ le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel des logarithmes de nombres algébriques :

$$\mathcal{L} := \{\ell \in \mathbb{C} \; ; \; \exp(\ell) \in \overline{\mathbb{Q}}\}.$$

Ce n'est pas vraiment sur $\mathcal{L}$ que l'on va travailler, mais plutôt sur $\widetilde{\mathcal{L}}$ le $\overline{\mathbb{Q}}$-espace vectoriel engendré dans $\mathbb{C}$ par 1 et $\mathcal{L}$:

$$\widetilde{\mathcal{L}} := \{\alpha_0+\alpha_1\ell_1+\ldots+\alpha_n\ell_n \; ; \; n \in \mathbb{N}, (\alpha_0,\ldots,\alpha_n) \in \overline{\mathbb{Q}}^{n+1}, (\ell_1,\ldots,\ell_n) \in \mathcal{L}^n\}.$$

Notons que $\mathcal{L}$ et $\widetilde{\mathcal{L}}$ sont stables par conjugaison complexe.

La conjecture centrale sera la conjecture forte des quatre exponentielles, notée (CF4E) dans la suite, qui s'énonce ainsi (conjecture 11.17 de [Wa 2000]).

(CF4E). *Soient x_1 et x_2 deux nombres complexes $\overline{\mathbb{Q}}$-linéairement indépendants et y_1, y_2 deux nombres complexes eux aussi $\overline{\mathbb{Q}}$-linéairement indépendants. Alors un au moins des quatres nombres $x_1y_1, x_1y_2, x_2y_1, x_2y_2$ n'est pas dans $\widetilde{\mathcal{L}}$.*

Il n'y a plus vraiment d'exponentielles dans cet énoncé et le nom de cette conjecture s'explique seulement par une conjecture antérieure, la conjecture des quatre exponentielles, notée (C4E) dans la suite (voir [Wa 2000], page 14).

(C4E). *Soient x_1, x_2 (resp. y_1, y_2) deux nombres complexes $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants. Alors un au moins des quatres nombres $x_1y_1, x_1y_2, x_2y_1, x_2y_2$ n'est pas dans $\mathcal{L}$ (ie une des quatre exponentielles $\exp(x_iy_j)$, $1 \leq i, j \leq 2$, est transcendante).*

Ces deux conjectures peuvent se déduire de la conjecture de Schanuel ; et (CF4E) implique (C4E). La conjecture (C4E) date du début des années 1940 et a certainement été étudiée par tous les spécialistes de la discipline depuis. En vain. Les deux conjectures, (C4E) et a fortiori (CF4E), semblent largement hors de portée ! Il est donc assez naturel d'essayer d'en obtenir des cas particuliers : cela fournit quelques résultats nouveaux et cela rassure un peu.

1.2. Conjectures sur le produit, le quotient, le module.

On peut énoncer (CF4E) sous la forme suivante.

Théorème 1. *La conjecture (CF4E) est équivalente à la conjecture (PQ) suivante :*

(PQ). *Soient* $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in \widetilde{\mathcal{L}} \backslash \{0\}$ *avec* $\lambda_1/\lambda_0 \notin \overline{\mathbb{Q}}$ *et* $\lambda_2/\lambda_0 \notin \overline{\mathbb{Q}}$. *Alors*

$$(\lambda_1\lambda_2)/\lambda_0 \notin \widetilde{\mathcal{L}}.$$

Preuve du théorème 1.

1) **(CF4E) implique** (**PQ**) : on applique (CF4E) aux familles (λ_0, λ_2) et $(1, \lambda_1/\lambda_0)$, qui sont $\overline{\mathbb{Q}}$-libres par hypothèse. Cela donne le résultat.

2) (**PQ**) **implique (CF4E)** : on part de (x_1, x_2) et (y_1, y_2) deux familles $\overline{\mathbb{Q}}$-libres de nombres complexes ; on suppose que x_1y_1, x_1y_2, x_2y_2 sont dans $\widetilde{\mathcal{L}}$ et on cherche à obtenir $x_2y_1 \notin \widetilde{\mathcal{L}}$. On applique (PQ) avec $\lambda_0 := x_1y_2$, $\lambda_1 := x_1y_1$, $\lambda_2 := x_2y_2$; comme $(\lambda_1\lambda_2)/\lambda_0 = x_2y_1 \notin \widetilde{\mathcal{L}}$ on a la propriété cherchée. □

Remarque. Cette preuve s'adapte immédiatement pour montrer que (C4E) est équivalente à l'assertion suivante :

"soient $\ell_0, \ell_1, \ell_2 \in \mathcal{L}$ *avec* $\ell_1/\ell_0 \notin \mathbb{Q}$, $\ell_2/\ell_0 \notin \mathbb{Q}$. *Alors :* $(\ell_1\ell_2)/\ell_0 \notin \mathcal{L}$.*"*

À partir de la conjecture (PQ) en prenant $\lambda_0 := 1$ ou $\lambda_2 := 1$ ou $\lambda_1 = \lambda_2 := 1$ on obtient les conjectures suivantes.

Conjectures (**P**).

. **(P1).** *Pour* $\lambda_1, \lambda_2 \in \widetilde{\mathcal{L}} \backslash \overline{\mathbb{Q}}$ *on a* $\lambda_1\lambda_2 \notin \widetilde{\mathcal{L}}$.

. **(P2).** *Pour* $\ell_1, \ell_2 \in \mathcal{L} \backslash \{0\}$ *on a* $\ell_1\ell_2 \notin \widetilde{\mathcal{L}}$.

. **(P3).** *Pour* $\lambda \in \widetilde{\mathcal{L}} \backslash \overline{\mathbb{Q}}$ *on a* $\lambda^2 \notin \widetilde{\mathcal{L}}$ *et* $|\lambda|^2 \notin \widetilde{\mathcal{L}}$.

Conjectures (**Q**).

. **(Q1).** *Soient* $\lambda_0, \lambda_1 \in \widetilde{\mathcal{L}}$ *avec* $\lambda_0 \notin \overline{\mathbb{Q}}$ *et* $\lambda_1/\lambda_0 \notin \overline{\mathbb{Q}}$. *Alors* $\lambda_1/\lambda_0 \notin \widetilde{\mathcal{L}}$.

. **(Q2).** *Soient* $\ell_0, \ell_1 \in \mathcal{L} \backslash \{0\}$. *Si* $\ell_1/\ell_0 \notin \mathbb{Q}$ *alors* $\ell_1/\ell_0 \notin \widetilde{\mathcal{L}}$.

. **(Q3).** *Pour* $\lambda \in \widetilde{\mathcal{L}} \backslash \overline{\mathbb{Q}}$ *on a* $1/\lambda \notin \widetilde{\mathcal{L}}$.

Les conjectures (PQ), (P1), (Q1) et (Q3) apparaissent aussi dans le paragraphe 1 de [Wa 2004].

Les assertions (P1) et (Q1) sont au demeurant équivalentes. (P2) et (P3) (resp. (Q2) et (Q3)) sont des cas particuliers de (P1) (resp. (Q1)). La conjecture (P2), pour des éléments de $\mathcal{L}$, donne en particulier :

"pour $\ell_1, \ell_2 \in \mathcal{L}\backslash\{0\}$ on a $\ell_1\ell_2 \notin \widetilde{\mathcal{L}}$, et donc en particulier :

$$\ell_1\ell_2 \notin \overline{\mathbb{Q}} \textit{ et } \ell_1\ell_2 \notin \mathcal{L}\text{''}.$$

Ce seul résultat serait déjà une belle avancée ; cela contient notamment la transcendance de $\exp(\pi^2)$. En prenant $\ell_2 = \overline{\ell}_1$ on obtiendrait la transcendance de $|\ell_1|$; c'est la conjecture $\mathcal{C}(|u|)$ de [Di 2004] :

"soit $u \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$; si $|u| \in \overline{\mathbb{Q}}$ alors e^u est transcendant".

Concernant le module, (PQ) implique la conjecture (M) suivante, plus forte que $\mathcal{C}(|u|)$.

Conjecture (M).
(M). *Soit $\lambda \in \widetilde{\mathcal{L}}$. Si $(\lambda, \overline{\lambda})$ est $\overline{\mathbb{Q}}$-libre alors $|\lambda| \notin \widetilde{\mathcal{L}}$.*

Preuve. Montrons que (PQ) implique (M). On suppose $(\lambda, \overline{\lambda})$ $\overline{\mathbb{Q}}$-libre ; en conséquence $(\lambda, |\lambda|)$ est aussi $\overline{\mathbb{Q}}$-libre (si $|\lambda| = \alpha\lambda$ avec $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ on en déduit $\overline{\lambda} = \alpha^2\lambda$; comme $\alpha^2 \in \overline{\mathbb{Q}}$ c'est contraire à l'hypothèse). On suppose $|\lambda| \in \widetilde{\mathcal{L}}$ et on applique (PQ) avec $\lambda_0 := \lambda,\ \lambda_1 = \lambda_2 := |\lambda|$. Cela donne $(\lambda_1\lambda_2)/\lambda_0 \notin \widetilde{\mathcal{L}}$; mais $(\lambda_1\lambda_2)/\lambda_0 = \overline{\lambda} \in \widetilde{\mathcal{L}}$ et il y donc contradiction. □

Notons à propos de (M) que pour $\lambda \in \widetilde{\mathcal{L}}$ avec $(\lambda, \overline{\lambda})$ $\overline{\mathbb{Q}}$-liée on a $|\lambda| \in \widetilde{\mathcal{L}}$ (on suppose $\overline{\lambda} = \alpha\lambda, \alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$; on a donc $|\lambda|^2 = \alpha\lambda^2$, donc $|\lambda| = \beta\lambda$ où $\beta^2 = \alpha$; comme $\beta \in \overline{\mathbb{Q}}, \beta\lambda$ est dans $\widetilde{\mathcal{L}}$).

Les conjectures (PQ), (P), (Q),(M) indiquent donc comment le produit, le quotient, le module agissent sur les éléments de $\widetilde{\mathcal{L}}$. Et on verra au paragraphe 2 des exemples où cela se passe bien comme prévu. Notons au passage qu'il n'y a pas de conjecture générale pour λ^n ($\lambda \in \widetilde{\mathcal{L}}\backslash\overline{\mathbb{Q}}$; $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$) dans cette liste.

Concernant le quotient voici deux autres conjectures, de nature assez différente de (Q), respectivement conséquences de (C4E) et (CF4E).

Conjectures (Qr).

(Qr1). *Soient $\lambda_0, \lambda_1 \in \widetilde{\mathcal{L}}$ avec $(\lambda_0, \overline{\lambda}_0)$ $\overline{\mathbb{Q}}$-libre. Si $\lambda_1/\lambda_0 \in \mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$ alors $\lambda_1/\lambda_0 \in \overline{\mathbb{Q}}$.*

(Qr2). *Soient $\ell_0, \ell_1 \in \mathcal{L}\backslash(\mathbb{R} \cup i\mathbb{R})$. Si $\ell_1/\ell_0 \in \mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$ alors $\ell_1/\ell_0 \in \mathbb{Q}$.*

Le théorème de Gelfond-Schneider montre que (Qr2) est conséquence de (Qr1). On peut voir géométriquement (Qr2) ainsi :

"pour $\ell \in \mathcal{L}\backslash(\mathbb{R}\cup i\mathbb{R})$ on a :

. $\mathbb{R}\ell \cap \mathcal{L} = \mathbb{Q}\ell$ (sur la droite $\mathbb{R}\ell$ il y a essentiellement un seul élément de $\mathcal{L}$) ;

. $\mathbb{R}i\ell \cap \mathcal{L} = \{0\}$ (sur la droite $\mathbb{R}i\ell$ il n'y a pas d'autre élément de $\mathcal{L}$ que 0)".

Pour $\ell \in \mathcal{L}\backslash(\mathbb{R}\cup i\mathbb{R})$ et $t \in \mathbb{R}$, le théorème de Gelfond-Schneider dit que si $t\ell \in \mathcal{L}$ alors t est rationnel ou transcendant. Mais (Qr2) dit plus : t est obligatoirement rationnel !

Preuve. Montrons que (CF4E) implique (Qr1), que (C4E) implique (Qr2), que (Qr1) implique (Qr2).

. 1) **(CF4E) implique (Qr1)**. On part de $\lambda_1, \lambda_0 \in \widetilde{\mathcal{L}}$ avec $(\lambda_0, \overline{\lambda}_0)$ $\overline{\mathbb{Q}}$-libre, $\lambda_1/\lambda_0 \in \mathbb{R}\cup i\mathbb{R}$ et $\lambda_1/\lambda_0 \notin \overline{\mathbb{Q}}$. On cherche une contradiction. On applique (CF4E) aux familles $(1, \lambda_1/\lambda_0)$ et $(\lambda_0, \overline{\lambda}_0)$, qui sont $\overline{\mathbb{Q}}$-libres toutes les deux. Cela donne $\{\lambda_0, \overline{\lambda}_0, \lambda_1, (\lambda_1\overline{\lambda}_0)/\lambda_0\} \not\subset \widetilde{\mathcal{L}}$ et donc $(\lambda_1\overline{\lambda}_0)/\lambda_0 \notin \widetilde{\mathcal{L}}$.

Or par hypothèse $\overline{(\lambda_1/\lambda_0)} = \pm(\lambda_1/\lambda_0)$ et donc $(\lambda_1\overline{\lambda}_0)/\lambda_0 = \pm\overline{\lambda}_1$: c'est donc un élément de $\widetilde{\mathcal{L}}$ et cela fournit la contradiction cherchée.

. 2) **(C4E) implique (Qr2)**. On part de $\ell_1, \ell_0 \in \mathcal{L}\backslash(\mathbb{R}\cup i\mathbb{R})$ avec $\ell_1/\ell_0 \in \mathbb{R}\cup i\mathbb{R}$ et $\ell_1/\ell_0 \notin \mathbb{Q}$. On cherche une contradiction. On applique (C4E) aux familles $(1, \ell_1/\ell_0)$ et $(\ell_0, \overline{\ell}_0)$, qui sont toutes les deux $\mathbb{Q}$-libres. Cela donne :

$$\{\ell_0, \overline{\ell}_0, \ell_1, (\ell_1\overline{\ell}_0)/\ell_0\} \not\subset \mathcal{L} \text{ et donc } (\ell_1\overline{\ell}_0)\ell_0 \notin \mathcal{L}.$$

Or par hypothèse $\overline{(\ell_1/\ell_0)} = \pm(\ell_1/\ell_0)$ et donc $(\ell_1\overline{\ell}_0)/\ell_0 = \pm\overline{\ell}_1$: c'est donc un élément de $\mathcal{L}$ et cela fournit la contradiction cherchée.

. 3) **(Qr1) implique (Qr2)**. On part de $\ell_1, \ell_0 \in \mathcal{L}\backslash(\mathbb{R}\cup i\mathbb{R})$ avec $\ell_1/\ell_0 \in \mathbb{R}\cup i\mathbb{R}$, et $\ell_1/\ell_0 \notin \mathbb{Q}$. On cherche une contradiction. La famille (ℓ_1, ℓ_0) est $\mathbb{Q}$-libre donc $\overline{\mathbb{Q}}$-libre par le théorème de Gelfond-Schneider. La famille $(\ell_0, \overline{\ell}_0)$ est $\mathbb{Q}$-libre donc $\overline{\mathbb{Q}}$-libre toujours par le théorème de Gelfond-Schneider ; (Qr1) dit alors que $\ell_1/\ell_0 \in \overline{\mathbb{Q}}$ et c'est la contradiction cherchée. $\square$

1.3 Un cas particulier de (CF4E).

On est loin de pouvoir démontrer (CF4E) et il est tentant d'envisager des cas particuliers. En voici un, intéressant par ses nombreuses applications, mais qui reste une conjecture pour l'instant ; avec les notations de (CF4E) c'est le cas particulier $x_2/x_1 = y_2/y_1$ ("familles proportionnelles").

Théorème 2. *Les assertions $(\mathcal{C}1), (\mathcal{C}2), (\mathcal{C}3), (\mathcal{C}4)$ sont équivalentes et sont conséquences de (CF4E) :*

. $(\mathcal{C}1)$ Soient $u \in \mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{Q}}$ et $v \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$; alors : $\{v, vu, vu^2\} \not\subset \widetilde{\mathcal{L}}$.

. *($\mathcal{C}2$) Soient* $\lambda \in \widetilde{\mathcal{L}}\backslash\{0\}$ *et* $t \in \mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{Q}}$ *; alors :* $\{t\lambda, \lambda/t\} \not\subset \widetilde{\mathcal{L}}$.
. *($\mathcal{C}3$) Soient* $\lambda \in \widetilde{\mathcal{L}}\backslash\{0\}$ *et* $s \in \mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{Q}}$ *; alors :* $\{s\lambda, s^2\lambda\} \not\subset \widetilde{\mathcal{L}}$.
. *($\mathcal{C}4$) Soient* $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in \widetilde{\mathcal{L}}\backslash\{0\}$ *; si* $\lambda_1\lambda_2 = \lambda^2$ *alors* $\lambda_1/\lambda = \lambda/\lambda_2 \in \overline{\mathbb{Q}}$.

Preuve du théorème 2.
($\mathcal{C}1$) c'est (CF4E) appliquée aux familles $(1, u)$ et (v, vu).

. ($\mathcal{C}$**1**) **implique** ($\mathcal{C}$**2**) : on prend $v := \lambda/t$ et $u := t$ et on applique ($\mathcal{C}1$).
. ($\mathcal{C}$**2**) **implique** ($\mathcal{C}$**1**) : les hypothèses sont celles de ($\mathcal{C}1$) ; on distingue deux cas :
 * si $vu \notin \widetilde{\mathcal{L}}$, c'est fini ;
 * si $vu \in \widetilde{\mathcal{L}}$ on introduit $\lambda := vu, t := u$ et on applique ($\mathcal{C}2$).

. ($\mathcal{C}$**1**) **implique** ($\mathcal{C}$**3**) : on prend $v := \lambda, u := s$ et on applique ($\mathcal{C}1$).
. ($\mathcal{C}$**3**) **implique** ($\mathcal{C}$**1**) : les hypothèses sont celles de ($\mathcal{C}1$) et on distingue deux cas :
 * si $v \notin \widetilde{\mathcal{L}}$, c'est fini ;
 * si $v \in \widetilde{\mathcal{L}}$ on introduit $\lambda := v, s := u$ et on applique ($\mathcal{C}3$).

. ($\mathcal{C}$**2**) **implique** ($\mathcal{C}$**4**) : les hypothèses sont celles de ($\mathcal{C}4$) ; on introduit $t := \lambda/\lambda_2 = \lambda_1/\lambda$ et on a donc $\lambda t = \lambda_1, \lambda/t = \lambda_2$: ($\mathcal{C}2$) dit alors que $t \in \overline{\mathbb{Q}}$ et c'est ce que l'on veut.
. ($\mathcal{C}$**4**) **implique** ($\mathcal{C}$**2**) : les hypothèses sont celles de ($\mathcal{C}2$) et on suppose $\{t\lambda, \lambda/t\} \subset \widetilde{\mathcal{L}}$. On introduit alors $\lambda_1 := \lambda t, \lambda_2 := \lambda/t$, ce qui donne deux éléments de $\widetilde{\mathcal{L}}\backslash\{0\}$ vérifiant $\lambda_1\lambda_2 = \lambda^2$. Par ($\mathcal{C}4$) on a donc $\lambda_1/\lambda = \lambda/\lambda_2 \in \overline{\mathbb{Q}}$ c'est à dire $t \in \overline{\mathbb{Q}}$, et c'est ce que l'on voulait. □

Les quatre conjectures du théorème 2 donnent accès aux nombres λ^2, $1/\lambda$, $|\lambda|$ où $\lambda \in \widetilde{\mathcal{L}}\backslash\overline{\mathbb{Q}}$. Plus précisément les assertions suivantes sont des conjectures conséquences de chacune des conjectures du théorème 2 :

. *a) Si* $\lambda \in \widetilde{\mathcal{L}}\backslash\overline{\mathbb{Q}}$ *alors* $\lambda^2 \notin \widetilde{\mathcal{L}}$ *(prendre* $u := \lambda, v := 1$ *dans* $\mathcal{C}1$*) ;*
. *b) Si* $\lambda \in \widetilde{\mathcal{L}}\backslash\overline{\mathbb{Q}}$ *alors* $1/\lambda \notin \widetilde{\mathcal{L}}$ *(prendre* $u := \lambda, v := 1/\lambda$ *dans* $\mathcal{C}1$*) ;*
. *c) Soit* $\lambda \in \widetilde{\mathcal{L}}$ *avec* $(\lambda, \overline{\lambda})$ $\overline{\mathbb{Q}}$*-libre ; alors* $|\lambda| \notin \widetilde{\mathcal{L}}$ *(prendre* $u := |\lambda|/\lambda, v := \lambda$ *dans* $\mathcal{C}1$*).*

On verra dans le second paragraphe des exemples illustrant (b) ; mais je n'ai pas d'exemple illustrant (a) ou (c) !

Ceci termine le paragraphe des conjectures. Chacune de ces conjectures peut être vue comme un problème à résoudre et là il faut bien reconnaître que l'on ne sait rien faire de spécial : on sait attaquer avec les outils classiques de la transcendance mais on ne sait pas plus conclure dans les cas particuliers que dans le cas général. Dans le paragraphe suivant on va donc se contenter de familles d'exemples illustrant certaines des conjectures précédentes, exemples obtenus à l'aide du théorème fort des six exponentielles de D.Roy.

2. Résultats relatifs aux produits et quotients d'éléments de $\widetilde{\mathcal{L}}$

Le principal outil de ce paragraphe est un résultat de D.Roy obtenu en 1992, le théorème fort des six exponentielles (voir [Roy 1992], corollary 2 ; [Wa 2000], corollary 11.16 ; [Wa 2004], theorem 2.1). C'est le résultat connu le plus proche de (CF4E) et tous les résultats de ce paragraphe en seront des corollaires directs ; l'objectif en multipliant ainsi les applications est de faire dire à ce théorème le maximum de choses.

2.1 Résultats relatifs aux conjectures $(\mathbf{PQ}), (\mathbf{P}), (\mathbf{Q})$.

On peut formuler le théorème fort des six exponentielles de différentes façons.

Théorème 3 (théorème fort des six exponentielles). *Les trois assertions suivantes sont équivalentes et sont vraies.*
. 1) Version 1. *Soient x_1, x_2 (resp. y_1, y_2, y_3) des nombres complexes $\overline{\mathbb{Q}}$-linéairement indépendants. Alors on a :*

$$\{x_1y_1, x_1y_2, x_1y_3, x_2y_1, x_2y_2, x_2y_3\} \not\subset \widetilde{\mathcal{L}}.$$

. 2) Version 2. *Soit $M = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \end{pmatrix}$ une matrice 2×3 à coefficients dans $\widetilde{\mathcal{L}}$, dont les 2 lignes sont $\overline{\mathbb{Q}}$-linéairement indépendantes et dont les 3 colonnes sont $\overline{\mathbb{Q}}$-linéairement indépendantes. Alors M est de rang 2.*

. 3) Version 3. *Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \widetilde{\mathcal{L}}^4$ tel que les familles (λ_0, λ_1) et $(\lambda_0, \lambda_2, \lambda_3)$ sont $\overline{\mathbb{Q}}$-libres ; alors : $\{\lambda_1\lambda_2/\lambda_0, \lambda_1\lambda_3/\lambda_0\} \not\subset \widetilde{\mathcal{L}}$.*

Que les versions 1 et 2 soient équivalentes et vraies est bien connu puisque c'est le résultat initial de D.Roy. La version 3 (c'est le corollaire 2.6 de [Wa 2004]) est plus originale et, surtout, elle est bien adaptée par sa formulation aux questions du premier paragraphe. Sous les hypothèses faites on a conjecturalement (conjecturePQ) "$\lambda_1\lambda_2/\lambda_0$ et $\lambda_1\lambda_3/\lambda_0$ n'appartiennent pas à $\widetilde{\mathcal{L}}$" ; mais tout ce que l'on sait pour l'instant démontrer c'est "$\lambda_1\lambda_2/\lambda_0$ ou $\lambda_1\lambda_3/\lambda_0$ n'appartient pas à $\widetilde{\mathcal{L}}$". Malgré cela dans certains cas on peut effectivement obtenir la conclusion de la conjecture (PQ), comme le montre le corollaire suivant.

Corollaire 1 $(\mathbf{PQ})$.
. 1) Soient $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in \widetilde{\mathcal{L}}$. On suppose que la famille $(\lambda_0, \lambda_2, \overline{\lambda_2})$ est $\overline{\mathbb{Q}}$-libre et que $\lambda_1/\lambda_0 \in (\mathbb{R} \cup i\mathbb{R})\backslash\overline{\mathbb{Q}}$. Alors :

$$\lambda_1\lambda_2/\lambda_0 \notin \widetilde{\mathcal{L}}.$$

. 2) Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \widetilde{\mathcal{L}}$ *tels que* $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1\lambda_2)$ *est* $\overline{\mathbb{Q}}$*-libre. Alors :*

$$\{\lambda_1\lambda_2, \lambda_1/\lambda_2\} \not\subset \widetilde{\mathcal{L}}.$$

. 3) Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \widetilde{\mathcal{L}}$ *tels que* $\lambda_2 \neq 0$ *et tel que* $(1, \lambda_1, 1/\lambda_2)$ *est* $\overline{\mathbb{Q}}$*-libre. Alors :*

$$\{\lambda_1\lambda_2, 1/\lambda_2\} \not\subset \widetilde{\mathcal{L}}.$$

En particulier pour tout $\lambda \in \widetilde{\mathcal{L}} \backslash \overline{\mathbb{Q}}$ *on a :* $\{\lambda^2, 1/\lambda\} \not\subset \widetilde{\mathcal{L}}$.

. 4) Soient $\lambda_0, \lambda_1 \in \widetilde{\mathcal{L}}$ *tels que* $(\lambda_0^2, \lambda_1, \lambda_0\lambda_1)$ *est* $\overline{\mathbb{Q}}$*-libre. Alors :*

$$\{\lambda_1/\lambda_0, \lambda_1/\lambda_0^2\} \not\subset \widetilde{\mathcal{L}}.$$

En particulier pour tout $\lambda \in \widetilde{\mathcal{L}} \backslash \overline{\mathbb{Q}}$ *on a :* $\{1/\lambda, 1/\lambda^2\} \not\subset \widetilde{\mathcal{L}}$.

Le point 1 donne des exemples de triplets $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ pour lesquels on a le résultat annoncé par le conjecture (PQ) à savoir $\lambda_1\lambda_2/\lambda_0 \notin \widetilde{\mathcal{L}}$. Il améliore un peu le corollaire 2.9 de [Wa 2004]. Les points 2, 3, 4 sont moins directement liés à la conjecture (PQ), mais fournissent des exemples qui mélangent produit et quotient. Le point 3 (resp. le point 4) appliqué à $\lambda := i\pi$ indique que $\exp(\pi^2)$ ou $\exp(1/\pi)$ est transcendant (resp. $\exp(1/\pi)$ ou $\exp(1/\pi^2)$).

Preuve du théorème 3.

On va montrer que les versions 1 et 3 sont équivalentes.

. a) **La version 1 implique la version 3**. On part de $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \widetilde{\mathcal{L}}$ vérifiant les hypothèses de la version 3 ; et on applique la version 1 aux familles $(1, \lambda_1/\lambda_0)$ et $(\lambda_0, \lambda_2, \lambda_3)$ qui sont $\overline{\mathbb{Q}}$-libres par hypothèse. Cela donne le résultat annoncé, à savoir : $\{\lambda_1\lambda_2/\lambda_0, \lambda_1\lambda_3/\lambda_0\} \not\subset \widetilde{\mathcal{L}}$.

. b) **La version 3 implique la version 1**. On part de (x_1, x_2) et (y_1, y_2, y_3) deux familles de nombres complexes $\overline{\mathbb{Q}}$-linéairement indépendants. On suppose que les six produits x_iy_j, $1 \leq i \leq 2$ et $1 \leq j \leq 3$, sont dans $\widetilde{\mathcal{L}}$, et on cherche une contradiction. On applique la version 3 en prenant $\lambda_0 := x_1y_1, \lambda_1 := x_2y_1, \lambda_2 := x_1y_2, \lambda_3 := x_1y_3$; (λ_0, λ_1) est $\overline{\mathbb{Q}}$-libre car (x_1, x_2) l'est et y_1 est non nul ; $(\lambda_0, \lambda_2, \lambda_3)$ est $\overline{\mathbb{Q}}$-libre car (y_1, y_2, y_3) l'est et x_1 est non nul. La conclusion est que $\lambda_1\lambda_2/\lambda_0$ ou $\lambda_1\lambda_3/\lambda_0$ n'est pas dans $\widetilde{\mathcal{L}}$; or $\lambda_1\lambda_2/\lambda_0 = x_2y_2, \lambda_1\lambda_3/\lambda_0 = x_2y_3$ et il y a donc contradiction. □

Note. Ce que l'on vient de dire du théorème fort des six exponentielles s'adapte sans problème au théorème classique des six exponentielles (voir [Wa 2000], theorem 1.12, p. 14) ; il y a équivalence entre les deux assertions suivantes (qui de plus sont vraies) :

Assertion 1. Soient (x_1, x_2) *et* (y_1, y_2, y_3) *des familles de nombres complexes* $\mathbb{Q}$*-linéairement indépendants. Alors* $\{x_1y_1, x_1y_2, x_1y_3, x_2y_1, x_2y_2, x_2y_3\} \not\subset \mathcal{L}$.

Assertion 2 . Soient $\ell_0, \ell_1, \ell_2, \ell_3 \in \mathcal{L}$ tels que (ℓ_0, ℓ_1) est $\mathbb{Q}$-libre et (ℓ_0, ℓ_2, ℓ_3) est aussi $\mathbb{Q}$-libre. Alors $\{\ell_1\ell_2/\ell_0, \ell_1\ell_3/\ell_0) \not\subset \mathcal{L}$.

La preuve est exactement la même que dans le cas précédent (en remplaçant $\overline{\mathbb{Q}}$ par $\mathbb{Q}$, $\widetilde{\mathcal{L}}$ par $\mathcal{L}$).

Preuve du corollaire 1 (PQ).
. 1) On applique la version 3 du théorème fort des six exponentielles à la famille $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \overline{\lambda_2})$. Cela donne : $\{\lambda_1\lambda_2/\lambda_0, \lambda_1\overline{\lambda_2}/\lambda_0\} \not\subset \widetilde{\mathcal{L}}$. Et par ailleurs $\lambda_1\overline{\lambda_2}/\lambda_0 = \pm(\overline{\lambda_1\lambda_2/\lambda_0})$ puisque $\lambda_1/\lambda_0 \in \mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$. Il reste donc $\lambda_1\lambda_2/\lambda_0 \notin \widetilde{\mathcal{L}}$.

. 2) Si $\lambda_1\lambda_2 \notin \widetilde{\mathcal{L}}$ le résultat est acquis. Sinon on applique la version 3 du théorème fort des six exponentielles à la famille $(\lambda_1\lambda_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_1)$; cela donne $\{1, \lambda_1/\lambda_2\} \not\subset \widetilde{\mathcal{L}}$ c'est à dire $\lambda_1/\lambda_2 \notin \widetilde{\mathcal{L}}$.

. 3) Si $1/\lambda_2 \notin \widetilde{\mathcal{L}}$ le résultat est acquis. Sinon on applique la version 3 du théorème fort des six exponentielles à la famille $(1/\lambda_2, 1, \lambda_1, 1)$; cela donne $\{\lambda_1\lambda_2, \lambda_2\} \not\subset \widetilde{\mathcal{L}}$ c'est à dire $\lambda_1\lambda_2 \notin \widetilde{\mathcal{L}}$.

. 4) Je suppose λ_1/λ_0 et λ_1/λ_0^2 dans $\widetilde{\mathcal{L}}$, sinon c'est réglé ! Et on applique la version 3 du théorème fort des six exponentielles à la famille

$$(1, \lambda_0, \lambda_1/\lambda_0, \lambda_1/\lambda_0^2) \ ;$$

cela donne $\{\lambda_1, \lambda_1/\lambda_0\} \not\subset \widetilde{\mathcal{L}}$ et c'est contradictoire. □

En direction de la conjecture (P1) on a le corollaire suivant (qui correspond au cas $\lambda_0 = 1$ du théorème 3 dans la version 3).

Corollaire 2 (**P**).
. 1) Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in (\widetilde{\mathcal{L}} \backslash \overline{\mathbb{Q}})^3$ avec $(1, \lambda_2, \lambda_3)$ $\overline{\mathbb{Q}}$-libre. Alors :

$$\{\lambda_1\lambda_2, \lambda_1\lambda_3\} \not\subset \widetilde{\mathcal{L}}.$$

. 2) Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \widetilde{\mathcal{L}}^2$ avec $\lambda_1 \in (\mathbb{R} \cup i\mathbb{R}) \backslash \overline{\mathbb{Q}}$ et $(1, \lambda_2, \overline{\lambda_2})$ $\overline{\mathbb{Q}}$-libre. Alors :

$$\lambda_1\lambda_2 \notin \widetilde{\mathcal{L}}.$$

Le point 1 est le corollaire 2.4 de [Wa 2004]. Le point 2 donne des exemples de couples (λ_1, λ_2) pour lesquels on a le résultat prévu. Et voici quelques conséquences immédiates de ce corollaire.

Conséquences du corollaire 2 (**P**).
. 1) Pour $\lambda \in \widetilde{\mathcal{L}}$ avec $(1, \lambda, \overline{\lambda})$ $\overline{\mathbb{Q}}$-libre on a : $\{\lambda^2, |\lambda|^2\} \not\subset \widetilde{\mathcal{L}}$.
. 2) Pour $\lambda_1, \lambda_2 \in \widetilde{\mathcal{L}}$ avec $(1, \lambda_2, \lambda_1\lambda_2)$ $\overline{\mathbb{Q}}$-libre on a : $\{\lambda_1\lambda_2, \lambda_1^2\lambda_2\} \not\subset \widetilde{\mathcal{L}}$.
(on suppose $\lambda_1\lambda_2 \in \widetilde{\mathcal{L}}$ et on applique le point 1 du corollaire 2 (P) à

$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1\lambda_2)$).
. 3) En particulier pour $\lambda \in \widetilde{\mathcal{L}}\backslash\overline{\mathbb{Q}}$ *on a :* $\{\lambda^2, \lambda^3\} \not\subset \widetilde{\mathcal{L}}$.

Avec $\lambda = i\pi$ le point 3 permet de dire que $\exp(\pi^2)$ ou $\exp(\pi^3)$ est transcendant (plus généralement, si α et β sont algébriques non nuls alors $\exp(\alpha\pi^2)$ ou $\exp(\beta\pi^3)$ est transcendant).

En direction de la conjecture (Q1) on a le corollaire suivant (qui correspond au cas $\lambda_1 = 1$ du théorème 3 dans la version 3).

Corollaire 3 (Q).
. 1) Soit $(\lambda_0, \lambda_2, \lambda_3) \in \widetilde{\mathcal{L}}^3$ *avec* $\lambda_0 \notin \overline{\mathbb{Q}}$ *et* $(\lambda_0, \lambda_2, \lambda_3)$ $\overline{\mathbb{Q}}$*-libre. Alors :*

$$\{\lambda_2/\lambda_0, \lambda_3/\lambda_0\} \not\subset \widetilde{\mathcal{L}}.$$

. 2) Soit $(\lambda_0, \lambda_2) \in \widetilde{\mathcal{L}}^2$ *avec* $\lambda_0 \in (\mathbb{R} \cup i\mathbb{R})\backslash\overline{\mathbb{Q}}$ *et* $(\lambda_0, \lambda_2, \overline{\lambda}_2)$ $\overline{\mathbb{Q}}$*-libre. Alors :*

$$\lambda_2/\lambda_0 \notin \widetilde{\mathcal{L}}.$$

. 3) Soit $(\lambda_0, \lambda_2) \in \widetilde{\mathcal{L}}^2$ *avec* $\lambda_0 \in (\mathbb{R} \cup i\mathbb{R})\backslash\overline{\mathbb{Q}}$ *et* $\lambda_2 \notin \mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$*. Alors :*

$$\lambda_2/\lambda_0 \notin \mathcal{L}.$$

Les points 1 et 2 sont les corollaires 2.3 et 2.8 de [Wa 2004]. Le point 2 donne des couples pour lesquels on a exactement le résultat prévu par la conjecture (Q1) ; par exemple avec $\lambda_0 = \log 2, \lambda_2 = 1 + i\pi$ on obtient $(1+i\pi)/\log 2 \notin \widetilde{\mathcal{L}}$. Avec des hypothèses plus faibles et portant séparément sur λ_0 et λ_2, le point 3 donne un résultat plus faible ($\mathcal{L}$ remplace $\widetilde{\mathcal{L}}$) mais encore intéressant ; par exemple avec $\lambda_0 := \pi$ et $\lambda_2 := 1 + i$ on obtient $(1+i)/\pi \notin \mathcal{L}$.

Preuve du corollaire 3 (Q).

Les points 1 et 2 sont donnés par le théorème 3 version 3 et le point 1 du corollaire 1 (PQ) avec $\lambda_1 := 1$. Pour le point 3 on part de λ_0, λ_2 vérifiant les hypothèses pécisées dans l'énoncé et on suppose que $\ell := \lambda_2/\lambda_0$ est dans $\mathcal{L}$. On a alors $\lambda_2 = \ell.\lambda_0 \in \widetilde{\mathcal{L}}$. Par ailleurs $\overline{\ell} = \overline{\lambda}_2/\overline{\lambda}_0 = \pm\overline{\lambda}_2/\lambda_0$ et $(\ell, \overline{\ell}) = (\lambda_2/\lambda_0, \pm\overline{\lambda}_2/\lambda_0)$; $(\lambda_2, \overline{\lambda}_2)$ est $\mathbb{Q}$-libre puisque $\lambda_2 \notin \mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$, donc $(\ell, \overline{\ell})$ est $\mathbb{Q}$-libre, donc par le théorème de Baker on sait que $(1, \ell, \overline{\ell})$ est $\overline{\mathbb{Q}}$-libre. On applique le second point du corollaire 2 (P) à partir de (λ_0, ℓ) et cela donne $\lambda_0\ell \notin \widetilde{\mathcal{L}}$. C'est la contradiction cherchée. $\square$

On sait donc décrire des triplets $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \widetilde{\mathcal{L}}^3$ vérifiant $\lambda_1\lambda_2/\lambda_0 \notin \widetilde{\mathcal{L}}$, des couples $(\lambda_1, \lambda_2) \in \widetilde{\mathcal{L}}^2$ pour lesquels $\lambda_1\lambda_2 \notin \widetilde{\mathcal{L}}$, et des couples $(\lambda_1, \lambda_0) \in \widetilde{\mathcal{L}}^2$ tels que $\lambda_1/\lambda_0 \notin \widetilde{\mathcal{L}}$. Cela illustre les conjectures (PQ) , (P1) , (Q1).

Au demeurant les conditions suffisantes énoncées dans les corollaires 1, 2, 3 permettant d'affirmer que $\lambda_1\lambda_2/\lambda_0 \notin \widetilde{\mathcal{L}}$ (resp. $\lambda_1\lambda_2 \notin \widetilde{\mathcal{L}}, \lambda_1/\lambda_0 \notin \widetilde{\mathcal{L}}$) ne prétendent pas épuiser le champ du possible. Il y a sans doute bien d'autres conditions suffisantes à inventer. L'objectif était d'abord de donner des exemples ; c'est fait.

Il serait agréable d'avoir des exemples de $\lambda \in \widetilde{\mathcal{L}}$ tels que $\lambda^2 \notin \widetilde{\mathcal{L}}$ (resp. $1/\lambda \notin \widetilde{\mathcal{L}}, |\lambda| \notin \widetilde{\mathcal{L}}$) et les corollaires 1, 2, 3 n'en donnent pas. On va voir quelques résultats complémentaires qui fournissent des résultats intéressants, du type "comment à partir de $\lambda \in \widetilde{\mathcal{L}}$ fabriquer un nombre complexe qui n'est pas dans $\widetilde{\mathcal{L}}$" ; en particulier on aura des exemples d'éléments $\lambda \in \widetilde{\mathcal{L}}$ pour lesquels $1/\lambda \notin \widetilde{\mathcal{L}}$.

Voici d'abord une variante de la version 3 du théorème fort des six exponentielles (point 1 du corollaire ci-dessous), illustrée ensuite de différentes façons.

Corollaire 4.
. 1) Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \widetilde{\mathcal{L}}$. On suppose $(\lambda_1\lambda_2, \lambda_1\lambda_4, \lambda_2\lambda_3)$ $\overline{\mathbb{Q}}$-libre et (λ_1, λ_2) $\overline{\mathbb{Q}}$-libre. Alors : $\{\lambda_4\lambda_1/\lambda_2, \lambda_3\lambda_2/\lambda_1\} \not\subset \widetilde{\mathcal{L}}$.
. 2) Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \widetilde{\mathcal{L}}^2$ avec $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1\lambda_2)$ $\overline{\mathbb{Q}}$-libre. Alors :

$$\{\lambda_1/\lambda_2, \lambda_2/\lambda_1\} \not\subset \widetilde{\mathcal{L}}.$$

. 3) Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \widetilde{\mathcal{L}}^2$ avec (λ_1, λ_2) $\overline{\mathbb{Q}}$-libre. Alors :

$$\{\lambda_1^2/\lambda_2, \lambda_2^2/\lambda_1\} \not\subset \widetilde{\mathcal{L}}.$$

. 4) Soit $(\lambda_1, \lambda_3) \in \widetilde{\mathcal{L}}^2$ avec $(\lambda_1, \overline{\lambda}_1)$ $\overline{\mathbb{Q}}$-libre et $(\lambda_1\overline{\lambda}_1, \lambda_1\overline{\lambda}_3, \overline{\lambda}_1\lambda_3)$ $\overline{\mathbb{Q}}$-libre. Alors $\lambda_1\overline{\lambda}_3/\overline{\lambda}_1$ n'est pas dans $\widetilde{\mathcal{L}}$.

Preuve du corollaire 4.
. 1) On applique le théorème fort des six exponentielles (version 1) aux familles (λ_1, λ_2) et $(1, \lambda_3/\lambda_1, \lambda_4/\lambda_2)$.
. 2) C'est le point 1 en prenant $\lambda_3 = \lambda_4 := 1$.
. 3) C'est le point 1 où on a pris $\lambda_3 := \lambda_2, \lambda_4 := \lambda_1$. Il faut vérifier que la famille $(\lambda_1\lambda_2, \lambda_1^2, \lambda_2^2)$ est $\overline{\mathbb{Q}}$-libre ; c'est une conséquence immédiate de l'hypothèse faite, à savoir que λ_1/λ_2 est transcendant.
. 4) C'est le point 1 avec $\lambda_2 := \overline{\lambda}_1, \lambda_4 := \overline{\lambda}_3$. Cela donne :

$$\{\overline{\lambda}_3\lambda_1/\overline{\lambda}_1, \lambda_3\overline{\lambda}_1/\lambda_1\} \not\subset \widetilde{\mathcal{L}}.$$

Comme les deux nombres obtenus sont conjugués, aucun des deux n'est dans $\widetilde{\mathcal{L}}$. □

De ce corollaire 4 on peut tirer plusieurs exemples de nombres complexes n'appartenant pas à $\widetilde{\mathcal{L}}$.

Corollaire 5. *Soit $\lambda \in \widetilde{\mathcal{L}} \backslash \overline{\mathbb{Q}}$.*
. 1) Si $(\lambda, \overline{\lambda}, \lambda\overline{\lambda})$ est $\overline{\mathbb{Q}}$-libre alors $\lambda/\overline{\lambda} \notin \widetilde{\mathcal{L}}$.
. 2) Si $(\lambda, \overline{\lambda})$ est $\overline{\mathbb{Q}}$-libre alors $\lambda^2/\overline{\lambda} \notin \widetilde{\mathcal{L}}$.

. 3) Si $(\lambda, \overline{\lambda})$ *est* $\overline{\mathbb{Q}}$*- libre et* $(1, \lambda, \overline{\lambda})$ *est* $\overline{\mathbb{Q}}$*-liée alors* $1/\lambda \notin \widetilde{\mathcal{L}}$*.*
. 4) Pour tout $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \backslash \{0\}$ *on a :* $\{1/\lambda, 1/(\lambda + \alpha)\} \not\subset \widetilde{\mathcal{L}}$*.*

Preuve du corollaire 5.
. 1) On applique le point 2 du corollaire 4 avec $\lambda_1 := \lambda, \lambda_2 := \overline{\lambda}$. Cela donne $\{\lambda/\overline{\lambda}, \overline{\lambda}/\lambda\} \not\subset \widetilde{\mathcal{L}}$; a fortiori on a donc $\lambda/\overline{\lambda} \notin \widetilde{\mathcal{L}}$.
. 2) On applique le point 3 du corollaire 4 avec $\lambda_1 := \lambda, \lambda_2 := \overline{\lambda}$. Cela donne $\{\lambda^2/\overline{\lambda}, \overline{\lambda}^2/\lambda\} \not\subset \widetilde{\mathcal{L}}$; a fortiori on a donc $\lambda^2/\overline{\lambda} \notin \widetilde{\mathcal{L}}$.
. 3) On suppose ici $(\lambda, \overline{\lambda})$ $\overline{\mathbb{Q}}$-libre et $(1, \lambda, \overline{\lambda})$ $\overline{\mathbb{Q}}$-liée. En conséquence il existe α et β algébriques non nuls tels que $\overline{\lambda} = \alpha + \beta\lambda$. On vérifie sans problème que $(\lambda, \overline{\lambda}, \lambda\overline{\lambda})$ est $\overline{\mathbb{Q}}$-libre et donc par le premier point du corollaire 5 on sait que $\overline{\lambda}/\lambda \notin \widetilde{\mathcal{L}}$. Comme par ailleurs $\overline{\lambda}/\lambda = \beta + (\alpha/\lambda)$, on en déduit $\alpha/\lambda \notin \widetilde{\mathcal{L}}$; et α étant non nul il reste $1/\lambda \notin \widetilde{\mathcal{L}}$.
. 4) On applique le point 2 du corollaire 4 avec $\lambda_1 := \lambda, \lambda_2 := \lambda + \alpha$. On vérifie que $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1\lambda_2)$ est $\overline{\mathbb{Q}}$-libre sans problème. On obtient donc $\{\lambda_1/\lambda_2, \lambda_2/\lambda_1\} \not\subset \widetilde{\mathcal{L}}$. Or $\lambda_2/\lambda_1 = 1 + (\alpha/\lambda)$ et $\lambda_1/\lambda_2 = 1 - (\alpha/\lambda + \alpha)$, ce qui donne $\{\alpha/\lambda, \alpha/(\lambda + \alpha)\} \not\subset \widetilde{\mathcal{L}}$. Et en utilisant le fait que $\alpha \neq 0$ on a le résultat annoncé. $\square$

Voici quelques exemples illustrant le corollaire 5.

Exemple 1. $(1+2i\pi)/(1-2i\pi), 1/(1-2i\pi), \pi/(1-2i\pi), 1/(1+2i\pi), \pi/(1+2i\pi)$ ne sont pas dans $\widetilde{\mathcal{L}}$.

On applique le premier point du corollaire 5 à $\lambda := 1 + 2i\pi$ (on vérifie sans problème que $(\lambda\overline{\lambda}, \lambda, \overline{\lambda})$ est $\overline{\mathbb{Q}}$-libre en utilisant la transcendance de π). Cela donne $\lambda/\overline{\lambda} \notin \widetilde{\mathcal{L}}$. En écrivant $\dfrac{\lambda}{\overline{\lambda}} = \dfrac{2Re(\lambda) - \overline{\lambda}}{\overline{\lambda}} = -1 + \dfrac{2Re(\lambda)}{\overline{\lambda}}$ et $\dfrac{\lambda}{\overline{\lambda}} = \dfrac{2iIm(\lambda) + \overline{\lambda}}{\overline{\lambda}} = 1 + 2i\dfrac{Im(\lambda)}{\overline{\lambda}}$ on obtient $1/(1-2i\pi) \notin \widetilde{\mathcal{L}}, \pi/(1-2i\pi) \notin \widetilde{\mathcal{L}}$. Et par conjugaison complexe on a les deux derniers exemples de la liste initiale.

Plus généralement la même démarche permet de dire que si $\lambda_0 \in (\widetilde{\mathcal{L}} \cap \mathbb{R}) \backslash \overline{\mathbb{Q}}$ alors $(\lambda, \overline{\lambda}, \lambda\overline{\lambda})$ est $\overline{\mathbb{Q}}$-libre et donc $(1 + i\lambda_0)(1 - i\lambda_0)^{-1} \notin \widetilde{\mathcal{L}}$.

Exemple 2. $(1 + \log 2 - i\pi)^2.(1 + \log 2 + i\pi)^{-1} \notin \widetilde{\mathcal{L}}$.

On applique le second point du corollaire 5 à $\lambda := 1 + \log 2 - i\pi$. La famille $(\log 2, i\pi)$ est $\mathbb{Q}$-libre, donc par le théorème de Baker, la famille $(1, \log 2, i\pi)$ est $\overline{\mathbb{Q}}$-libre ; on en déduit que $(\lambda, \overline{\lambda})$ est $\overline{\mathbb{Q}}$-libre. On obtient $\lambda^2/\overline{\lambda} \notin \widetilde{\mathcal{L}}$ et c'est ce que l'on voulait.

Exemple 3. $1/(1 + i\pi + i\ \log 2) \notin \widetilde{\mathcal{L}}$.

On applique le point 3 du corollaire 5 à $\lambda := 1 + i\pi + i\log 2$. On a $\lambda + \overline{\lambda} = 2$ et donc $(1, \lambda, \overline{\lambda})$ est $\overline{\mathbb{Q}}$-liée. On vérifie sans peine que $(\lambda, \overline{\lambda})$ est $\overline{\mathbb{Q}}$-libre (on peut noter que $(i\pi, \log 2)$ est $\mathbb{Q}$-libre, donc par le théorème de Baker on sait que $(1, i\pi, \log 2)$ est $\overline{\mathbb{Q}}$-libre). Ainsi les hypothèses de ce point 3 sont bien remplies.

Plus généralement $(1 + i\lambda_0)^{-1} \notin \widetilde{\mathcal{L}}$ pour tout $\lambda_0 \in (\widetilde{\mathcal{L}} \cap \mathbb{R}) \backslash \overline{\mathbb{Q}}$.

Exemple 4. $1/(1 + \pi - i\pi) \notin \widetilde{\mathcal{L}}$.

On applique, de nouveau, le point 3 du corollaire 5 à $\lambda := 1 + \pi - i\pi$. On a $\overline{\lambda} = (1 - i) + i\lambda$ et donc $(1, \lambda, \overline{\lambda})$ est $\overline{\mathbb{Q}}$-liée. On vérifie que $(\lambda, \overline{\lambda})$ est $\overline{\mathbb{Q}}$-libre. On peut alors en conclure que $1/\lambda \notin \widetilde{\mathcal{L}}$ et c'est ce qu'on voulait.

Plus généralement $(\lambda_0 + i(1 - \lambda_0))^{-1} \notin \widetilde{\mathcal{L}}$ pour tout $\lambda_0 \in (\widetilde{\mathcal{L}} \cap \mathbb{R}) \backslash \overline{\mathbb{Q}}$.

Le corollaire 5 fournit des exemples d'éléments $\lambda \in \widetilde{\mathcal{L}}$ pour lesquels $1/\lambda \notin \widetilde{\mathcal{L}}$. Mais pour l'instant on n'a toujours aucun exemple d'élément $\lambda \in \widetilde{\mathcal{L}}$ pour lequel $\lambda^2 \notin \widetilde{\mathcal{L}}$ (respectivement $|\lambda| \notin \widetilde{\mathcal{L}}$ ou $|\lambda|^2 \notin \widetilde{\mathcal{L}}$). On a vu dans les corollaires 1, 2, 3 des résultats portant sur λ^2, par exemple, mais qui font intervenir un second élément lié à λ : $\{\lambda^2, 1/\lambda\}, \{\lambda^2, |\lambda|^2\}, \{\lambda^2, \lambda^3\} \ldots$ Comment faire pour ne garder que λ^2 (resp. $|\lambda|$ ou $|\lambda|^2$) ?

Notons au passage que si on dispose de $\lambda \in \widetilde{\mathcal{L}} \backslash \{0\}$ pour lequel on sait que $1/\lambda \notin \widetilde{\mathcal{L}}$, alors pour tout $\lambda' \in \widetilde{\mathcal{L}} \backslash \{0\}$ on peut affirmer que $\lambda\lambda' \notin \overline{\mathbb{Q}}$; cela rapproche, un peu, de la conjecture (P).

2.2 Résultats en direction des conjectures (Qr).

Le point de départ va être le théorème 4, un corollaire du théorème fort des six exponentielles qui généralise le théorème des cinq exponentielles de M.Waldschmidt (voir [Wa 2000], p.385). On s'éloigne, un instant, des conjectures du paragraphe 1.

Théorème 4. *Soient x_1, x_2, y_1, y_2 des nombres complexes.*
. 1) On suppose (x_1, x_2) $\overline{\mathbb{Q}}$-libre et $(y_1, y_2, 1/x_1)$ $\overline{\mathbb{Q}}$-libre. Si $x_2/x_1 \in \widetilde{\mathcal{L}}$ alors :

$$\{x_1y_1, x_1y_2, x_2y_1, x_2y_2\} \not\subset \widetilde{\mathcal{L}}.$$

. 2) On suppose (x_1, x_2) $\mathbb{Q}$-libre et (y_1, y_2) $\mathbb{Q}$-libre. Si $x_2/x_1 \in \widetilde{\mathcal{L}}$ alors :

$$\{x_1y_1, x_1y_2, x_2y_1, x_2y_2\} \not\subset \mathcal{L}.$$

Le point 2 est un cas particulier du point 1, mais il est agréable de garder les deux formulations car elles renvoient, clairement, respectivement à (CF4E) et à (C4E).

On peut voir ce résultat comme une condition suffisante pour obtenir la conclusion de (CF4E) dans le point 1, de (C4E) dans le point 2 (bien sûr, conjecturalement, on n'a pas besoin de cette condition !). Cela ne dit rien de neuf par rapport au théorème fort des six exponentielles, mais cela le dit sous une forme intéressante pour les questions posées ici.

Preuve du théorème 4.
. 1) On applique le théorème fort des six exponentielles aux familles (x_1, x_2) et $(y_1, y_2, 1/x_1)$. Cela donne $\{x_1y_1, x_1y_2, x_2y_1, x_2y_2, x_2/x_1\} \not\subset \widetilde{\mathcal{L}}$; d'où le résultat.
. 2) Les hypothèses sont maintenant celles du point 2 ; on suppose de plus avoir $\{x_1y_1, x_1y_2, x_2y_1, x_2y_2\} \subset \mathcal{L}$. La famille (x_1y_1, x_2y_1) est $\mathbb{Q}$-libre par hypothèse, donc $\overline{\mathbb{Q}}$-libre par le théorème de Gelfond-Schneider ; en conséquence (x_1, x_2) est $\overline{\mathbb{Q}}$-libre. La famille (x_1y_1, x_1y_2) est $\mathbb{Q}$-libre par hypothèse donc $(1, x_1y_1, x_1y_2)$ est $\overline{\mathbb{Q}}$-libre par le théorème de Baker ; en conséquence $(1/x_1, y_1, y_2)$ est $\overline{\mathbb{Q}}$-libre. On est donc en mesure d'appliquer le premier point et cela donne $x_2/x_1 \notin \widetilde{\mathcal{L}}$. □

Remarque. On connait une autre condition suffisante donnant la conclusion du point 2 du théorème 4. Il s'agit d'un corollaire d'un théorème de 1971 dû à D.Brownawell et M.Waldschmidt (voir [Wa 2000], point c du corollary 15.28, p.591) et qui s'énonce ainsi.

Théorème (Brownawell-Waldschmidt). *Soient (x_1, x_2) et (y_1, y_2) deux familles de nombres complexes $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants. Si le corps $\mathbb{Q}(x_1, x_2, y_1, y_2)$ est de degré de transcendance sur $\mathbb{Q}$ inférieur ou égal à 1 alors*

$$\{x_1y_1, x_1y_2, x_2y_1, x_2y_2\} \not\subset \mathcal{L}.$$

Le théorème initial de Brownawell-Waldschmidt est un peu plus précis. La condition obtenue dans le théorème 4 (à savoir $x_2/x_1 \in \widetilde{\mathcal{L}}$) et la condition donnée par ce dernier résultat (à savoir $degtr_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(x_1, x_2, y_1, y_2) \leq 1$) sont a priori de natures assez différentes ; en particulier la première ne fait intervenir que (x_1, x_2) et pas (y_1, y_2). On peut illustrer les deux résultats par un même corollaire :

Soit $\ell \in \mathcal{L}\backslash\{0\}$. Alors un des deux nombres ℓ^2, ℓ^3 n'est pas dans $\mathcal{L}$.

Preuve. On applique le point 2 du théorème 4 ou le théorème de Brownawell-Waldschmidt aux familles $(1, \ell)$ et (ℓ, ℓ^2).

On a vu, plus haut, dans les conséquences du corollaire 2 (P), un résultat plus fort. (Fin de la remarque)

Revenons aux conjecture (Q) et (Qr), que l'on va d'abord rappeler sous une forme unifiée.

Conjectures (Q1) et (Qr1). *Soient* $\lambda_1, \lambda_0 \in \widetilde{\mathcal{L}}$ *avec* $\lambda_0 \notin \overline{\mathbb{Q}}$.
. *(Q1) Si* $\lambda_1/\lambda_0 \in \widetilde{\mathcal{L}}$ *alors* $\lambda_1/\lambda_0 \in \overline{\mathbb{Q}}$.
. *(Qr1) Si* $(\lambda_0, \overline{\lambda}_0)$ *est* $\overline{\mathbb{Q}}$*-libre et* $\lambda_1/\lambda_0 \in \mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$ *alors* $\lambda_1/\lambda_0 \in \overline{\mathbb{Q}}$.

Conjectures (Q2) et (Qr2). *Soient* $\ell_1, \ell_0 \in \mathcal{L}\backslash\{0\}$.
. *(Q2) Si* $\ell_1/\ell_0 \in \widetilde{\mathcal{L}}$ *alors* $\ell_1/\ell_0 \in \mathbb{Q}$.
. *(Qr2) Si* $\ell_1, \ell_0 \notin \mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$ *et* $\ell_1/\ell_0 \in \mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$ *alors* $\ell_1/\ell_0 \in \mathbb{Q}$.

Sous cette forme (Q1) et (Qr1) fournissent deux conditions suffisantes (conjecturalement) pour que les quotients λ_1/λ_0 soient algébriques, (Q2) et (Qr2) fournissent deux conditions (conjecturalement) suffisantes pour que les quotients ℓ_1/ℓ_0 soient rationnels.

Grâce au théorème 4, on va montrer que dans chaque cas, la conjonction de ces deux conditions suffisantes conjecturales fournit une condition suffisante effective. On a donc avancé en direction de (Q1) et (Qr1), respectivement (Q2) et (Qr2).

Corollaire 6.
. *1) Soient* $\lambda_1, \lambda_0 \in \widetilde{\mathcal{L}}$ *avec* $(1, \lambda_0, \overline{\lambda}_0)$ $\overline{\mathbb{Q}}$*-libre. Si* $\lambda_1/\lambda_0 \in (\mathbb{R} \cup i\mathbb{R}) \cap \widetilde{\mathcal{L}}$ *alors* $\lambda_1/\lambda_0 \in \overline{\mathbb{Q}}$.
. *2) Soient* $\ell_1, \ell_0 \in \mathcal{L}\backslash(\mathbb{R} \cup i\mathbb{R})$. *Si* $\ell_1/\ell_0 \in (\mathbb{R} \cup i\mathbb{R}) \cap \widetilde{\mathcal{L}}$ *alors* $\ell_1/\ell_0 \in \mathbb{Q}$.

Preuve du corollaire 6.
. 1) On suppose que $\lambda_1/\lambda_0 \in (\mathbb{R} \cup i\mathbb{R}) \cap \widetilde{\mathcal{L}}$ et que $\lambda_1/\lambda_0 \notin \overline{\mathbb{Q}}$. On applique le point 1 du théorème 4 avec $(x_1, x_2) := (1, \lambda_1/\lambda_0)$ et $(y_1, y_2) := (\lambda_0, \overline{\lambda}_0)$. Cela donne $\{\lambda_0, \overline{\lambda}_0, \lambda_1, \lambda_1\overline{\lambda}_0/\lambda_0\} \not\subset \widetilde{\mathcal{L}}$. Comme par ailleurs $\lambda_1\overline{\lambda}_0/\lambda_0 = \pm\overline{\lambda}_1$, on a obtenu une contradiction et c'est ce que l'on voulait.
. 2) On suppose que $\ell_1/\ell_0 \in (\mathbb{R} \cup i\mathbb{R}) \cap \widetilde{\mathcal{L}}$ et $\ell_1/\ell_0 \notin \mathbb{Q}$. On applique le point 2 du théorème 4 avec $(x_1, x_2) := (1, \ell_1/\ell_0)$ et $(y_1, y_2) := (\ell_0, \overline{\ell}_0)$, qui sont des familles $\mathbb{Q}$-libre. Cela donne $\{\ell_0, \overline{\ell}_0, \ell_1, \ell_1\overline{\ell}_0/\ell_0\} \not\subset \mathcal{L}$. Comme par ailleurs $\ell_1\overline{\ell}_0/\ell_0 = \pm\overline{\ell}_1$, cela conduit à une contradiction et c'est ce que l'on voulait. □

2.3 Quelques résultats liés aux familles $\{\mathbf{v}, \mathbf{vu}, \mathbf{vu^2}\}$.

Le théorème 2 proposait différentes formulations d'une conjecture qui est un cas particulier de (CF4E), le cas de deux familles proportionnelles. Sous la forme ($\mathcal{C}1$), on conjecture que $\{v, vu, vu^2\} \not\subset \widetilde{\mathcal{L}}$ dès que $u \in \mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{Q}}$ et $v \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ (c'est (CF4E) appliqué à $(1, u)$ et (v, vu)). A défaut de ce résultat, on va chercher des conditions suffisantes sur (u, v) sous lesquelles on pourra affirmer que l'on a bien $\{v, vu, vu^2\} \not\subset \widetilde{\mathcal{L}}$. Je vais proposer deux résultats de ce type, qui font apparaître des conditions suffisantes très différentes, les théorèmes 5 et 6. Bien évidemment ces conditions ne prétendent pas être les seules possibles.

Le premier résultat est un simple cas particulier du théorème 4.

Théorème 5.
. 1) Soient $u \in \mathbb{C}$ et $v \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ avec $(1, v, vu)$ $\overline{\mathbb{Q}}$-libre. Si $u \in \widetilde{\mathcal{L}}$ alors $\{v, vu, vu^2\} \not\subset \widetilde{\mathcal{L}}$.
. 2) Soient $u \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Q}$ et $v \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Si $u \in \widetilde{\mathcal{L}}$ alors $\{v, vu, vu^2\} \not\subset \mathcal{L}$.

Preuve du théorème 5.
. 1) On applique le point 1 du théorème 4 avec $x_1 := 1,\ x_2 := u,\ y_1 := v$, $y_2 := vu$.
. 2) On applique le point 2 du théorème 4 avec le même choix. □

La condition "$u \in \widetilde{\mathcal{L}}$" est bien sûr assez restrictive, mais ce théorème 5 redonne certains résultats du paragraphe 2-1. Voici deux exemples.

Exemple 1. Pour $(\lambda_1, \lambda_2) \in \widetilde{\mathcal{L}}^2$ avec $(1, \lambda_2, \lambda_1\lambda_2)$ $\overline{\mathbb{Q}}$-libre on a :

$$\{\lambda_1\lambda_2, \lambda_1^2\lambda_2\} \not\subset \ \widetilde{\mathcal{L}}.$$

(on applique le point 1 du théorème 5 à $u := \lambda_1,\ v := \lambda_2$).

Exemple 2. Pour $(\lambda_0, \lambda_1) \in \widetilde{\mathcal{L}}^2$ avec $(\lambda_0^2, \lambda_1, \lambda_0\lambda_1)$ $\overline{\mathbb{Q}}$-libre on a :

$$\{\lambda_1/\lambda_0, \lambda_1/\lambda_0^2\} \not\subset \ \widetilde{\mathcal{L}}.$$

(on applique le point 1 du théorème 5 à $u := \lambda_0,\ v := \lambda_1/\lambda_0^2$).

Ce théorème 5 a un corollaire qui sera un retour sur [Di 1997], dont je reprends les notations. $\mathcal{H}$ désigne le demi-plan de Poincaré, D le disque unité ouvert centré en 0 de $\mathbb{C}$, j l'invariant modulaire (j est une application de $\mathcal{H}$ dans $\mathbb{C}$) et J son développement de Fourier à l'infini (J est une application de $D\backslash\{0\}$ dans $\mathbb{C}$). La conjecture suivante notée (C4) dans [Di 1997] est un cas particulier de (C4E) (mais aussi d'une conjecture de D.Bertrand, hors sujet ici).

(C4) *"Soit $\tau \in \mathcal{H}$. Les nombres $exp(2i\pi\tau)$ et $exp(-2i\pi/\tau)$ ne sont pas simultanément algébriques".*

Et j'ai montré ([Di 1997], théorème 1) que (C4) est une assertion équivalente à l'assertion suivante, de nature modulaire :

"J est injective sur $\overline{\mathbb{Q}} \cap (D\backslash\{0\})$".

A défaut de savoir démontrer (C4) j'ai donné des exemples de $\tau \in \mathcal{H}$ pour lesquels la conclusion de (C4) est acquise ([Di 1997], proposition 3). Le théorème 5 permet d'en donner une autre famille, élargissant l'ensemble des $\tau \in \mathcal{H}$ pour lesquels ça marche comme prévu. Voici le résultat, qui complète un peu cette proposition 3 de [Di 1997].

Corollaire 7. *Soit $\tau \in \mathcal{H}$ avec $\tau \in \widetilde{\mathcal{L}}$ ou $1/\tau \in \widetilde{\mathcal{L}}$. Les nombres $exp(2i\pi\tau)$ et $exp(-2i\pi/\tau)$ ne sont pas simultanément algébriques.*

Preuve du corollaire 7.
On applique le point 2 du théorème 5 avec $u := \tau,\ v := 2i\pi/\tau$ quand $\tau \in \widetilde{\mathcal{L}}$; et avec $u := 1/\tau,\ v := 2i\pi\tau$ quand $1/\tau \in \widetilde{\mathcal{L}}$. □

Ce corollaire 7 donne bien la conclusion attendue dans (C4), au prix d'une hypothèse supplémentaire ($\tau \in \widetilde{\mathcal{L}}$ ou $1/\tau \in \widetilde{\mathcal{L}}$). Or sous cette hypothèse supplémentaire on attend un résultat bien plus fort ; par exemple si $\tau \in (\mathcal{H}\cap\widetilde{\mathcal{L}})\backslash\overline{Q}$, la conjecture (P1) prédit que $(2i\pi).\tau \notin \widetilde{\mathcal{L}}$ et donc $(2i\pi).\tau \notin \mathcal{L}$. Et les résultats du paragraphe 2-1 donnent des exemples où l'on peut atteindre ces résultat plus forts.

Exemple 1. Si $\tau \in \mathcal{H}\cap\widetilde{\mathcal{L}}$ avec $(1,\tau,\overline{\tau})$ $\overline{\mathbb{Q}}$-libre alors $(2i\pi)\tau \notin \widetilde{\mathcal{L}}$ (on applique le point 2 du corollaire 2 (P) avec $\lambda_1 := 2i\pi,\ \lambda_2 := \tau$).

Exemple 2. Si $\tau \in (\mathcal{H}\cap\mathcal{L})\backslash i\mathbb{R}$ alors $(2i\pi)\tau \notin \widetilde{\mathcal{L}}$.
(On part de $\tau \in (\mathcal{H}\cap\mathcal{L})\backslash i\mathbb{R}$; ainsi $(\tau,\overline{\tau})$ est $\mathbb{Q}$-libre et donc par le théorème de Baker, la famille $(1,\tau,\overline{\tau})$ est $\overline{\mathbb{Q}}$-libre ; on est ainsi dans les hypothèses de l'exemple 1).

Et on aurait des exemples analogues avec le couple $(1/\tau, 2i\pi/\tau)$.

Après ce détour modulaire, retour aux familles $\{v, vu, vu^2\}$ pour la seconde condition suffisante annoncée au début du paragraphe. Dans l'esprit du théorème 2 cette condition sera formulée sous plusieurs formes (équivalentes).

Théorème 6.
. 1) Soient u et v dans $\mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{Q}}$. On suppose $(v,\overline{v})$ $\overline{\mathbb{Q}}$-libre et $(1,u,\overline{u})$ $\overline{\mathbb{Q}}$-liée. Alors : $\{v, vu, vu^2\} \not\subset \widetilde{\mathcal{L}}$.
. 2) Soient $\lambda \in \widetilde{\mathcal{L}}$ et $t \in \mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{Q}}$. On suppose $(\lambda/t, \overline{\lambda/t})$ $\overline{\mathbb{Q}}$-libre et $(1,t,\overline{t})$ $\overline{\mathbb{Q}}$-liée. Alors : $\{t\lambda, \lambda/t\} \not\subset \widetilde{\mathcal{L}}$.
. 3) Soient $\lambda \in \widetilde{\mathcal{L}}$ et $s \in \mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{Q}}$. On suppose $(\lambda,\overline{\lambda})$ $\overline{\mathbb{Q}}$-libre et $(1,s,\overline{s})$ $\overline{\mathbb{Q}}$-liée. Alors : $\{s\lambda, s^2\lambda\} \not\subset \widetilde{\mathcal{L}}$.
. 4) Soient $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in \widetilde{\mathcal{L}}\backslash\{0\}$. On suppose $\lambda_1\lambda_2 = \lambda^2$, $(\lambda_1,\overline{\lambda_1})$ $\overline{\mathbb{Q}}$-libre et $(1,\lambda/\lambda_1,\overline{\lambda/\lambda_1})$ $\overline{\mathbb{Q}}$-liée. Alors : $\lambda/\lambda_1 = \lambda_2/\lambda \in \overline{\mathbb{Q}}$.

Le point 1 redonne les propriétés 2 et 3 du corollaire 5. Le point 2 généralise la proposition 3 de [Di 1997] ($\widetilde{\mathcal{L}}$ remplace $\mathcal{L}$ et λ remplace $2i\pi$). Le point 4 n'a, conjecturalement, que des illustrations triviales : tout triplet $(\lambda,\lambda_1,\lambda_2) \in \widetilde{\mathcal{L}}^3$ vérifiant $\lambda_1\lambda_2 = \lambda^2$ va vérifier $\lambda/\lambda_1 = \lambda_2/\lambda \in \overline{\mathbb{Q}}$ (conjecture ($\mathcal{C}4$) du théorème 2).

Preuve du théorème 6.
. 1) On applique le théorème fort des six exponentielles, version 1, aux familles $(v,\overline{v})$ et $(1,u,u^2)$ qui sont bien des familles $\overline{\mathbb{Q}}$-libres. Cela donne :

$$\{v, vu, vu^2, \overline{v}, \overline{v}u, \overline{v}u^2\} \not\subset \widetilde{\mathcal{L}}. \qquad (*)$$

Par hypothèse $(1, u, \overline{u})$ est $\overline{\mathbb{Q}}$-liée ; comme $u \notin \overline{\mathbb{Q}}$, il existe $(\alpha, \beta) \in \overline{\mathbb{Q}}^2$ tel que $\overline{u} = \alpha + \beta u$. On a donc $v\overline{u} = \alpha v + \beta uv, v\overline{u}^2 = \alpha^2 v + (2\alpha\beta)vu + \beta^2 vu^2$. On voit donc que si v, vu, vu^2 sont dans $\widetilde{\mathcal{L}}$, alors $v\overline{u}$ et $v\overline{u}^2$ sont aussi dans $\widetilde{\mathcal{L}}$, et donc les conjugés $\overline{v}, \overline{v}u, \overline{v}u^2$ aussi ; mais c'est contraire à $(*)$. On a donc finalement le résultat annoncé : $\{v, vu, vu^2\} \not\subset \widetilde{\mathcal{L}}$.
. 2) On applique le point 1 avec $u := t,\ v := \lambda/t$.
. 3) On applique le point 1 avec $u := s,\ v := \lambda$.
. 4) On applique le point 1 avec $v := \lambda_1,\ u := \lambda/\lambda_1 = \lambda_2/\lambda$. □

Dans les théorèmes 5 et 6 on a vu des conditions suffisantes portant sur (u, v) permettant d'affirmer que $\{v, vu, vu^2\} \not\subset \widetilde{\mathcal{L}}$. On peut aussi s'intéresser à des familles voisines de $\{v, vu, vu^2\}$; voici deux exemples.

Théorème 7.
. 1) Soient $u, v \in \mathbb{C}$ avec $(1, u, \overline{u})$ $\overline{\mathbb{Q}}$-libre et $(v, \overline{v})$ $\overline{\mathbb{Q}}$-libre. Alors :
$\{v, vu, v\overline{u}\} \not\subset \widetilde{\mathcal{L}}$.
. 2) Soient $u \in \mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{Q}}$ et $v \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Alors : $\{v, vu, vu^2, vu^3\} \not\subset \widetilde{\mathcal{L}}$.
En particulier on a donc : $\{u, u^2, u^3\} \not\subset \widetilde{\mathcal{L}}$

Preuve du théorème 7.
On applique le théorème fort des six exponentielles, version 1, à :
. $(1, u, \overline{u})$ et $(v, \overline{v})$ dans le point 1 ;
. $(1, u, u^2)$ et (v, vu) dans le point 2. □

Le second point, avec $v := 1$ et $u := \pi^{1/2}$, donne : $\{\pi^{1/2}, \pi^{3/2}\} \not\subset \widetilde{\mathcal{L}}$. Et avec $v := 1,\ u := \pi^{1/3}$ on a : $\{\pi^{1/3}, \pi^{2/3}\} \not\subset \widetilde{\mathcal{L}}$. □

2.4 En forme de bilan.

Le verre est à moitié plein ou à moitié vide. Je ne sais pas démontrer les conjectures présentées ici, mais je sais dire que dans un certain nombre de cas tout se passe comme prévu par ces conjectures.

M.Waldschmidt a obtenu dans [Wa 2005] un résultat qui généralise le théorème fort des six exponentielles. Il serait intéressant d'en tirer des applications du même type que celles de ce paragraphe 2, mais cela ne me semble pas très évident. Il est bien certain qu'à rester, comme je le fais ici, dans le cadre du théorème fort des six exponentielles on ne peut pas espérer aller très loin. Il faut avancer au niveau de la machine transcendante ; mais depuis 1992 et la percée de D.Roy il n'y a pas eu de progrès sensible en ce qui concerne les résultats qualitatifs de transcendance des valeurs de la fonction exponentielle. Le travail reste donc à faire.

Références

[Di 1997] G. DIAZ, *La conjecture des quatre exponentielles et les conjectures de D. Bertrand sur la fonction modulaire.* J. Théorie des Nombres de Bordeaux **9** (1997), 229–245.

[Di 2004] G. Diaz, *Utilisation de la conjugaison complexe dans l'étude de la transcendance de valeurs de la fonction exponentielle usuelle.* J. Théorie des Nombres de Bordeaux **16** (2004), 535–553.

[Roy 1992] D. Roy, *Matrices whose coefficients are linear forms in logarithms.* J. Number Theory **41** (1992), 22–47.

[Wa 2000] M. Waldschmidt, *Diophantine approximation on linear algebraic groups.* Grundlerhen der Mathematischen Wissenschaften **326**, Springer-Verlag, 2000.

[Wa 2004] M. Waldschmidt, *Variations on the six exponentials theorem.* Algebra and Number Theory, Proceedings of the Silver Jubilee Conference University of Hyderabad, ed R.Tandon, Hindustant Book Agency, 2005, 338–355.

[Wa 2005] M. Waldschmidt, *Further variations on the six exponentials theorem.* Hardy-Ramanujan J. **28** (2005), 1–9.

Guy Diaz
Lamuse
Université de Saint-Étienne
23, rue Paul Michelon
42023 Saint-Étienne Cedex 2, France
E-mail : guy.diaz@univ-st-etienne.fr