Poznámka k problému ruinování hráčů.

Napsal dr. **K. Vorovka.**

Huygens ve svém díle *De ratiociniis in ludo aleae* uvádí ke konci pět úloh, jichž rozřešení podal Jakub Bernoulli v památné knize *Ars conjectandi*. Poslední z úloh těch jest zároveň jednoduchým případem problému známého pod jménem „trvání hry“ aneb „ruinování hráčů“.

Hrají-li spolu dva hráči A a B s pravděpodobností výhry v jednotlivé hře p a q, a jsou-li známy jejich sázky a a b, jakož i kapitály x a y, pak zajímavy jsou hlavně dvě otázky: Předně možno počítati pravděpodobnost, že A bude ruinován při hře, která se může v neomezeném počtu opakovati, dokud jeden z obou hráčů nepřijde o všechen majetek. Za druhé možno se ptáti, jaká je pravděpodobnost, že hráč A bude ruinován průběhem určitého konečného počtu her.

Zabývati se budeme případem prvním.

Jelikož oba během hry proměnlivé kapitály hráčů doplňují se na stálou summu s, můžeme na základě rovnice $x + y = s$ považovati pravděpodobnost zruinování kteréhokoliv hráče za funkci jediné proměnné x neb y dle libosti.

Budiž tedy pravděpodobnost ruiny pro hráče A vyjádřena neznámou funkcí $u(x)$, pro hráče B funkcí $v(x)$.

J. Bernoulli vypočítal tyto funkce ve zvláštním případu úlohy Huygensovy, která předpokládá sázku jedna proti jedné, a verifikoval pak dodatečně výpočtem, že identicky splňuje se rovnice

$$u(x) + v(x) = 1,$$

vyjadřující patrně *jistotu*, že při neomezeném trvání hry jeden neb druhý hráč bude ruinován.

Jak Todhunter*) uvádí, dal se tento výsledek očekávati, neboť prostý rozum tomu nasvědčuje.

Tuto zásadu *bez důkazu* přijal také De Moivre do svého pojednání *De Mensura Sortis* (probl. IX.) a do své knihy *The*

---

*) Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, str. 63

Doctrine of Chances (probl. VII.). Todhunter*) vytýká, že řešení, které podal De Moivre, nebylo úplné. De Moivre našel totiž napřed duchaplným způsobem poměr pravděpodobností obou hráčů a pak bez důkazu přijal za jisto, že během neomezeně dlouhé řady her jeden z obou hráčů musí býti ruinován. Mohl pak ovšem ihned odvoditi také absolutní hodnoty obou pravděpodobností.

Laplace ve svém klassickém díle podává podrobný rozbor problému trvání hry zabývaje se hlavně jeho těžší druhou částí, když počet hraných partií jest konečný. Ale tu okolnost, že jeden nebo druhý hráč při neomezeném trvání hry jistě bude ruinován, pomíjí mlčením.

Poincaré**) ve svém díle o pravděpodobnosti uvádí jen jednoduchý výpočet Bernoulliův, akcentuje však, že *a priori* nebyla vyloučena možnost, aby se hra prodloužila do nekonečna při stálém vyrovnávání zisků a ztrát.

Skutečný obecný důkaz, že jeden nebo druhý hráč jistě bude ruinován, našel jsem jen v knize Bertrandově***). Důkaz ten jest veden pouze slovy bez výpočtů, ačkoliv tím ničeho neztrácí na svojí exaktnosti.

Obsahuje asi následující úvahu: Je-li počet her značný, pak i ta pravděnejpodobnější kombinace má pravděpodobnost *velmi malou,* která dle Stirlingovy formule jest nepřímo úměrna druhé odmocnině z celkového počtu her. Totéž bude tím spíše platiti o každé jiné kombinaci aneb i o každé konečné skupině kombinací, pokud ovšem počet kombinací ve skupině obsažených nebude zároveň s počtem her do nekonečna vzrůstati. Při určitém počtu všech partií smí však počet partií jedním hráčem vyhraných jen v takových mezích kolísati, aby ani jeden ani druhý hráč neztráceli více, než co jejich původní majetek obnáší. Difference mezi oběma těmito mezemi jest stálá a od celkového počtu her zcela nezávislá. Roste-li tedy celkový počet her do nekonečna, klesá pravděpodobnost omezeného počtu kombinací pod každou mez. Jinými slovy: Jeden z obou hráčů jistě bude při neomezeném trvání hry ruinován.

*) Tamtéž str. 147.

**) Poincaré, Calcul des probabilités, str. 48.

***) Bertrand, Calcul des probabilités, str. 105.

Při tomto důkazu lze pouze namítati, že dokazuje více, nežli je třeba; neboť týká se takového způsobu hry, kdy by teprve konečná bilance o ruinování hráče rozhodovala, kdežto ve skutečnosti hráč může býti několika prvními po sobě prohranými partiemi ruinován.

Domnívám se, že k povaze úlohy lépe přiléhá důkaz následující, založený na lineárné rovnici s konečnými differencemi

$$u(x) = pu(x+b) + qu(x-a), \tag{1}$$

která snadno se odvodí ze zásad pravděpodobnosti složité. Rovnice tato jest řádu m-tého, kdež jest $m = a + b$, a integruje se analogicky jako lineárné rovnice differenciální s konstantními koefficienty. Položíme zde $u(x) = \alpha^x$ a obdržíme obecný integrál

$$u(x) = C_1\alpha_1^x + C_2\alpha_2^x + \ldots + C_m\alpha_m^x,$$

v němž $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ značí kořeny rovnice

$$p\alpha^{a+b} - \alpha^a + q = 0. \tag{2}$$

Rovnice tato vždy má jednotkový kořen $\alpha_1 = 1$, protože jest $p + q = 1$. Kořen tento může však také býti dvojnásobným. Stane se to tenkráte, je-li hra spravedlivá, t. j. jsou-li sázky v poměru pravděpodobností

$$a : b = p : q.$$

Jiných násobných kořenů není.

Obecný integrál může tedy míti podobu buď při hře nespravedlivé

$$u(x) = C_1 + C_2\alpha_2^x + C_3\alpha_3^x + \ldots + C_m\alpha_m^x$$

aneb při hře spravedlivé

$$u(x) = C_1 + C_2 x + C_3\alpha_3^x + \ldots + C_m\alpha_m^x.$$

Bertrand z těchto integrálů podržuje pouze první dva členy a stačí mu tedy k stanovení libovolných konstant dvě podmínky

$$u(o) = 1 \quad \text{a} \quad u(s) = 0,$$

značící jistotu resp. nemožnost ruiny.

Postup Bertrandův není ovšem zcela přesný, jak vytkl A. Markov *). Dlužno však podotknouti, že Bertrand upozorňuje čtenáře na odchylky, které by od jeho vzorců nastaly, kdyby hráč nepřišel sice o všechno jmění, ale neměl ani obnos ku sázce postačující.

Pracujeme-li s úplným integrálem, musíme přibrati ku stanovení všech m konstant ještě další $m - 2$ podmínky. Tyto mohou dle konvencí hry býti dvojí. Buď ve smyslu poznámky Bertrandovy považuje se hráč za ruinovaného, jakmile zbytek jeho jmění jest menší než sázka, aneb připouští se i pak ještě ku hře a za ruinovaného platí teprve, když se další prohrou zadlužil.

V prvém případě jsou celkové podmínky

$$\begin{aligned} u(o) &= 1, \ u(1) = 1, \ldots u(a-1) = 1, \\ u(s) &= 0, \ u(s-1) = 0, \ldots u(s-b+1) = 0; \end{aligned} \tag{3}$$

v druhém případě pak

$$\begin{aligned} u(o) &= 1, \ u(-1) = 1, \ldots u(-a+1) = 1, \\ u(s) &= 0, \ u(s+1) = 0, \ldots u(s+b-1) = 0. \end{aligned}$$

Pro další vývody jest lhostejno, kterých podmínek se přidržíme. Zvolme tedy právě jako Markov podmínky první. Ovšem výpočet kořenů rovnice (2) byl by obtížný a proto jest žádoucno, aby se raději jinou cestou nalezla přibližná hodnota místo přesného výrazu pro funkci $u(x)$, a to jest právě předmětem článku, jejž uveřejnil Markov.

Za to však lze výrazu přesného použíti ku provedení důkazu o jistotě ruiny.

Vypočítejme jako pro hráče A též pravděpodobnost ruiny pro hráče B. Analogicky budeme míti ku stanovení funkce $v(x)$ rovnici

$$v(x) = pv(x+b) + qv(x-a), \tag{4}$$

která je s rovnicí pro $u(x)$ zcela totožna. I její integrál bude míti stejnou podobu, buď

$$v(x) = D_1 + D_2\alpha_2^x + D_3\alpha_3^x + \ldots + D_m\alpha_m^x$$

*) Bulletin de la Société phys.-math. de Kasan, 1903.

aneb

$$v(x) = D_1 + D_2 x + D_3 \alpha_3^x + \ldots + D_m \alpha_m^x.$$

Pouze konstanty $D_1, D_2, \ldots D_m$ budou stanoveny jinými podmínkami, totiž

$$\begin{aligned} v(o) &= 0, \; v(1) = 0, \ldots v(a-1) = 0, \\ v(s) &= 1, \; v(s-1) = 1, \ldots v(s-b+1) = 1. \end{aligned} \tag{5}$$

Jelikož obě rovnice pro $u(x)$ a $v(x)$ jsou co do tvaru totožny, můžeme sečtením jich obdržeti rovnici pro novou funkci

$$f(x) = u(x) + v(x),$$

udávající patrně, jaká jest pravděpodobnost, že buď jeden aneb druhý hráč bude ruinován. Pro tuto funkci pak máme opět rovnici

$$f(x) = pf(x+b) + qf(x-a), \tag{6}$$

jejímž obecným integrálem bude buď

$$f(x) = E_1 + E_2 \alpha_2^x + E_3 \alpha_3^x + \ldots + E_m \alpha_m^x$$

aneb

$$f(x) = E_1 + E_2 x + E_3 \alpha_3^x + \ldots + E_m \alpha_m^x.$$

Podmínky k stanovení konstant vyplývají střídavým sečítáním podmínek (3) a (5) pro $u(x)$ a $v(x)$. Jsou to tedy podmínky následující:

$$\begin{aligned} f(o) &= 1, \; f(1) = 1, \ldots f(a-1) = 1, \\ f(s) &= 1, \; f(s-1) = 1, \ldots f(s-b+1) = 1. \end{aligned} \tag{7}$$

Předpokládejme tedy na př. spravedlivou hru a přikročme ku řešení příslušného systému lineárních rovnic

$$\begin{aligned}
1 &= E_1 + 0 + E_3 + \ldots + E_m \\
1 &= E_1 + E_2 + E_3 \alpha_3 + \ldots + E_m \alpha_m \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
1 &= E_1 + E_2(a-1) + E_3 \alpha_3^{a-1} + \ldots + E_m \alpha_m^{a-1} \\
1 &= E_1 + E_2 s + E_3 \alpha_3^s + \ldots + E_m \alpha_m^s \\
1 &= E_1 + E_2(s-1) + E_3 \alpha_3^{s-1} + \ldots + E_m \alpha_m^{s-1} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
1 &= E_1 + E_2(s-b+1) + E_3 \alpha_3^{s-b+1} + \ldots + E_m \alpha_m^{s+b-1}.
\end{aligned}$$

Protože determinant této soustavy obsahuje v prvním sloupci samé jednotky, vyjde patrně $E_1 = 1$, kdežto

$$E_2 = E_3 = \ldots = E_m = 0$$

a tudíž identicky

$$f(x) = 1.$$

Odsud však vyplývá, že také rovnice

$$u(x) + v(x) = 1$$

jest splněna identicky a že tedy průběhem neomezeně dlouhé hry jeden z obou hráčů *jistě bude ruinován.*

Podstatu tohoto důkazu tvoří ta okolnost, že rovnice pro α má vždy jeden kořen jednotkový. Důkaz vedl by se obdobně, když by hra nebyla spravedlivá aneb když by hráč teprve při zadlužení považován byl za ruinovaného.

Příspěvek k differenciální geometrii jednodílného hyperboloidu.

Napsal **Bohuslav Hostinský.**

Zvolme na jednodílném hyperboloidu libovolnou povrchovou přímku p, na ní bod α, a sestrojme křivku t, která prochází bodem α a protíná orthogonálně všechny povrchové přímky soustavy Σ, do níž náleží p. Trajektorie t jest transcendentní křivka, která protíná p v nekonečně mnoha bodech; označíme je, jak na p jeden po druhém následují, když se v určitém směru pohybujeme po t vycházejíce z bodu α, písmenami

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta\ \ldots$$

Budiž α' libovolný bod na p mezi α a β. Bodem α' prochází jistá orthogonální trajektorie t' soustavy Σ; nejbližší její průsek s p označme písmenou β'.

Dle známé věty o orthogonálních trajektoriích povrchových přímek*) jest

$$\overline{\alpha\alpha'} = \overline{\beta\beta'},\ \overline{\alpha'\beta} = \overline{\beta'\gamma}$$

a proto též

$$\overline{\alpha\beta} = \overline{\beta\gamma} = \overline{\gamma\delta} = \ldots = l.$$

---

*) Viz na př. *Scheffers*: Einführung in die Theorie der Flächen (1902) p. 217.