Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **19** (2007), 231–248

Problème de Lehmer sur $\mathbb{G}_m$ et méthode des pentes

par Nicolas RATAZZI

Résumé. Soit h la hauteur logarithmique absolue de Weil sur $\overline{\mathbb{Q}}^{\times}$. En utilisant l'inégalité des pentes de J.-B. Bost, nous donnons dans cet article une preuve du résultat suivant dû à Dobrowolski : il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{G}_m(\overline{\mathbb{Q}}) \backslash \mu_\infty \quad h(x) \geq \frac{c}{D}\left(\frac{\log\log 3D}{\log 2D}\right)^3,$$

avec $D = [\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}]$ et où μ_∞ représente le groupe des racines de l'unité.

Abstract. Let h be the usual absolute logarithmic Weil height on $\overline{\mathbb{Q}}^{\times}$. Using the slopes inequality of J.-B. Bost, we give in this article a proof of the following result of Dobrowolski [4] : there exists a constant $c > 0$ such that

$$\forall x \in \mathbb{G}_m(\overline{\mathbb{Q}}) \backslash \mu_\infty \quad h(x) \geq \frac{c}{D}\left(\frac{\log\log 3D}{\log 2D}\right)^3,$$

where $D = [\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}]$ and where μ_∞ denote the group of roots of unity.

1. Introduction

Soient x un nombre algébrique non nul et $h(x)$ sa hauteur de Weil logarithmique absolue. Cette hauteur est un nombre positif et un théorème de Kronecker affirme alors que $h(x) = 0$ si et seulement si x est une racine de l'unité. Le problème de Lehmer consiste à trouver la minoration optimale, en fonction du degré de $\mathbb{Q}(x)$, de la hauteur $h(x)$ quand x n'est pas une racine de l'unité.

Conjecture 1.1. (Problème de Lehmer) *Il existe un nombre réel $c > 0$ tel que pour tout point $x \in \overline{\mathbb{Q}}^{\times}$, de degré D sur $\mathbb{Q}$, qui n'est pas une racine de l'unité, on a*

$$h(x) \geq \frac{c}{D}.$$

Manuscrit reçu le 30 décembre 2005.

Cette conjecture, si elle est vraie, est optimale (dans le cas d'une minoration en fonction de D). Ceci se voit en considérant la suite $(x_n) = (2^{\frac{1}{n}})$. Dans cette direction, le meilleur résultat inconditionnel (au choix de la constante c près) est dû à E. Dobrowolski [4] :

Théorème 1.2. (Dobrowolski) *Il existe un nombre réel $c > 0$ tel que pour tout nombre $x \in \overline{\mathbb{Q}}^{\times}$, de degré D sur $\mathbb{Q}$, qui n'est pas une racine de l'unité, on a*

$$h(x) \geq \frac{c}{D}\left(\frac{\log\log(3D)}{\log(2D)}\right)^3 .$$

Dans ce qui suit, nous retrouvons ce résultat, essentiellement en revisitant la preuve de E. Dobrowolski dans le formalisme des pentes que J.-B. Bost a introduit dans [2]. Il y a toutefois un certain nombre de petites difficultées techniques à surmonter : notamment l'estimation aux places archimédiennes, triviale chez Dobrowolski, nécessite ici un peu de travail. De même le lemme clé pour l'estimation aux places finies, basé sur le petit théorème de Fermat, nécessite une légère reformulation.

L'un des objectifs est de montrer comment les preuves de transcendance "classiques", ici concernant le problème de Lehmer, peuvent se traduire en utilisant l'inégalité des pentes. Notons qu'il existe déjà une reformulation de ce résultat dans le langage des déterminants d'interpolations de M. Laurent.

Remarque. En ce qui concerne notre résultat, l'inégalité des pentes permet d'obtenir directement une valeur numérique pour la constante c, ceci étant, les différents compartiments de la preuve n'ayant pas été optimisés dans cet objectif, nous ne l'avons pas explicitée : telle quelle, elle serait certainement moins bonne que la meilleure constante connue dans le cas général, $\frac{1}{4}$, due à P. Voutier [8].

Remarque. On peut se demander ce qu'aurait donnée une preuve du même type obtenue en rajoutant des multiplicitées. En fait, à partir des calculs effectués ici il est facile d'écrire une telle preuve, malheureusement celle-ci ne permet pas d'obtenir un meilleur résultat.

Mentionnons dans la direction de la conjecture 1.1. l'article de C.J. Smyth [7] qui démontre cette conjecture dans le cas des nombres algébriques non-réciproques, l'article de A. Schinzel [6] qui démontre la conjecture dans le cas des nombres totalement réels, ainsi que le papier de F. Amoroso et S. David [1] qui généralise en dimension supérieure la conjecture de Lehmer et le résultat de Dobrowolski. En corollaire de leur résultat, les auteurs de [1] prouvent la conjecture de Lehmer classique notamment dans le cas où $\mathbb{Q}(x)/\mathbb{Q}$ est une extension galoisienne.

2. Notations et préliminaires

Avant de commencer la preuve, rappelons qu'il suffit de savoir traiter le cas où x est un entier algébrique.

Lemme 2.1. *Si $x \in \overline{\mathbb{Q}} \backslash \overline{\mathbb{Z}}$ est de degré D, alors $h(x) \geq \frac{\log 2}{D}$.*

Désormais nous ferons l'hypothèse que x est un entier algébrique qui n'est pas une racine de l'unité.

2.1. Notations. Soient A un anneau et n un entier positif. Dans toute la suite, on notera $A^n[X]$ le A-module des polynômes en une indéterminée, de degré inférieur ou égal à n. Par exemple, $\mathbb{Z}_p^n[X]$ dénote le module des polynômes de degré au plus n sur l'anneau des entiers p-adiques $\mathbb{Z}_p$.

Soit φ un morphisme entre deux $\mathbb{Z}$-fibrés hermitiens $\overline{E}$ et $\overline{F}$. Si K est un corps, le fibré $E \otimes K$ sera simplement noté E_K et le morphisme déduit de φ par extension des scalaires à K sera noté φ_K. Enfin, on notera $|| \varphi ||_p$ la norme d'opérateur de $\varphi_{\mathbb{Q}_p}$ et $|| \varphi ||_{\mathbb{C}}$ la norme de l'opérateur $\varphi_{\mathbb{C}}$.

Convention. Sur $\mathbb{Q}$ la valeur absolue p-adique $|\cdot|_p$ est définie par la convention $|p|_p = p^{-1}$.

Définition. Soient $\overline{E}$ est un $\mathbb{Z}$-fibré hermitien de rang 1 et s une section globale non nulle de E. Le *degré arithmétique* est défini par la formule

$$\widehat{\deg}\, \overline{E} = - \sum_{p \text{ premiers}} \log || s ||_p - \log || s ||_{\mathbb{C}} \,.$$

La formule du produit assure que cette définition est indépendante du choix de s.

Si $\overline{E}$ est un $\mathbb{Z}$-fibré hermitien de rang supérieur à r, on pose

$$\widehat{\deg}\, \overline{E} = \widehat{\deg} \left(\overline{\bigwedge^{\max} E} \right),$$

où $\bigwedge^{\max} E$ est muni de la métrique déterminant, *i.e.*, pour tout $x_1 \wedge \ldots \wedge x_r$ et pour tout $y_1 \wedge \ldots \wedge y_r$

$$\langle (x_1 \wedge \ldots \wedge x_r), (y_1 \wedge \ldots \wedge y_r) \rangle := \det \Big(\langle x_i, y_j \rangle_{1 \leq i,j \leq r} \Big) \,.$$

Définition. Soit $\overline{E}$ un $\mathbb{Z}$-fibré hermitien, sa *pente*, notée $\widehat{\mu}(E)$ est définie par

$$\widehat{\mu}\left(\overline{E}\right) = \frac{\widehat{\deg}\, \overline{E}}{\mathrm{rg}\, E}.$$

Ceci permet de définir la *pente maximale* d'un $\mathbb{Z}$-fibré hermitien $\overline{E}$,

$$\widehat{\mu}_{\max}\left(\overline{E}\right) = \max_{\{0\} \subsetneq F \subset E} \widehat{\mu}\left(\overline{F}\right),$$

où les sous–fibrés $F \subset E$ sont munis de la métrique induite par restriction de E à F.

2.2. Un morphisme pour l'inégalité des pentes. Considérons un entier algébrique $x \in \overline{\mathbb{Z}}$ de degré D, de polynôme minimal Δ_{-1} unitaire à coefficients entiers. Si p_k est un nombre premier avec $k \geq 0$, on note Δ_{p_k} (ou Δ_k ou Δ_p s'il n'y a aucune confusion possible) le polynôme minimal (qui est unitaire à coefficients entiers) de l'entier algébrique x^{p_k}. Quitte à faire une récurrence, il suffit de traiter le cas où tous les x^p que l'on considère sont de même degré que x. En effet

Lemme 2.2. *Soit f une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, strictement positive et décroissante. Si l'hypothèse $[\forall p$ premier $\mathbb{Q}(x^p) = \mathbb{Q}(x)]$ entraine l'inégalité $h(x) \geq \frac{f(D)}{D}$. Alors, la même inégalité est vraie sans cette hypothèse.*

Démonstration. Par récurrence sur $D = [\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}]$: si $\mathbb{Q}(x^p) \subsetneq \mathbb{Q}(x)$, alors, x est racine de $X^p - x^p \in \mathbb{Q}(x^p)$. Il y a alors deux possibilités : soit ce polynôme est irréductible (cas (i)), soit il ne l'est pas (cas (ii)).

Dans le cas (i), on a $[\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}(x^p)] = p$ et l'hypothèse de récurrence donne

$$h(x^p) \geq \frac{1}{[\mathbb{Q}(x^p) : \mathbb{Q}]} f([\mathbb{Q}(x^p) : \mathbb{Q}]).$$

Ainsi,

$$h(x) = \frac{1}{p} h(x^p) \geq \frac{1}{p[\mathbb{Q}(x^p) : \mathbb{Q}]} f([\mathbb{Q}(x^p) : \mathbb{Q}]) = \frac{1}{D} f([\mathbb{Q}(x^p) : \mathbb{Q}]),$$

et on conclut par décroissance de f.

Dans le cas (ii), nous voyons que $x^p \in [\mathbb{Q}(x^p)]^p$. Il existe donc $y \in \mathbb{Q}(x^p)$ tel que $y^p = x^p$. Donc il existe ζ une racine p-ième de l'unité telle que $y = \zeta x$. Finalement ceci nous permet d'en déduire

$$h(x) = h(y) \geq \frac{1}{[\mathbb{Q}(x^p) : \mathbb{Q}]} f([\mathbb{Q}(x^p) : \mathbb{Q}]) \geq \frac{1}{D} f([\mathbb{Q}(x^p) : \mathbb{Q}]),$$

et là encore la décroissance de f permet de conclure. □

Notons que ce lemme permet de faire l'économie du lemme combinatoire de Dobrowolski. Nous supposerons donc désormais que

$$[\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}(x^p)] = 1.$$

Par ailleurs, comme x n'est pas une racine de l'unité, on a $h(x) \neq h(x^p)$ donc, pour tous plongements $\sigma,\ \sigma' : K \hookrightarrow \mathbb{C}$, on a $\sigma(x) \neq \sigma'(x^p)$.

Soient L, T et N des paramètres entiers à fixer ultérieurement. Si Δ est un polynôme de $A^L[X]$, le sous-A-module de $A^L[X]$ “engendré” par Δ est noté (Δ). Plus précisément,

$$(\Delta) = \left\{ P \in A^L[X] / \ \ \exists Q \in A^L[X] \ \ P = \Delta Q \ \ \right\}.$$

Par ailleurs, on note $\mathcal{P}_N = \left\{ p \in [\![\frac{N}{2}, N [\![\;/\; p \text{ premier} \right\}$. Cet ensemble est non vide par le Postulat de Bertrand, et permet de définir deux $\mathbb{Z}$-fibrés :

$$E = \mathbb{Z}^L[X] \simeq \mathbb{Z}^{L+1}, \quad \text{et}, \quad F = \left(E/(\Delta_{-1}^T) \right) \times \prod_{p \in \mathcal{P}_N} \left(E/(\Delta_p) \right).$$

Dans F, on veut quotienter par un module (Δ_{-1}^T) non trivial afin de pouvoir extrapoler dans le corollaire 4.3. Pour cela, il faut nécessairement que l'inégalité $DT \leq L$ soit vérifiée. Cette inégalité sera désormais supposée vérifiée.

Remarque. Comme Δ_{-1} et Δ_p sont des polynômes unitaires dans $\mathbb{Z}[X]$, il est possible d'effectuer la division euclidienne par Δ_{-1} et Δ_p. Ceci permet d'identifier F et le fibré trivial

$$\mathbb{Z}^{DT + \sum_{p \in \mathcal{P}_N} \deg \Delta_p}.$$

Définissons maintenant le morphisme entre $\mathbb{Z}$-fibrés auquel va être appliquée l'inégalité des pentes.

$$\begin{aligned} \varphi : E &\to F \\ P &\mapsto \left(R_{-1}\,,\, (R_p)_{p \in \mathcal{P}_N} \right) \end{aligned}$$

où R_{-1} est le reste de la division euclidienne par Δ_{-1}^T et où pour tout p, R_p est le reste de la division euclidienne par Δ_p.

3. "Lemme de zéros"

Pour appliquer l'inégalité des pentes, il faut que le morphisme φ soit injectif. Notons n le cardinal de l'ensemble $\mathcal{P}_N = \{p_1, \cdots, p_n\}$.

Lemme 3.1. *Si $L < D(T+n)$, alors, le morphisme φ est injectif.*

Démonstration. En effet, dans le cas contraire, un polynôme non nul dans le noyau aurait strictement plus de zéros comptés avec multiplicité que son degré. $\square$

Par ailleurs pour tout N assez grand, le théorème des nombres premiers nous donne

$$n = \sum_{p \in \mathcal{P}_N} 1 \geq \frac{N}{4 \ln N}.$$

Nous supposerons désormais que L vérifie l'encadrement

$$DT < L < D\left(T + \frac{N}{4 \ln N} \right).$$

4. Inégalité des pentes

4.1. La filtration. On définit la filtration de F

$$F_n = \{0\} \subset F_{n-1} \subset \cdots \subset F_0 \subset F_{-1} = F, \text{ où,}$$

$$F_0 = \Big\{ (P_1, (P_p)_{p \in \mathcal{P}_N}) \ \big/ \ P_1 = 0 \Big\} \quad \text{et,}$$

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad F_k = \Big\{ (P_1, (P_p)_{p \in \mathcal{P}_N}) \ \big/ \ P_1 = 0, \ P_{p_1} = 0, \ \cdots, \ P_{p_k} = 0 \Big\}.$$

Pour tout entier k entre 0 et $n-1$, posons

$$G_{-1} = F_{-1} \big/ F_0 \simeq \mathbb{Z}^{T \deg \Delta_{-1}} \simeq \mathbb{Z}^{DT}, \quad G_k = F_k \big/ F_{k+1} \simeq \mathbb{Z}^{\deg \Delta_k} \simeq \mathbb{Z}^D, \quad \text{et,}$$

$$E_{-1} = E, \quad E_k = \varphi^{-1}(F_k).$$

On munit le fibré $E \simeq \mathbb{Z}^{L+1}$ de la métrique du fibré trivial et les sous-fibrés E_k des métriques de restriction de celle de $\overline{E}$. De même, on munit les fibrés G_k des métriques triviales.

Pour $k \in \{-1, \ldots, n-1\}$, notons $\varphi_k : \overline{E_k} \to \overline{G_k}$ et $\widetilde{\varphi_k} : \overline{E_k/E_{k+1}} \to \overline{G_k}$ les morphismes déduits de φ, où E_k/E_{k+1} est muni de la métrique quotient.

Remarque. Concrètement, les fibrés (E_k) vérifient

$$E_0 = \Big\{ P \in E \ \big/ P \text{ est nul à un ordre } \geq T \text{ en } x \Big\}$$

et pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$,

$$E_k = \Big\{ P \in E \ \big/ P \text{ nul à un ordre } \geq T \text{ en } x, \text{ nul en } x^{p_1}, \cdots, \text{ nul en } x^{p_k} \Big\}.$$

Une autre manière de dire, consiste à dire que $E_0 = (\Delta_{-1}^T)$, et $\forall k \geq 0$, $E_k = (\Delta_{-1}^T \Delta_1 \ldots \Delta_k)$.

4.2. L'inégalité des pentes. Avec nos notations, en notant $\widehat{\deg}$ le degré arithmétique et $\widehat{\mu}_{\max}$ la pente maximale, nous pouvons énoncer une version de l'inégalité des pentes de J.-B. Bost sous la forme :

$$\widehat{\deg}\, \overline{E} \ \leq \sum_{k=-1}^{n-1} \operatorname{rg}(E_k/E_{k+1}) \Big(\widehat{\mu}_{\max}(\overline{G_k}) + \sum_{p \text{ premiers}} \log \|\, \varphi_k \,\|_p \ \Big)$$

$$+ \sum_{k=-1}^{n-1} \log \|\, \bigwedge^{\max} \widetilde{\varphi_k} \,\|_{\mathbb{C}} \,. \tag{1}$$

Il s'agit essentiellement de l'inégalité (**4.14**) de la *Proposition* **4.6.** de [3] dans laquelle on n'a pas remplacé les termes $\|\, \bigwedge^r \varphi^i \,\|$ par $\|\, \varphi^i \,\|^r$ aux places archimédiennes.

Il nous reste maintenant à calculer les différents termes intervenant dans cette inégalité.

4.3. Évaluation de rg(E_k). Par construction $E_k/E_{k+1} \hookrightarrow G_k$. Par ailleurs, le rang de E_k/E_{k+1} se calcule facilement :

Si $k = -1$, $\mathrm{rg}(E_k/E_{k+1}) = DT$. Sinon soit $k_0 = \left[\frac{L}{D} - T\right]$. Pour $k < k_0$, $\mathrm{rg}E_k = L + 1 - D(T + k)$, et pour $k > k_0$, $\mathrm{rg}E_k = 0$.

4.4. Calcul des degrés et des pentes. Le fibré hermitien $\overline{E}$ ainsi que les fibrés hermitiens $\overline{G_k}$ sont isomorphes (comme fibrés hermitiens) à des fibrés triviaux, donc, pour tout entier k entre -1 et $n - 1$,

$$\widehat{\deg}\,(\overline{E}) = 0, \text{ et, } \widehat{\mu}_{\max}(\overline{G_k}) = 0.$$

4.5. Calcul des $||\ \varphi_k\ ||_p$: l'extrapolation. Dans ce paragraphe, on se donne p un nombre premier et k un entier compris entre -1 et $n-1$. Nous voulons obtenir une majoration de $||\ \varphi_k\ ||_p$.

4.5.1. *Calcul des $||\ \varphi_k\ ||_l$, l premier quelconque.* Soient $k \geq 0$ et $P \in \mathbb{Z}_l^L[X]$ ($\mathbb{Z}_l$-module des polynômes de degré inférieur à L) de norme 1, *i.e.*, tel que

$$\text{si } P = \sum a_i X^i, \quad \text{alors} \quad \max_i \mid a_i \mid_l = 1.$$

Dans ce cas, en écrivant la division euclidienne $P = \Delta_k Q_{p_k} + R_{p_k}$ de P par Δ_k, on a

$$||\ \varphi_k(P)\ ||_l = ||\ R_{p_k}\ ||_l \leq 1,$$

car R_{p_k} est à coefficients l-entiers.

Le même résultat vaut pour $||\ \varphi_{-1}(P)\ ||_l$. Ainsi,

$$\forall\ k \in [\![-1, n-1]\!], \quad ||\ \varphi_k\ ||_l \leq 1.$$

4.5.2. *Raffinement pour $l = p_k$.* On considère comme précédemment k compris entre 0 et $n - 1$ et on prend cette fois $l = p_k$. Nous allons donner une majoration plus fine de $||\ \varphi_k\ ||_{p_k}$ en utilisant le fait que φ_k est défini sur les polynômes nuls en x à un ordre supérieur à T. Énonçons pour cela un lemme du type "petit théorème de Fermat".

Lemme 4.1. *Soient p un nombre premier, Δ_{-1} le polynôme minimal de x et Δ_p le polynôme minimal (supposé unitaire mais de degré éventuellement inférieur à celui de Δ_{-1}) de x^p. Alors, il existe un polynôme $A \in \mathbb{Z}[X]$ et un polynôme $R \in \mathbb{Z}^{\deg \Delta_p - 1}[X]$, tel que*

$$\Delta_{-1} = A\Delta_p + pR,$$

autrement dit, le reste de la division euclidienne de Δ_{-1} par Δ_p est divisible par p.

Démonstration. Démontrons tout d'abord le lemme dans le cas où Δ_p est de même degré que Δ_{-1}. Dans ce cas,

$$\Delta_{-1}(X) = \prod_{\sigma:\mathbb{Q}(x)\hookrightarrow\mathbb{C}} (X - \sigma(x)), \qquad \text{et} \qquad \Delta_p(X) = \prod_{\sigma:\mathbb{Q}(x)\hookrightarrow\mathbb{C}} (X - \sigma(x)^p).$$

Par division euclidienne dans $\mathbb{Z}[X]$ pour des polynômes unitaires, il existe $S \in \mathbb{Z}[X]$ de degré inférieur à $D-1$ tel que $\Delta_{-1} = \Delta_p + S$. Nous allons voir que S est en fait de la forme pR avec $R \in \mathbb{Z}[X]$. En notant x_i pour $i \in [\![1, D]\!]$ les images de x par tous les $\mathbb{Q}(x)$-plongements dans $\mathbb{C}$ et en notant $s_i(X_1, \ldots, X_D)$ la i-ième fonction symétrique élémentaire, on a dans $\mathbb{Z}[X]$

$$\Delta_p(X) = \Delta_{-1}(X) + \sum_{i=0}^{D-1} \left(s_{D-i}(x_1^p, \ldots, x_D^p) - s_{D-i}(x_1, \ldots, x_D)\right) X^i.$$

Ainsi, pour conclure, il reste à voir que

$$\forall i \in [\![0, D-1]\!], \quad s_{D-i}(x_1^p, \ldots, x_D^p) - s_{D-i}(x_1, \ldots, x_D) \in p\mathbb{Z}.$$

Or Δ_{-1} est à coefficients entiers, donc le nombre $s_{D-i}(x_1, \ldots, x_D)$ est dans $\mathbb{Z}$ et est donc congru à $A = (s_{D-i}(x_1, \ldots, x_D))^p$ modulo p par le petit théorème de Fermat. Ainsi, il suffit de voir que $s_{D-i}(x_1^p, \ldots, x_D^p)$ est congru à A modulo p. En développant A avec la formule du multinôme, nous obtenons

$$A = s_{D-i}(x_1^p, \ldots, x_D^p) + pf(x_1, \ldots, x_D),$$

où $f(X_1, \ldots, X_D)$ est un polynôme symétrique à coefficients entiers. Ainsi, il s'exprime comme un polynôme à coefficients entiers en les fonctions symétriques élémentaires et donc, comme $s_{D-i}(x_1^p, \ldots, x_D^p) \in \mathbb{Z}$, ceci montre que le nombre $f(x_1, \ldots, x_D)$ appartient à $\mathbb{Z}$, ce qui conclut la preuve dans le cas où $\deg \Delta_p = \deg \Delta_{-1}$.

Dans le cas général, notons $P = \prod_{\sigma:\mathbb{Q}(x)\hookrightarrow\mathbb{C}}(X - \sigma(x)^p)$. Il existe $A_1 \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $A_1\Delta_p = P$. Par le premier cas, on sait que $\Delta_{-1} = P + pR_P$, donc $\Delta_{-1} = A_1\Delta_p + pR_P$ et la division euclidienne de R_P par Δ_p permet de conclure. □

Corollaire 4.2. *Soient $k \neq -1$ et $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P = \Delta_{-1}^T Q$ avec $Q \in \mathbb{Z}[X]$. En notant P_{p_k} le reste de la division euclidienne de P par Δ_k, on a*

$$\exists R \in \mathbb{Z}[X] \quad \textit{tel que} \quad P_{p_k} = p^T R.$$

Démonstration. Par le lemme il existe un polynôme $B \in \mathbb{Z}[X]$ tel que

$$P = \Delta_{-1}^T Q = (A\Delta_k + pR)^T Q = B\Delta_k + p^T R^T Q.$$

La division euclidienne de $R^T Q$ par Δ_k donne la conclusion. □

Corollaire 4.3. *Soient $k \neq -1$ tel que $E_k \neq \{0\}$ et $P \in E_k \otimes \mathbb{Z}_l$ tel que $P = \Delta_{-1}^T Q$ avec $Q \in \mathbb{Z}_l[X]$. En notant P_{p_k} le reste de la division euclidienne par Δ_k, on a*

$$|| \varphi_k ||_{p_k} = \max_{||P||_{p_k}=1} || \varphi_k(P) ||_{p_k} = \max_{||P||_{p_k}=1} || P_{p_k} ||_{p_k} \leq p_k^{-T}.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le corollaire précédent. □

En injectant les estimations précédentes, l'inégalité des pentes peut se réécrire sous la forme

Proposition 4.4. *Avec les notations précédentes, pour tout entier N assez grand et dès que $D(T+n) > L \geq 2DT$, alors*

$$\frac{LT}{4}\log N \leq \sum_{k=-1}^{n-1} \log \|\ \bigwedge^{\max} \widetilde{\varphi_k}\ \|_{\mathbb{C}}\ .$$

Démonstration. En effet, si $E_k \neq 0$, alors $\sum_p \log \|\ \varphi_k\ \|_p \leq -T\log p_k \leq -\frac{T}{2}\log N$ et si $k=-1$, $\log \|\ \varphi_k\ \|_p \leq 0$. De plus, un processus téléscopique donne

$$\begin{aligned}-\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{rg}\,(E_k/E_{k+1})\,\frac{T}{2}\log N &\leq -\mathrm{rg}\ E_0\frac{T}{2}\log N \\ &\leq -(L+1-DT)\frac{T}{2}\log N \leq -\frac{LT}{4}\log N.\end{aligned}$$

Ainsi, en sommant sur $k \geq -1$, nous obtenons

$$\sum_{k=-1}^{n-1} \mathrm{rg}\,(E_k/E_{k+1})\left(\widehat{\mu}_{\max}(\overline{G_k}) + \sum_{p \text{ premiers}} \log \|\ \varphi_k\ \|_p\ \right) \leq -\frac{LT}{2}\log N.$$

L'inégalité des pentes (1) donne alors le résultat. □

5. Calcul d'un bon majorant de $\|\ \bigwedge^{\max}\widetilde{\varphi_k}\ \|_{\mathbb{C}}$

Nous allons maintenant nous attacher à donner une "bonne" majoration pour les normes complexes des opérateurs $\bigwedge^{\max}\widetilde{\varphi_k}$. Il faudrait *a priori* distinguer deux cas : $k=-1$ et $k\neq -1$. En fait ces deux cas peuvent se traiter simultanément, le cas $k=-1$ étant essentiellement une généralisation du cas $k\neq -1$. Dans la suite, on note $T_k = T$ si $k=-1$ et $T_k = 1$ sinon. De même, on note $N_k = 1$ si $k=-1$ et $N_k = N$ sinon. Enfin, k étant fixé et en posant $p_{-1}=1$, on note $\{\alpha_i\}_{1\leq i\leq D}$ l'ensemble des différentes racines de $\Delta_k^{T_k}$.

Proposition 5.1. *Avec les notations précédentes et en notant pour tout $k \geq -1$,*

$$C = \frac{1}{2}DT_k\log 2D + DT_k^2\log(L+T_k) + \frac{1}{2}DT_k\log(L+1) + \frac{1}{2}DT_k\log T_k,$$

on a

$$\log \|\ \bigwedge^{\max}\widetilde{\varphi_k}\ \|_{\mathbb{C}} \leq C + 2LT_kDN_kh(x).$$

La suite de cette partie est consacrée à la preuve de cette proposition.

5.1. Une petite réduction. Soit $k \geq -1$. Dans toute la suite, nous cherchons une majoration de la norme de

$$\bigwedge \widetilde{\varphi_k} : \bigwedge (E_k/E_{k+1}) \to \bigwedge G_k.$$

Considérons le carré commutatif

$$\begin{tikzcd} E_k \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{C}^L[X] \arrow[d, "\pi"] \\ E_k/E_{k+1} \arrow[r, "i"'] & \mathbb{C}^L[X]/(\Delta_k^{T_k}) \end{tikzcd}$$

Les deux flèches verticales sont co-isométriques et la flèche horizontale du haut est isométrique. Donc la flèche horizontale du bas l'est aussi. Dans la suite de cette partie, nous noterons donc (abusivement) $\widetilde{\varphi_k}$ le morphisme de $\mathbb{C}^L[X]/(\Delta_k^{T_k})$ dans G_k.

5.2. Preuve de la proposition 5.1. Le polynôme $\Delta_k^{T_k}$ est un polynôme scindé sur $\mathbb{C}$, toutes ses racines ayant multiplicité T_k. Ainsi $\Delta_k^{T_k}(X) = \prod_{i=1}^{D}(X-\alpha_i)^{T_k}$ où les α_i sont des complexes deux à deux distincts. Notons

$$\pi : \mathbb{C}^L[X] \twoheadrightarrow \mathbb{C}^L[X]/(\Delta_k^{T_k}), \quad \text{et} \quad \pi_i : \mathbb{C}^L[X] \twoheadrightarrow \mathbb{C}^L[X]/(X-\alpha_i)^{T_k},$$

pour tout entier i compris entre 1 et D, les projections canoniques. Nous définissons maintenant l'opérateur "restes Chinois"

$$\mathrm{Ch}_D : \mathbb{C}^L[X]/(\Delta_k^{T_k}) \to \prod_{i=1}^{D} \mathbb{C}^L[X]/(X-\alpha_i)^{T_k}$$

par la formule, $\mathrm{Ch}_D(\pi(P)) = (\pi_1(P), \ldots, \pi_D(P))$ pour tout $P \in \mathbb{C}^L[X]$. Nous définissons également l'opérateur d'évaluation en les $(\alpha_i)_{1\leq i\leq D}$,

$$\mathrm{Eval} : \prod_{i=1}^{D} \mathbb{C}^L[X]/(X-\alpha_i)^{T_k} \to \prod_{i=1}^{D} \mathbb{C}^{T_k}$$

qui envoie $(\pi_i(P_i))_{1\leq i\leq D}$ sur $((P_i(\alpha_i), \ldots, P_i^{(T_k-1)}(\alpha_i))_{1\leq i\leq D}$. Enfin, nous définissons l'isomorphisme "de Lagrange",

$$\mathrm{Lag}_D : \prod_{i=1}^{D} \mathbb{C}^{T_k} \to \mathbb{C}^{T_k D-1}[X],$$

qui à un DT_k-uplet $(x_1, \ldots, x_{T_k}, x_{T_k+1}, \ldots, x_{DT_k})$ associe l'unique polynôme R de degré inférieur à $DT_k - 1$ et tel que $R^{(k-1)}(\alpha_i) = x_{T_k(i-1)+k}$ pour tout

$i \in [\![1, D]\!]$ et tout $k \in [\![1, T_k]\!]$. On a alors le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^L[X]/(\Delta_k^{T_k}) \arrow[d, "\mathrm{Ch}_D"'] \arrow[rrd, bend left, "\widetilde{\varphi_k}"] & & \\
\prod_{i=1}^D E_i^{\mathrm{quot}} \arrow[r, "\simeq", "\mathrm{Eval}"'] & \prod_{i=1}^D \mathbb{C}^{T_k} \arrow[r, "\simeq", "\mathrm{Lag}_D"'] & \mathbb{C}^{T_kD-1}[X]
\end{tikzcd}$$

où $E_i^{\mathrm{quot}} = \mathbb{C}^L[X]/(X-\alpha_i)^{T_k}$ est muni de la métrique quotient de celle sur $\mathbb{C}^L[X]$ et où $\mathbb{C}$ est muni de la métrique hermitienne naturelle. Par ailleurs le produit est muni de la métrique somme directe

$$\forall (x_1, \dots, x_D, y_1, \dots, y_D) \qquad \langle (x_1, \dots, x_D), (y_1, \dots, y_D) \rangle := \sum_{i=1}^D \langle x_i, y_i \rangle_i.$$

Enfin les puissances extérieures maximales (D-ièmes) de tous ces fibrés sont munies de la métrique déterminant déjà définie.

5.2.1. *Majorant de* $|| \bigwedge \mathrm{Ch}_D ||$. Une majoration grossière nous suffira ici.

Lemme 5.2. $\log || \bigwedge \mathrm{Ch}_D || \leq \frac{1}{2} dT_k \log D$.

Démonstration. C'est une conséquence de l'inégalité $|| \ \mathrm{Ch}_D \ ||^{DT_k} \geq || \bigwedge \mathrm{Ch}_D ||$. Par définition Ch_D n'est autre que l'application définie pour tout $P \in \mathbb{C}^L[X]$ par $\mathrm{Ch}_D(\pi(P)) = (\pi_1(P), \dots, \pi_D(P))$. En notant $|| \cdot ||_i$ la norme sur l'espace E_i^{quot} et $|| \cdot ||_2$ celle sur $\mathbb{C}^L[X]$, on a

$$\begin{aligned}
\forall P \in \mathbb{C}^L[X] \quad || \ \mathrm{Ch}_D(\pi(P)) \ ||^2 &= \sum_{i=1}^D || \ \pi_i(P) \ ||_i^2 = \sum_{i=1}^D \inf_{\pi_i(Q)=0} || \ P+Q \ ||_2^2 \\
&\leq \sum_{i=1}^D \inf_{\pi(Q)=0} || \ P+Q \ ||_2^2 \leq D \ || \ \pi(P) \ ||^2 .
\end{aligned}$$

La majoration voulue suit en passant à la racine carrée puis au log. $\square$

5.2.2. *Majorant* $|| \bigwedge \mathrm{Lag}_D ||$.

Lemme 5.3. $\log || \bigwedge \mathrm{Lag}_D || \leq 0$.

Démonstration. L'opérateur $\bigwedge \mathrm{Lag}_D$ est une application linéaire entre $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension 1. En particulier, si g_D est l'isomorphisme réciproque de Lag_D et si $(\wedge_{i=1}^{T_k} R_i) \wedge \dots \wedge (\wedge_{i=1}^{T_k} R_{T_k(D-1)+i})$ est non nul dans $\bigwedge^{T_kD} \mathbb{C}^{T_kD-1}[X]$, on a

$$|| \bigwedge \mathrm{Lag}_D || = || \bigwedge g_D ||^{-1} = \frac{|| \ (\wedge_{i=1}^{T_k} R_i) \wedge \dots \wedge (\wedge_{i=1}^{T_k} R_{T_k(D-1)+i}) \ ||}{|| \ (\wedge_{i=1}^{T_k} g_D(R_i)) \wedge \dots \wedge (\wedge_{i=1}^{T_k} g_D(R_{T_k(D-1)+i})) \ ||}.$$

Prenons par exemple pour tout i entier dans $[\![1, DT_k]\!]$, $R_i = X^{i-1}$. On obtient ainsi une base orthonormée de $\mathbb{C}^{T_k D-1}[X]$, donc

$$|| \bigwedge \mathrm{Lag}_D ||=|| (\wedge_{i=1}^{T_k} g_D(R_i)) \wedge \ldots \wedge (\wedge_{i=1}^{T_k} g_D(R_{T_k(D-1)+i})) ||^{-1}.$$

En notant $[\ \cdot\ ]$ la partie entière on en déduit que

$$|| \bigwedge \mathrm{Lag}_D ||^{-1}= \left|\det\left(\left(\alpha^{j-1}_{\left[\frac{i-1}{T_k}\right]+1}\right)_{1\leq i,j\leq DT_k}\right)\right|^2.$$

Or $\det\left(\left(\alpha^{j-1}_{\left[\frac{i-1}{T_k}\right]+1}\right)_{1\leq i,j\leq DT_k}\right)$ est une expression polynômiale symétrique en les α_i à coefficients entiers. Elle peut donc s'écrire comme une expression polynômiale à coefficients entiers, en les fonctions symétriques élémentaires en les α_i. Or les α_i sont les racines d'un polynôme unitaire à coefficients entiers. Par conséquent en prenant le carré du module on obtient un nombre entier positif, non nul car provenant d'une base. Un passage au log permet de conclure. □

5.2.3. *Majorant de* $|| \bigwedge \mathrm{Eval} ||$. Notons $\mathrm{Eval}_i : E_i^{\mathrm{quot}} \to \mathbb{C}^{T_k}$ l'application définie par

$$\mathrm{Eval}_i(\pi_i(P)) = (P^{(k-1)}(\alpha_i))_{1\leq k\leq T_k}.$$

Comme le morphisme Eval est le morphisme diagonal

$$\mathrm{diag}(\bigwedge^{T_k} \mathrm{Eval}_1, \ldots, \bigwedge^{T_k} \mathrm{Eval}_D),$$

le résultat suivant est vrai :

Lemme 5.4. *On a l'égalité de normes*

$$|| \bigwedge \mathrm{Eval} ||= \prod_{i=1}^{D} || \bigwedge^{T_k} \mathrm{Eval}_i ||.$$

Démonstration. Rappelons que la métrique sur le produit tensoriel $E \otimes F$ de deux fibrés hermitiens est définie par

$$\langle x \otimes y, z \otimes t\rangle = \langle x, z\rangle_E \cdot \langle y, t\rangle_F.$$

Avec cette définition, on a l'isomorphisme isométrique

$$\bigwedge_{k=1}^{DT_k}\left(\bigoplus_{i=1}^{D} E_i\right) \simeq \bigotimes_{k=1}^{D}\left(\bigwedge_{i=1}^{T_k} E_i\right),$$

valable pour tout espace hermitien E_i de rang T_k. □

Désormais nous écrirons $\bigwedge$ pour $\bigwedge^{T_k}$. Il reste à calculer la norme de $\bigwedge \mathrm{Eval}_i$ pour tout $i \in [\![1, D]\!]$. Soit donc un tel $i \geq 1$. L'application $\bigwedge \mathrm{Eval}_i$ est un morphisme entre espaces vectoriels de dimension 1, donc

$$\forall g_1 \wedge \ldots \wedge g_{T_k} \in \bigwedge E_i^{\mathrm{quot}} \backslash \{0\},\ || \bigwedge \mathrm{Eval}_i ||= \frac{|| \mathrm{Eval}_i(g_1) \wedge \ldots \wedge \mathrm{Eval}_i(g_{T_k}) ||}{|| g_1 \wedge \ldots \wedge g_{T_k} ||}.$$

Par ailleurs, la norme quotient sur E_i est, par définition, la norme qui rend isométrique l'isomorphisme entre E_i et l'orthogonal $\left((X-\alpha_i)^{T_k}\right)_L^{\perp}$, pour la norme hermitienne standard, de $(X-\alpha_i)^{T_k}$ dans $\mathbb{C}^L[X]$.

Lemme 5.5. *La famille de polynômes*

$$\left\{ g_l = \sum_{v=0}^{L} \binom{v+l}{v} \overline{\alpha_i}^v X^v \right\}_{0 \leq l \leq T_k - 1}$$

constitue une base de $\left((X-\alpha_i)^{T_k}\right)_L^{\perp}$.

Démonstration. Il y a deux choses à voir : tout d'abord que les g_l sont effectivement dans l'orthogonal de $(X-\alpha_i)^{T_k}$ et ensuite que ces T_k éléments forment une famille libre.

Soit $l \in [\![0, T_k - 1]\!]$. Dire que $g_l \in \left((X-\alpha_i)^{T_k}\right)_L^{\perp}$ équivaut à dire que pour tout $u \in [\![0, L - T_k]\!]$

$$g_l \perp (X-\alpha_i)^{T_k} X^u \qquad \text{condition } (\star_{u,l}).$$

Ceci étant dit, un simple calcul permet de conclure :

$$\begin{aligned}
(\star_{u,l}) &\iff \sum_{v=0}^{T_k} (-1)^{T_k - v} \frac{(v+u+l)!}{(v+u)!} \binom{T_k}{v} \overline{\alpha_i}^{v+u} \overline{\alpha_i}^{T_k - v} = 0 \\
&\iff \overline{\alpha_i}^{u+T_k} \sum_{v=0}^{T_k} (-1)^{T_k - v} \frac{(v+u+l)!}{(v+u)!} \binom{T_k}{v} = 0 \\
&\iff \sum_{v=0}^{T_k} \binom{T_k}{v} (-1)^{T_k - v} (v+u+l) \times \ldots \times (v+u+1) = 0.
\end{aligned}$$

Soit $f_{u,l}(x) = x^{u+l} \sum_{v=0}^{T_k} \binom{T_k}{v} (-1)^{T_k - v} x^v = x^{u+l}(x-1)^{T_k}$. Alors 1 est racine de $f_{u,l}$ d'ordre T_k et la condition $(\star_{u,l})$ équivaut à dire que $f_{u,l}^{(l)}(1) = 0$. Donc $(\star_{u,l})$ est vraie ce qui prouve que les g_l sont dans l'orthogonal.

Il reste à voir que la famille $\{g_l\}_{0 \leq l \leq T_k - 1}$ est une famille libre. Pour cela, on écrit dans la base canonique la matrice M dont le l-ieme vecteur colonne est formé par g_l. Il suffit de montrer que M admet une matrice carrée de taille $T_k \times T_k$ dont le déterminant est non nul. Or $M =$

$\left(\binom{v+l}{v}\overline{\alpha_i}^v\right)_{\substack{0\leq v\leq L\\ 0\leq l\leq T_k-1}}$. Montrons que la matrice $A=\left(\binom{v+l}{v}\overline{\alpha_i}^v\right)_{0\leq v,l\leq T_k-1}$ est inversible. En factorisant la v-ieme ligne par $\overline{\alpha_i}^v$ pour tout v dans $[\![0,T_k-1]\!]$, on en conclut que A est inversible si et seulement si $B=\left(\binom{v+l}{v}\right)_{0\leq v,l\leq T_k-1}$ l'est. Or c'est un exercice de voir que $\det B=1\neq 0$. (on remplace la ligne L_{v+1} par $L_{v+1}-L_v$ en commençant par la dernière ligne et en utilisant la formule

$$\binom{v+1+l}{l}-\binom{v+l}{l}=\binom{v+l}{l-1}.$$

Un développement selon la première colonne permet de se ramener au déterminant de $C=\left(\binom{v+l}{l-1}\right)_{1\leq v,l\leq T_k-1}$. On itère ceci jusqu'à aboutir au déterminant de la matrice

$$\left(\binom{v+l}{l-(T_k-1)}\right)_{T_k-1\leq v,l\leq T_k-1}$$

qui vaut 1). Ceci conclut. $\square$

Lemme 5.6. *La fonction* $\bigwedge \mathrm{Eval}_i$ *vérifie*

$$\|\bigwedge \mathrm{Eval}_i\|^2\leq\frac{(L+T_k)^{2T_k^2}T_k^{T_k}(L+1)^{T_k}\max\{1,|\alpha_i|\}^{4LT_k}}{\|g_0\wedge\ldots\wedge g_{T_k-1}\|^2_{\mathrm{quot}}}.$$

Démonstration. Il suffit de majorer $|\det A_i|$, où

$$A_i=\left(\sum_{s=0}^{T_k-1}g_u^{(s)}(\alpha_i)\overline{g_v^{(s)}(\alpha_i)}\right)_{0\leq u,v\leq T_k-1}.$$

Comme $A_i=(a_{uv})$ est une matrice hermitienne définie positive, on a

$$|\det A_i|\leq\prod_{u=0}^{T_k-1}a_{uu}.$$

En remplaçant ceci par les valeurs explicites de a_{uu}, on obtient

$$\begin{aligned}|\det A_i|&\leq\prod_{u=0}^{T_k-1}\sum_{s=0}^{T_k-1}g_u^{(s)}(\alpha_i)\overline{g_u^{(s)}(\alpha_i)}\\&\leq\prod_{u=0}^{T_k-1}\sum_{s=0}^{T_k-1}\left|g_u^{(s)}(\alpha_i)\right|^2.\end{aligned}$$

Or

$$|g_u^{(s)}(\alpha_i)|^2\leq\left(\sum_{r=s}^{L}\frac{(r+u)\times\ldots\times(u+1)}{(r-s)!}|\alpha_i^{2r-s}|\right)^2. \tag{2}$$

Finalement, il reste à majorer convenablement le produit de factorielles. Pour cela il faut distinguer deux cas :

si $r > T_k$, alors

$$\begin{aligned}\frac{(r+u)\times\ldots\times(u+1)}{(r-s)!} &\leq \frac{(r+T_k)\times\ldots\times(T_k+1)}{(r-T_k)!}\\ &\leq \frac{(r+T_k)\times\ldots\times(T_k+1)}{(r-T_k)\times\cdots\times(T_k+1)}\\ &\leq (r+T_k)\times\ldots\times(r+1-T_k)\\ &\leq (L+T_k)^{T_k}.\end{aligned}$$

si $s \leq r \leq T_k$, alors

$$\begin{aligned}\frac{(r+u)\times\ldots\times(u+1)}{(r-s)!} &\leq (r+T_k)\times\ldots\times(T_k+1)\\ &\leq (r+T_k)^r \leq (L+T_k)^{T_k}.\end{aligned}$$

Dans tous les cas, la majoration suivante est vraie :

$$\frac{(r+u)\times\ldots\times(u+1)}{(r-s)!} \leq (L+T_k)^{T_k}.$$

En injectant ceci dans la majoration (2), on en déduit

$$\begin{aligned}|g_u^{(s)}(\alpha_i)|^2 &\leq (L+T_k)^{2T_k}\left(\sum_{r=0}^{L}|\alpha_i^{2r-s}|\right)^2\\ &\leq (L+T_k)^{2T_k}(L+1)\max\{1,|\alpha_i|\}^{4L-2s}\\ &\leq (L+T_k)^{2T_k}(L+1)\max\{1,|\alpha_i|\}^{4L}\end{aligned}$$

Ainsi en reprenant la majoration de $|\det A_i|$ nous obtenons

$$|\det A_i| \leq \left((L+T_k)^{2T_k}T_k(L+1)\right)^{T_k}\max\{1,|\alpha_i|\}^{4LT_k}. \tag{3}$$

Il suffit de diviser par $||\, g_0\wedge\ldots\wedge g_{T_k-1}\,||^2_{\text{quot}}$ pour conclure. □

La proposition 5.1 en découle : en regroupant les lemmes 5.2 5.3 et 5.6, on obtient la majoration

$$\begin{aligned}\log ||\bigwedge \mathrm{Eval}\,|| &\leq 2LT_k\log\prod_{i=1}^{D}\max\{1,|\alpha_i|\}+\frac{1}{2}DT_k\log D\\ &+D{T_k}^2\log(L+T_k)+\frac{1}{2}DT_k\log(L+1)+\frac{1}{2}DT_k\log T_k\\ &-\frac{1}{2}\log\left|\prod_{i=1}^{D}\det B_i\right|\end{aligned}$$

où

$$B_i = \left(\sum_{s=0}^{L} \binom{s+u}{s} \binom{s+v}{s} |\alpha_i|^{2s} \overline{\alpha_i}^u \alpha_i^v \right)_{0 \leq u,v \leq T_k - 1}.$$

Or l'expression qui est dans le dernier produit du membre de droite de cette majoration est une expression polynomiale symétrique en les α_i, à coefficients entiers. On sait de plus que $\det B_i \neq 0$. Tout comme dans la preuve du lemme 5.3, nous en déduisons donc la minoration

$$\left| \prod_{i=1}^{D} \det B_i \right| \geq 1.$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que $\log \prod_{i=1}^{D} \max\{1, |\alpha_i|\} = Dh(x^{p_k}) \leq DN_k h(x)$.

6. Conclusion

Finalement avec les notations précédentes, nous obtenons

Théorème 6.1. *Pour tout D, T et N assez grand, ainsi que pour tout L vérifiant l'inégalité $D\,(T+n) > L \geq 2DT$, on a*

$$4LnNDh(x) \geq \frac{LT}{4} \log N - \frac{7}{2} nD \log(L+1) - DT^2 \log(L+T).$$

Démonstration. Il suffit de mettre bout à bout l'inégalité des pentes (proposition 4.4) ainsi que la proposition 5.1 appliquée pour tous les $k \in [\![-1, n-1]\!]$. De manière plus détaillée :

$$\frac{1}{4} LT \log N \leq L_1 + L_2$$

où

$$L_1 = \frac{DT \log 2D}{2} + DT^2 \log(L+T) + \frac{DT \log(L+1)}{2} + \frac{DT \log T}{2} + 2LDTh(x)$$

et

$$L_2 = \frac{1}{2} Dn \log 2D + Dn \log(L+1) + \frac{1}{2} Dn \log(L+1) + \frac{1}{2} LDnNh(x).$$

Le facteur L_1 provient du cas $k = -1$ et le facteur L_2 du groupement des termes pour $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. Réordonnant et regroupant les termes $L_1 + L_2$ on obtient pour ce second membre l'inégalité

$$\begin{aligned} L_1 + L_2 \leq & \frac{1}{2} D(T+n) \log 2D + DT^2 \log(L+T) \\ & + \frac{1}{2} D(T+3n) \log(L+1) + \frac{1}{2} DT \log T + 2LD(T+nN)h(x). \end{aligned}$$

Par ailleurs, l'inégalité de l'hypothèse du théorème nous indique que $L+1 \geq 2DT \geq \max\{2D, T\}$ et que $Nn \geq n \geq T$. Après regroupement on peut donc simplifier le terme $L_1 + L_2$ précédent en le terme suivant :

$$(4) \qquad L_1 + L_2 \leq \frac{7}{2} Dn \log(L+1) + DT^2 \log(L+T) + 4LDnNh(x).$$

On réinjecte ce dernier terme dans l'inégalité de départ pour conclure. □

Voyons maintenant comment déduire du résultat précédent le théorème 1.2. Il s'agit de choisir convenablement les valeurs des paramètres. En notant $[\,\cdot\,]$ la partie entière, on pose

$$\alpha = 240, \quad L = D\left[\frac{N}{4\log N}\right], \quad T = \left[\frac{\alpha \log 2D}{\log\log 3D}\right] \quad N = \left[\frac{17 \cdot \alpha (\log 2D)^2}{\log\log 3D}\right].$$

Par ailleurs on rappelle que par définition n est le nombre de nombres premiers compris entre $\frac{N}{2}$ et N. Donc pour N suffisamment grand (ce que nous pouvons toujours supposer, quitte à modifier la constante c du théorème) on a $Dn \geq \frac{D}{4}\frac{N}{\log N} \geq L$.

Avec ce choix de paramètres nous sommes dans les conditions d'applications du théorème 1.2 précédent et en particulier

$$\log\log 3D \leq \frac{3}{2}\log\log 2D \leq \log N \text{ et } n \leq \frac{1}{4}\frac{N}{\log\log 3D}.$$

Avec ces valeurs le théorème précédent nous donne bien le résultat, à savoir le théorème 1.2. En effet,

$$\begin{aligned} 4LNnDh(x) &\leq D \cdot \left(\frac{17^3 \cdot \alpha^3 (\log 2D)^6}{4(\log\log 3D)^5}\right) Dh(x) \\ &\leq \frac{17^3\alpha^3}{4} \cdot D^2 \frac{(\log 2D)^6}{(\log\log 3D)^5} h(x). \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} 4LNnDh(x) &\geq \frac{LT}{4}\log N - \frac{7}{2} nD \log(L+1) - DT^2 \log(L+T) \\ &\geq D\frac{(\log 2D)^3}{(\log\log 3D)^2}\left(\left(\frac{\alpha^2 \cdot 17}{4 \cdot 4} - 1\right) - \frac{7}{2} \cdot \frac{17 \cdot \alpha}{4} - \alpha^2\right) \end{aligned}$$

Pour que le terme constant dans le membre de droite soit strictement positif il faut que

$$\frac{\alpha^2}{16} > 1 + \frac{7}{8} \cdot 17 \cdot \alpha.$$

La valeur $\alpha = 240$ nous assure que ceci est vrai. On conclut alors en mettant ensemble les deux inégalités concernant $4LNnDh(x)$. □

Il serait intéressant d'essayer d'adapter la preuve du théorème de Laurent [5] dans ce langage. L'idée est que l'inégalité des pentes permet de mieux exploiter la géométrie des objets avec lesquels on travaille. Ceci serait probablement d'autant plus flagrant dans le cas d'une courbe elliptique E, où le formalisme des pentes devrait permettre d'incorporer directement l'inégalité sur la hauteur de Néron-Tate, sans avoir à passer par l'artifice consistant à plonger E dans $E \times E$ et à considérer un "gros" multiple du point considéré en vue de minimiser la différence entre hauteur de Néron-Tate et hauteur de Weil.

Bibliographie

[1] F. Amoroso, S. David, *Le problème de Lehmer en dimension supérieure.* J. reine angew. Math. **513** (1999), pages 145–179.

[2] J.-B. Bost, *Périodes et isogénies des variétés abéliennes sur les corps de nombres (d'après* D. M*asser et* G. W*üstholz).* Séminaire Bourbaki **237**, pages 115–161. Astérisque, 1996.

[3] J.-B. Bost, *Algebraic leaves of algebraic foliations over number fields.* Publications mathématiques de l'IHÉS **93** (2001), pages 161–221.

[4] E. Dobrowolski *On a question of Lehmer and the number of irreductible factors of a polynomial.* Acta Arith. **34** (1979), pages 391–401.

[5] M. Laurent, *Minoration de la hauteur de* N*éron-*T*ate.* In M.-J. Bertin, editor, Séminaire de théorie des nombres de Paris **38** (1981-1982), pages 137–152. Progr. Math., 1983.

[6] A. Schinzel, *On the product of the conjugates outside the unit circle of an algebraic number.* Acta Arith. **24** (1973), pages 385–399.

[7] C.J. Smyth, *On the product of conjugates outside the unit circle of an algebraic integer.* Bulletin of the London Math. Soc. **3** (1971), pages 169–175.

[8] P. Voutier, *An effective lower bound for the height of algebraic numbers.* Acta Arith. **74(1)** (1996), pages 81–95.

Nicolas RATAZZI
Université Paris-Sud XI
Mathématiques, Bâtiment 425
91405 Orsay Cedex, France
E-mail : nicolas.ratazzi@math.u-psud.fr