The Electronic Journal of Linear Algebra ISSN 1081-3810
A publication of the International Linear Algebra Society
Volume 9, pp. 171-189, September 2002

ELA
http://math.technion.ac.il/iic/ela

DEUX MODELES POUR LES OPERATEURS DE CONTRACTION*

BERRABAH BENDOUKHA†

Abstract. In this work, we propose two models for contractions defined in finite dimensional Hilbert spaces. These models called matricial and universal, respectively, are constructed using the spectra and allow one to find all the contractions studied up to unitary equivalence.

Résumé. Dans ce travail, nous proposons deux modèles d'opérateurs pour de larges classes de contractions définies dans des espaces de Hilbert de dimension finie. Ces modèles respectivement appelés matriciel et universel s'expriment à l'aide du spectre et permettent de retrouver toutes les contractions étudiées à une équivalence unitaire près.

Key words. Contraction simple, Unitairement équivalent, Noeud unitaire, Modèle matriciel, Modèle universel.

AMS subject classifications. 47A45, 15A21

1. Introduction. On appelle modèle d'un opérateur linéaire A tout opérateur linéaire B tel que $A = U^{-1}BU$, où U est une transformation linéaire inversible. Parmi les modèles classiques, on peut citer le modèle de Jordan [6]: Si $A \in L(E)$, $\dim E \prec +\infty$, il existe alors un modèle unique B de la forme $B = (\lambda_1 I + S_1) \oplus \cdots \oplus (\lambda_n I + S_n)$, où l'ensemble des complexes $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ coincide avec le spectre de A, S_i $(i = 1, \ldots, n)$ opérateurs de translation nilpotents dans C^n. Le modèle B d'un opérateur A devient mathématiquement intéressant s'il peut être donné de manière explicite (dans un des espaces couramment utilisés) à partir d'un minimum d'informations sur A.

Dans le présent travail, on considère une classe de contractions données dans un espace de Hilbert de dimension finie (comme cela sera mentionné à la fin, les résultats obtenus s'étendent assez aisément à certaines classes de contractions définies dans des espaces de Hilbert séparables de dimension infinie). Pour chaque contraction de cette classe, nous construirons deux modèles. Le premier, dit modèle matriciel agit dans l'espace des matrices carrées et utilise dans sa construction la notion de fonction caractéristique d'un noeud unitaire [4]. Nous établirons ainsi que chacune des contractions de la classe étudiée possède un modèle matriciel auquel elle est unitairement équivalente. Le deuxième modèle (dit modèle universel) s'exprime uniquement à l'aide du spectre et agit dans une somme orthogonale de r exemplaires de l'espace C^n. Ce modèle est le même pour toute la classe étudiée. Son universalité [9], découle du fait que toute contraction de la classe considérée est unitairement équivalente à la restriction de ce modèle à un sous espace invariant. Dans le cas où le sous espace de non unitarité de A est de dimension 1, les deux modèles coïncident. Dans ce cas, les contractions étudiées sont parfaitement définies par leur spectre. Parmi les autres modèles existants, on peut citer les modèles fonctionnels de Nagy Béla et Foias [8]

* Received by the editors on 23 November 2001. Accepted for publication on 13 August 2002. Handling editor: Stephen Kirkland.

†Department of Mathematics, Mostaganem University, Mostaganem (27000), Algeria (ben_berrabah@yahoo.fr).

The Electronic Journal of Linear Algebra ISSN 1081-3810
A publication of the International Linear Algebra Society
Volume 9, pp. 171-189, September 2002

ELA
http://math.technion.ac.il/iic/ela

et de Brodskii [4]. Ces modèles s'expriment tous deux à l'aide de la fonction caractéristique et agissent dans des espaces fonctionnels construits à partir des classes de Hardy. Signalons aussi que dans le cas où la contraction A (définie dans un espacede Hilbert abstrait de dimension infinie) ne possède pas de valeurs propres, des modèles universels furent construits dans [1] , [2].

Le présent travail comporte une introduction et quatre sections. Dans la second section, nous exposons les principaux résultats relatifs à la théorie des noeuds unitaires d'opérateurs qui constitue l'outil mathématique fondamental utilisé pour l'obtention de nos modèles. Cette théorie est apparue au milieu des années 70 du dernier siècle comme analogue naturel de la théorie des noeuds non hermitiens qui s'est par la suite avérée bien adaptée à l'étude des opérateurs dits presque hermitiens [3, 7]. D'autre part, elle est apparue comme généralisation des résultats de [8]. Dans la troisième section, nous construisons le modèle matriciel, nous en établissons les principales propriétés et puis nous démontrons le théorème d'équivalence unitaire relatif au modèle matriciel. La quatrième section est consacré à la construction ainsi qu'à l'étude du modèle universel. Dans la cinquième et dernier section, nous donnons quelques généralisations possibles des résultats obtenus au cas non inversible et au cas des contractions définies dans des espaces de Hilbert séparables de dimension infinie et dont les valeurs propres vérifient la condition $\sum_{k=1}^{+\infty}(1-|\lambda_k|) \prec +\infty$. Dans tout ce travail et sauf indication contraire, les espaces considérés sont des espaces de Hilbert de dimension finie.

2. Résultats préliminaires. Dans ce section, nous exposons les principaux résultats relatifs à la théorie des noeuds unitaires.

DÉFINITION 2.1. Une contraction $T \in L(E)$ est dite simple (on dit aussi totalement non unitaire) si dans E, il n'existe aucun sous espace invariant pour T et T^* et dans lequel T induit un opérateur unitaire.

PROPOSITION 2.2. *T est simple si et seulement si T^* est simple.*

THÉORÈME 2.3. *Une contraction $T \in L(E)$ est simple si et seulement si tout son spectre est situé à l'intérieur du disque unité $D = \{z \in C : |z| \prec 1\}$.*

DÉFINITION 2.4. Soient T_1 et T_2 deux opérateurs agissant dans E_1 et E_2 respectivement. On appelle couplage de T_1 et T_2 tout opérateur (noté dans tout ce qui suit par $(T_1 \star T_2)(\Gamma)$) défini dans l'espace $E = E_1 \oplus E_2$ par la formule

$$((T_1 \star T_2)(\Gamma))(x) = T_1P_1(x) \star T_2P_2(x) + \Gamma P_2(x)$$

où $P_i \;\; (i = 1, 2)$ désigne l'orthoprojecteur de E sur E_1 et E_2, respectivement, l'opérateur $\Gamma \in L(E)$ appelé coefficient de couplage annule E_1 et applique E_2 dans E_1.

Remarquons que le couplage d'opérateurs dépend de Γ. De plus, il est associatif mais non commutatif. Suivant la décomposition $E = E_1 \oplus E_2$, l'opérateur $((T_1 \star T_2)(\Gamma))$ admet la représentation matricielle suivante,

$$((T_1 \star T_2)(\Gamma)) = \begin{bmatrix} T_1 & \Gamma_1 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix}; \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 0 & \Gamma_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

The Electronic Journal of Linear Algebra ISSN 1081-3810
A publication of the International Linear Algebra Society
Volume 9, pp. 171-189, September 2002

ELA
http://math.technion.ac.il/iic/ela

PROPOSITION 2.5. *Soient T, T_1 et T_2 trois opérateur linéaires définis dans les espaces E, E_1 et E_2 respectivement. Alors, $T = ((T_1 \star T_2)(\Gamma))$ si et seulement si $E = E_1 \oplus E_2$ et E_1 est un sous espace de E invariant pour T .*

On sait qu'en dimension finie, le spectre d'un couplage d'opérateurs est égal à la réunion des spectres des opérateurs couplés. Par conséquent et en raison du théorème 2.3, on a la suivant proposition.

PROPOSITION 2.6. *Supposons que le couplage $((T_1 \star T_2)(\Gamma))$ des contractions T_1 et T_2 est aussi une contraction. Alors, $((T_1 \star T_2)(\Gamma))$ est simple si et seulement si T_1 et T_2 sont simples.*

DÉFINITION 2.7. L'ensemble $\Delta = (E, F, G, T, \Phi, \Psi, K)$ constitué d'espaces E, F, G vérifiant ($\dim F = \dim G$); et d'opérateurs linéaires bornés tels que $T \in L(E)$; $\Phi \in L(F, E)$; $\Psi \in L(E, G)$, $K \in L(F, G)$ est appelé noeud unitaire si:

$$\begin{bmatrix} T^* & \Psi^* \\ \Phi^* & K^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T & \Phi \\ \Psi & K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_E & 0 \\ 0 & I_F \end{bmatrix}, \tag{2.1}$$

$$\begin{bmatrix} T & \Phi \\ \Psi & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^* & \Psi^* \\ \Phi^* & K^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_E & 0 \\ 0 & I_G \end{bmatrix}. \tag{2.2}$$

L'espace E et l'opérateur T sont respectivement appelés espace interieur et opérateur principal du noeud Δ. Les relations (2.1) et (2.2) signifient que la matrice bloc

$$\begin{bmatrix} T & \Phi \\ \Psi & K \end{bmatrix}$$

constitue un opérateur unitaire de $E \oplus F$ dans $E \oplus G$ et que l'opérateur principal de tout noeud unitaire est une contraction large. Inversement, si T est une contraction définie dans un espace E, alors en posant $E = F = G$; $\Phi = (I - TT^*)^{\frac{1}{2}}$; $\Psi = (I - T^*T)^{\frac{1}{2}}$; $K = -T^*$, on obtient un noeud unitaire Δ dont l'espace intérieur et l'opérateur principal sont respectivement E et T. Les formules (2.1) et (2.2) sont équivalentes aux relations suivantes,

$$\left\{ \begin{array}{l} I - T^*T = \Psi^*\Psi \\ I - TT^* = \Phi\Phi^* \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} T^*\Phi + \Psi^*K = 0 \\ T\Psi^* + \Phi K^* = 0 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} \Psi\Psi^* + KK^* = I_G \\ \Phi^*\Phi + K^*K = I_F. \end{array} \right. \tag{2.3}$$

PROPOSITION 2.8. *Soit $\Delta = (E, F, G, T, \Phi, \Psi, K)$ un noeud unitaire. Alors,*
(a) *On peut supposer que $F = G$.*
(b) *Si de plus, T^{-1} existe, alors on peut supposer que $F = G = C^r$*
$(r = \dim(I - T^*T)E)$.

Preuve. (a) Puisque $\dim F = \dim G$, il existe alors une application unitaire U définie de F dans G . On vérifie facilement que l'ensemble

$$\Delta' = \left(E, F, F, T, \Phi, U^{-1}\Psi, U^{-1}K\right)$$

est un noeud unitaire.

(b) Si T est inversble, alors les espaces $(I - T^*T)^{\frac{1}{2}} E$, $(I - T^*T)E$, $(I - TT^*)E$ et $(I - TT^*)^{\frac{1}{2}} E$ sont tous de même dimension. On vérifie que l'on obtient un

The Electronic Journal of Linear Algebra ISSN 1081-3810
A publication of the International Linear Algebra Society
Volume 9, pp. 171-189, September 2002

noeud unitaire $\Delta = (E, F, G, T, \Phi, \Psi, K = -T^*)$, en posant: $F = (I - TT^*)^{\frac{1}{2}} E$, $G = (I - T^*T)^{\frac{1}{2}} E$, $\Phi = (I - TT^*)^{\frac{1}{2}}$, $\Psi = (I - T^*T)^{\frac{1}{2}}$. Donc si T est inversible, on peut d'aprés 1. Supposer $F = G = (I - T^*T)^{\frac{1}{2}} E$. Soit $r = \dim (I - T^*T) E$. Désignons par V n'importe quelle application unitaire définie de C^r dans F. L'ensemble $\Delta^{''} = \left(E, C^r, C^r, T, \Phi V, V^{-1}\Psi, V^{-1}KV\right)$ constitue un noeud unitaire. □

Soit $E = E_0 \oplus E_1$ la décomposition de E correspondant à la décomposition de T en partie unitaire T_0 et partie simple T_1 [8]. Des relations (2.1) et (2.2) découle que $\Psi E_0 = \{0\} = \Phi^* E_0$ et les ensembles $\Delta_{E_1} = (E_1, F, G, T_1, \Phi, \Psi, K)$, $\Delta_{E_0} = (E_0, F, F, T_0, 0, 0, I_F)$ forment des noeuds unitaires. Δ_{E_1} est appelée partie simple de Δ et Δ_{E_0} sa partie complémentaire. Si $E = E_1$ (dans ce cas $T = T_1$), alors le noeud Δ est dit simple.

Soient maintenant $\Delta_p = (E_p, F_p, G_p, T_p, \Phi_p, \Psi_p, K_p)$; $(p = 1, 2)$ deux noeuds unitaires tels que $F_1 = G_2$. Posons $E = E_1 \oplus E_2$; $F = F_2$; $G = G_1$; $T = T_1P_1 + T_2P_2 + \Phi_1\Psi_2P_2$, $\Phi = \Phi_2 + \Phi_1K_2$; $\Psi = \Psi_1P_1 + K_1\Psi_2P_2$; $K = K_1K_2$.

L'opérateur P_i désigne l'orthoprojecteur sur E_i. Un calcul direct permet d'affirmer que l'ensemble $\Delta = (E, F, G, T, \Phi, \Psi, K)$ est un noeud unitaire.

Définition 2.9. Le noeud unitaire défini par les formules précédentes est appelé couplage des noeuds Δ_1 et Δ_2 et est noté $\Delta = \Delta_1 \star \Delta_2$.

Remarquons que tout noeud unitaire est égal au couplage de sa partie simple et de sa partie complémentaire et que si $\Delta = \Delta_1 \star \Delta_2$, alors l'espace intérieur E_1 de Δ_1 est invariant par rapport à T.

Définition 2.10. Soit $\Delta = (E, F, G, T, \Phi, \Psi, K)$ un noeud unitaire. On appelle fonction caractéristique de Δ la fonction définie de l'ensemble $D = \{\lambda \in C : |\lambda| \prec 1\}$ dans $L(G, F)$ par la relation

$$S_\Delta(\lambda) = K^* + \lambda\Phi^* (I - \lambda T^*)^{-1} \Psi^*.$$

Il est clair que la fonction $S_\Delta(\lambda)$ est holomorphe dans D (c'est à dire que la fonction scalaire $\langle S_\Delta(\lambda)(x) ; y \rangle$ est holopmorphe sur D pour tout couple $(x; y) \in G \times F$), de plus ses valeurs sont des opérateurs linéaires bornés de G dans F. Un calcul direct nous donne la relation

$$I_E - S^*_\Delta(\lambda) S_\Delta(\mu) = (1 - \lambda\overline{\mu}) \Psi (I - \overline{\mu}T^*)^{-1} (I - \lambda T^*)^{-1} \Psi^*,$$

de laquelle découle que

$$I_E - S^*_\Delta(\lambda) S_\Delta(\lambda) \geq 0 \ ; \ (|\lambda| \prec 1). \tag{2.4}$$

Pour une connaissance plus approfondie des noeuds unitaires et de leurs fonctions caractéristiques, le lecteur peut consulter [4]. Rappelons cependant de ce même article trois résultats importants pour la suite.

Théorème 2.11. *Si* $\Delta = \Delta_1 * \Delta_2$, *alors* $S_\Delta(\lambda) = S_{\Delta_2}(\lambda) S_{\Delta_1}(\lambda)$.

Théorème 2.12. *Si deux noeuds unitaires simples* Δ_1 *et* Δ_2 *ont la même fonction caractéristique, alors ils sont unitairement équivalents, i.e., il existe un opérateur unitaire* U *défini de* E_1 *dans* E_2 *et tel que:* $T_1 = U^{-1}T_2U$; $\Psi_1 = \Psi_2U$; $\Phi_1 = U^{-1}\Phi_2$.

The Electronic Journal of Linear Algebra ISSN 1081-3810
A publication of the International Linear Algebra Society
Volume 9, pp. 171-189, September 2002

ELA
http://math.technion.ac.il/iic/ela

THÉORÈME 2.13. *La fonction caractéristique d'un noeud unitaire, coïncide avec celle de sa partie simple.*

Etablissons maintenant le lien entre la fonction caractéristique d'un noeud unitaire et le spectre de son opérateur principal.

THÉORÈME 2.14. *Soit* $\Delta = (E, F, G, T, \Phi, \Psi, K)$ *et* $S_\Delta(\lambda)$ *sa fonction caractéristique. Alors, le nombre complexe* λ $(|\lambda| \prec 1)$ *est une valeur propre de* T *si et seulement si* $S_\Delta(\lambda)$ *est non injective.*

Preuve. Supposons que λ est une valeur propre de T et désignons par x_λ un vecteur propre associé à λ. Dans ce cas,

$$\begin{aligned} S_\Delta(\lambda)(\Psi x_\lambda) &= K^*\Psi(x_\lambda) + \lambda\Phi^*(I-\lambda T^*)^{-1}\Psi^*\Psi(x_\lambda) \\ &= -\Phi^*T(x\lambda) + \lambda\Phi^*(I-\lambda T^*)^{-1}(I-T^*T)(x\lambda) \\ &= -\Phi^*T(x\lambda) + \lambda\Phi^*(I-\lambda T^*)^{-1}(I-\lambda T^*+\lambda T^*-T^*T)(x\lambda) \\ &= -\lambda\Phi^*(x_\lambda) + \lambda\Phi^*(x_\lambda) + \lambda\Phi^*(I-\lambda T^*)^{-1}T^*(\lambda-T)(x_\lambda) = 0. \end{aligned}$$

Pour terminer la preuve de la condition nécéssaire, il suffit de montrer que le vecteur $\Psi(x_\lambda)$ n'est pas nul. Supposons le contraire, c'est à dire que $\Psi(x_\lambda) = 0$. D'après (2.3), on aura dans ce cas,

$$\Psi(x_\lambda) = 0 \Rightarrow \Psi^*\Psi(x_\lambda) = (I - T^*T)(x_\lambda) = 0.$$

D'où,

$$\langle (I - T^*T)(x_\lambda); x_\lambda \rangle = 0.$$

Ce qui signifie que $\|x_\lambda\| = \|Tx\| = |\lambda|\ \|x\|$. On arrive donc à une contradiction car $|\lambda| \prec 1$ et $x_\lambda \neq 0$.

Inversement, supposons que λ $(|\lambda| \prec 1)$ est un nombre complexe tel que $S_\Delta(\lambda)$ est non injective. Il existe donc un vecteur non nul y_λ tel que $S_\Delta(\lambda)(y_\lambda) = 0$. En utilisant les formules (2.3), on obtient que

$$T(x_\lambda) = \lambda x_\lambda; \qquad x_\lambda = (I - \lambda T^*)^{-1}\Psi^*(y_\lambda).$$

Pour achever la preuve de la condition suffisante, il suffit de remarquer $\Psi^*(y_\lambda) \neq 0$ car dans le cas contraire, on aura la contradiction suivante

$$\Psi^*(y_\lambda) = 0 \Rightarrow \begin{cases} S_\Delta(\lambda)(y_\lambda) = K^*(y_\lambda) = 0 \\ \Psi\Psi^*(y_\lambda) = (I - KK^*)(y_\lambda) = 0. \end{cases}$$

On obtient donc finalement que $y_\lambda = 0$. $\square$

3. Modèle matriciel. Cette section, est consacré à la construction du modèle matriciel et à la preuve du théorème d'équivalence unitaire relatif à ce modèle.

DÉFINITION 3.1. Soient $\{\lambda_k\}_{k=1}^N$ un ensemble fini de nombres complexes tous non nuls. On dira qu'une contraction simple T définie dans un espace E $(\dim E = N)$ appartient à la classe $\Lambda_r\left[\{\lambda_k\}_{k=1}^N\right]$ si

The Electronic Journal of Linear Algebra ISSN 1081-3810
A publication of the International Linear Algebra Society
Volume 9, pp. 171-189, September 2002

(a) le spectre de T coincide avec l'ensemble $\{\lambda_k\}_{k=1}^N$,
(b) $\dim (I - T^*T) E = r$.
De la définition de la classe $\Lambda_r \left[\{\lambda_k\}_{k=1}^N\right]$, découle que $|\lambda_k| \prec 1$.

Soit T un opérateur de la classe $\Lambda_r \left[\{\lambda_k\}_{k=1}^N\right]$. Incluons l'opérateur T dans un noeud unitaire simple $\Delta = (E, F, G, T, \Phi, \Psi, K)$ tel que $F = G = C^r$. Puisque la fonction caractéristique $S_\Delta (\lambda)$ est holomorphe et contractante (d'après (2.4)) sur le disque unité, alors d'après [5], on a la représentation

$$S_\Delta (\lambda) = U \prod_{k=1}^{\overrightarrow{N}} U_k \begin{bmatrix} \frac{\lambda_k - \lambda}{1 - \lambda \overline{\lambda_k}} \times \frac{|\lambda_k|}{\lambda_k} & 0 \\ 0 & I_{r-1} \end{bmatrix} U_k^*; \quad (|\lambda| \prec 1) \tag{3.1}$$

où les opérateurs U et U_k $(k = 1, \ldots, N)$ sont des opérateurs unitaires définis dans C^r et $\prod_{k=1}^{\overrightarrow{N}} W_k = W_1 W_2 \ldots W_N$.

Soit $\lambda_k = r_k e^{i\,\alpha_k}$. Alors, $\frac{\lambda_k - \lambda}{1 - \lambda \overline{\lambda_k}} \times \frac{|\lambda_k|}{\lambda_k} = r_k - \lambda e^{-\,i\,\alpha_k} \frac{1 - r_k^2}{1 - \lambda \overline{\lambda_k}}$. Posons

$$A_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & 0 \\ 0 & e^{i\,\alpha_k} I_{r-1} \end{bmatrix}; |A_k| = \sqrt{A_k^* A_k} = \begin{bmatrix} r_k & 0 \\ 0 & I_{r-1} \end{bmatrix}$$

alors

$$\begin{aligned} S_\Delta (\lambda) &= U \prod_{k=1}^{\overrightarrow{N}} U_k \left[|A_k| - \lambda e^{-\,i\,\alpha_k} (I - \lambda A_k^*)^{-1} (I - A_k^* A_k) \right] U_k^* \\ &= U \prod_{k=1}^{\overrightarrow{N}} \left[|B_k| - \lambda e^{-\,i\,\alpha_k} (I - \lambda B_k^*)^{-1} d_k^2 \right]; \end{aligned}$$

$$B_k = U_k A_k U_k^*;\ d_{k=} U_k \sqrt{(I - A_k^* A_k)} U_k^* = U_k \begin{bmatrix} \sqrt{1 - r_k^2} & 0 \\ 0 & 0_{r-1} \end{bmatrix} U_k^*.$$

Proposition 3.2. *Pour tout $k \in \{1, \ldots, N\}$, les opérateurs A_k et B_k sont des opérateurs normaux et inversibles. De plus,*

$$\begin{aligned} &B_k e^{-\,i\,\alpha_k} = B_k^* e^{i\,\alpha_k} = U_k |A_k| U_k^*; \\ &B_k d_k = d_k B_k; \quad B_k^* d_k = d_k B_k^*; \quad B_k B_k^* + d_k^2 = I_r; \\ &d_k (I - \lambda B_k^*)^{-1} = (I - \lambda B_k^*)^{-1} d_k. \end{aligned}$$

Considérons maintenant l'espace $M_{N\,,\,r} (C)$ des matrices complexes

$$X = \begin{pmatrix} X_1 = (X_{11}, \ldots, X_{1r}) \\ \vdots \\ X_N = (X_{N\,1}, \ldots, X_{N\,r}) \end{pmatrix}$$

The Electronic Journal of Linear Algebra ISSN 1081-3810
A publication of the International Linear Algebra Society
Volume 9, pp. 171-189, September 2002

ELA
http://math.technion.ac.il/iic/ela

muni du produit scalaire

$$\langle\, X\,;\,Y\,\rangle_M = \sum_{k=1}^{N} X_k Y_k^* = \sum_{k=1}^{N}\sum_{p=1}^{r} X_{k\,p}\overline{Y}_{k\,p}.$$

Dans cet espace, définissons l'opérateur $\widetilde{T}$ par

$$\left(\widetilde{T}X\right)_k = X_k B_k - \sum_{j=k+1}^{N} X_j d_j \Phi_{j-1}\Phi_k^{-1} d_k e^{i\,\alpha_k} \tag{3.2}$$

où

$$\Phi_0 = I_r;\;\; \Phi_{k=}\overleftarrow{\prod_{j=1}^{k}} U_j\,|A_j|\,U_j^* = U_k\,|A_k|\,U_k^*\ldots U_1\,|A_1|\,U_1^*.$$

En utilisant la Proposition 3.2, on peut facilement établir le résultat suivant.

Proposition 3.3. *Pour tout $k\in\{1,\ldots,N\}$, on a,*

$$\begin{aligned}
&\Phi_k^{-1} e^{i\,\alpha_k} B_k^* = \Phi_{k-1}^{-1}\\
&\sum_{j=p}^{s} \Phi_j^{-1} d_j^2 \Phi_j^{*\,-1} = \Phi_s^{-1}\Phi_s^{*\,-1} - \Phi_{p-1}^{-1}\Phi_{p-1}^{*\,-1}\\
&\sum_{j=k+1}^{p} \Phi_{j-1}^* d_j^2 \Phi_{j-1} = \Phi_k^*\Phi_k - \Phi_p^*\Phi_p.
\end{aligned}$$

Proposition 3.4. *On a pour tout $k\in\{1,\ldots,N\}$,*

$$\left(\widetilde{T}^*X\right)_k = X_k B_k^* - \sum_{j=1}^{k-1} X_j d_j \Phi_j^{*-1} e^{-\,i\,\alpha_j}\Phi_{k-1}^* d_k \tag{3.3}$$

$$\left[\left(I-\widetilde{T}^*\widetilde{T}\right)X\right]_k = \sum_{p=1}^{N} X_p d_p \Phi_{p-1}\Phi_{k-1}^* d_k \tag{3.4}$$

$$\left[\left(I-\widetilde{T}\widetilde{T}^*\right)X\right]_k = \sum_{p=1}^{N} X_p d_p \Phi_p^{*-1} e^{-\,i\,\alpha_p}\Phi_N^*\Phi_N e^{i\,\alpha_k}\Phi_k^{-1} d_k. \tag{3.5}$$

Preuve. La formule (3.3) se démontre de manière directe. Etablissons la formule (3.4). Pour tout $k\in\{1,\ldots,N\}$ on a

$$\begin{aligned}
&\left[\left(I-\widetilde{T}^*\widetilde{T}\right)X\right]_k = X_k - \left(\widetilde{T}^*\widetilde{T}X\right)_k\\
&= X_k - \left[\widetilde{T}X\right]_k B_k^* + \sum_{j=1}^{k-1}\left(\widetilde{T}X\right)_j d_j\Phi_j^{*-1} e^{-\,i\,\alpha_j}\Phi_{k-1}^* d_k.
\end{aligned}$$

The Electronic Journal of Linear Algebra ISSN 1081-3810
A publication of the International Linear Algebra Society
Volume 9, pp. 171-189, September 2002

ELA
http://math.technion.ac.il/iic/ela

$$= X_k - \left[X_k B_k - \sum_{j=k+1}^{N} X_j d_j \Phi_{j-1} \Phi_k^{-1} d_k e^{i\,\alpha_k} \right] B_k^* +$$
$$+ \sum_{j=1}^{k-1} \left[X_j B_j - \sum_{p=j+1}^{N} X_p d_p \Phi_{p-1} \Phi_j^{-1} d_j e^{i\,\alpha_j} \right] d_j \Phi_j^{*-1} e^{-i\,\alpha_j} \Phi_{k-1}^* d_k$$
$$= X_k - X_k B_k B_k^* + \sum_{j=k+1}^{N} X_j d_j \Phi_{j-1} \Phi_k^{-1} d_k e^{i\,\alpha_k} B_k^* +$$
$$+ \sum_{j=1}^{k-1} X_j B_j d_j \Phi_j^{*-1} e^{-i\,\alpha_j} \Phi_{k-1}^* d_k$$
$$- \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{p=j+1}^{N} X_p d_p \Phi_{p-1} \Phi_j^{-1} d_j e^{i\,\alpha_j} d_j \Phi_j^{*-1} e^{-i\,\alpha_j} \Phi_{k-1}^* d_k$$
$$= X_k - X_k B_k B_k^* + \sum_{j=k+1}^{N} X_j d_j \Phi_{j-1} \Phi_{k-1}^{-1} d_k +$$
$$\sum_{j=1}^{k-1} X_j d_j \Phi_{j-1}^{*-1} \Phi_{k-1}^* d_k - \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{p=j+1}^{N} X_p d_p \Phi_{p-1} \Phi_j^{-1} d_j^2 \Phi_j^{*-1} \Phi_{k-1}^* d_k.$$

En utilisant la Proposition 3.3 et la relation

$$\sum_{s=1}^{k-1} \sum_{p=s+1}^{N} F_p \Psi_s = \sum_{p=1}^{N} F_p \sum_{s=1}^{k-1} \Psi_s - \sum_{p=1}^{k-1} F_p \sum_{s=p}^{k-1} \Psi_s$$

et après transformations, on obtient finalement que

$$\left[\left(I - \widetilde{T}^* \widetilde{T} \right) X \right]_k = X_k - X_k B_k B_k^* - X_k d_k^2 + \sum_{p=1}^{N} X_p d_p \Phi_{p-1} \Phi_{k-1}^* d_k$$
$$= \sum_{p=1}^{N} X_p d_p \Phi_{p-1} \Phi_{k-1}^* d_k.$$

Pour la preuve de la formule (3.5), on procède de manière analogue et on utilise la relation

$$\sum_{s=k+1}^{N} \sum_{p=1}^{s-1} F_p \Psi_s = \sum_{p=1}^{N} F_p \sum_{s=k+1}^{N} \Psi_s - \sum_{p=k+1}^{N} F_p \sum_{s=k+1}^{p} \Psi_s. \quad \square$$

Proposition 3.5. *L'opérateur $\widetilde{T}$ est une contraction.*
Preuve. Soit $\{e_\alpha\}_{\alpha=1}^{r}$ la base canonique de C^r. Posons pour tout $k = 1, \ldots, N$,

$$g_\alpha = (g_\alpha(1); \ldots; g_\alpha(N)); \quad g_\alpha(k) = e_\alpha \Phi_{k-1}^* d_k$$
$$h_\alpha = (h_\alpha(1); \ldots; h_\alpha(N)); \quad h_\alpha(k) = e_\alpha \Phi_N e^{i\,\alpha_k} \Phi_k^{-1} d_k.$$

The Electronic Journal of Linear Algebra ISSN 1081-3810
A publication of the International Linear Algebra Society
Volume 9, pp. 171-189, September 2002

ELA
http://math.technion.ac.il/iic/ela

Dans ce cas, les formules (3.4) et (3.5) sont respectivement équivalentes aux formules

$$\left(I - \widetilde{T}^*\widetilde{T}\right) X = \sum_{\alpha=1}^{r} \langle\, X\,; g_\alpha \,\rangle_M g_\alpha \tag{3.6}$$

$$\left(I - \widetilde{T}\widetilde{T}^*\right) X = \sum_{\alpha=1}^{r} \langle\, X\,; h_\alpha \,\rangle_M h_\alpha. \tag{3.7}$$

En effet, on a $X_p d_p \Phi_{p-1} = \sum\limits_{\alpha=1}^{r} \left[X_p d_p \Phi_{p-1} e_\alpha^*\right] e_\alpha$ car c'est un élément de C^r. Donc

$$\begin{aligned} &\left[\left(I - \widetilde{T}^*\widetilde{T}\right) X\right]_k = \sum_{p=1}^{N} X_p d_p \Phi_{p-1} \Phi_{k-1}^* d_k \\ &= \sum_{p=1}^{N} \sum_{\alpha=1}^{r} \left[X_p d_p \Phi_{p-1} e_\alpha^*\right] e_\alpha \Phi_{k-1}^* d_k = \sum_{\alpha=1}^{r} \sum_{p=1}^{N} \left[X_p d_p \Phi_{p-1} e_\alpha^*\right] e_\alpha \Phi_{k-1}^* d_k \\ &= \sum_{\alpha=1}^{r} \langle\, X\,; g_\alpha \,\rangle_M g_\alpha\,(k)\,, \end{aligned}$$

d'où la formule (3.6). Pour la formule (3.7) , on procéde de manière identique. De la formule (3.6) , découle que pour tout $X \in M_{N\,r}\,(C)$,

$$\langle \left(I - \widetilde{T}^*\widetilde{T}\right) X\,; X \,\rangle_M = \sum_{\alpha=1}^{r} \langle\, X\,; g_\alpha \,\rangle_M \langle\, g_\alpha; X \,\rangle_M = \sum_{\alpha=1}^{r} \left|\langle\, X\,; g_\alpha \,\rangle_M\right|^2 \geq 0.$$

Donc l'opérateur $\widetilde{T}$ est une contraction. □

Remarquons aussi que des formules (3.6) et (3.7) découle que

$$\dim \left(I - \widetilde{T}^*\widetilde{T}\right) C^N = \dim \left(I - \widetilde{T}\widetilde{T}^*\right) C^N = r.$$

Considérons maintenant le sous ensemble

$$M_1 = \left\{ X = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_N \end{bmatrix} \in M_{N,\,r}\,(C) : X_k d_k = 0, k = 1, 2, \ldots, N \right\}.$$

Alors, on a le résultat suivant.

Proposition 3.6. *M_1 est un sous espace de $M_{N,\,r}\,(C)$ invariant pour $\widetilde{T}$ et $\widetilde{T}^*$.*

Preuve. Le fait que c'est un sous espace de $M_{N,\,r}\,(C)$ est évident. Son invariance pour $\widetilde{T}$ et $\widetilde{T}^*$ découle du fait que pour tout $X \in M_1$ et pour tout $k = 1, \ldots, N$, on a

$$\begin{aligned} \left(\widetilde{T}X\right)_k d_k &= X_k B_k d_k = X_k d_k B_k = 0 B_k = 0 \\ \left(\widetilde{T}^*X\right)_k d_k &= X_k B_k^* d_k = X_k d_k B_k^* = 0 B_k^* = 0. \quad \square \end{aligned}$$

Remarquons cependant qu'en utilisant la forme explicite des opérateurs d_k, on peut établir que

$$M_1 = \left\{ X = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_N \end{bmatrix} \in M_{N,\,r}\,(C) : X_k = (0, x_{k2}, \ldots, x_{kr})\, U_k^* \right\}.$$

The Electronic Journal of Linear Algebra ISSN 1081-3810
A publication of the International Linear Algebra Society
Volume 9, pp. 171-189, September 2002

ELA
http://math.technion.ac.il/iic/ela

Désignons maintenant par M_2 le supplémentaire orthogonal de M_1. On a alors le suivant résultat.

PROPOSITION 3.7. *M_2 est un sous espace de $M_{N,r}(C)$ invariant pour $\widetilde{T}$ et $\widetilde{T}^*$. De plus,*

$$M_2 = \left\{ X = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_N \end{bmatrix} \in M_{N,r}(C) : X_k = (x_{k1}, 0, \ldots, 0)\, U_k^* \right\}.$$

Considérons maintenant les opérateurs suivants

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\Psi}_2 : M_2 \to C^r \;\; ; \widetilde{\Psi}_2(X) = \sum_{\alpha=1}^{r} \langle X \,; g_\alpha \rangle_M e_\alpha \\
&\widetilde{\Phi}_2 : C^r \to M_2 \;\; ; \widetilde{\Phi}_2(e_\alpha) = -\, h_\alpha \;\; ; \; \alpha = 1, \ldots, r \\
&\widetilde{K}_2 : C^r \to C^r \;\; ; \; \widetilde{K}_2\,(e_\alpha) = e_\alpha \Phi_N \;\; ; \; \alpha = 1, \ldots, r.
\end{aligned}$$

PROPOSITION 3.8. *L'ensemble $\widetilde{\Delta}_2 = \left(M_2, C^r, C^r, \widetilde{T}_2, \widetilde{\Phi}_2, \widetilde{\Psi}_2, \widetilde{K}_2 \right)$ où $\widetilde{T}_2$ désigne la restriction de $\widetilde{T}$ à M_2 est un noeud unitaire.*

Preuve. Remarquons tout d'abord l'appartenance des matrices g_α; h_α au sous espace M_2. De plus, on a

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\Psi}_2^* : C^r \to M_2\,; \widetilde{\Psi}_2^*(e_\alpha) = \; g_\alpha \;\; ; \; \alpha = 1, \ldots, r \\
&\widetilde{\Phi}_2^* : M_2 \to C^r\,; \widetilde{\Phi}_2^*(X) = -\sum_{\alpha=1}^{r} \langle X \,; h_\alpha \rangle_M e_\alpha \\
&\widetilde{K}_2^* : C^r \to C^r\,; \; \widetilde{K}_2^*\,(e_\alpha) = e_\alpha \Phi_N^* \;\; ; \; \alpha = 1, \ldots, r.
\end{aligned}$$

Les relations $\left(I - \widetilde{T}^*\widetilde{T}\right) = \widetilde{\Psi}_2^*\widetilde{\Psi}_2$ et $\left(I - \widetilde{T}\widetilde{T}^*\right) = \widetilde{\Phi}_2\widetilde{\Phi}_2^*$ découlent des formules (3.6) et (3.7). Montrons maintenant que $\widetilde{T}_2^*\widetilde{\Phi}_2 + \widetilde{\Psi}_2^*\widetilde{K}_2 = 0$. On a pour tout couple $(\alpha\,; k) \in \{1, \ldots, r\} \times \{1, \ldots, N\}$ et compte tenu des Propositions 3.2 et 3.3.

$$\begin{aligned}
&\left[\left(\widetilde{T}_2^*\widetilde{\Phi}_2 + \widetilde{\Psi}_2^*\widetilde{K}_2\right) e_\alpha\right]_k = \left[\widetilde{T}_2^*\,(-h_\alpha) + \widetilde{\Psi}_2^*\,(e_\alpha \Phi_N)\right]_k \\
&= \widetilde{T}_2^*\,(-h_\alpha) + \sum_{\beta=1}^{r} \left(e_\alpha \Phi_N e_\beta^*\right) g_\beta = -e_\alpha \Phi_N e^{i\,\alpha_k} \Phi_k^{-1} d_k B_k^* \\
&+ \sum_{j=1}^{k-1} e_\alpha \Phi_N e^{i\,\alpha j} \Phi_j^{-1} d_j^2 \Phi_j^{*-1} e^{-i\,\alpha_j} \Phi_{k-1}^* d_k + \sum_{\beta=1}^{r} \left(e_\alpha \Phi_N e_\beta^*\right) e_\beta \Phi_{k-1}^* d_k \\
&= -e_\alpha \Phi_N \Phi_{k-1}^{-1} d_k + e_\alpha \Phi_N \left(\Phi_{k-1}^{-1}\Phi_{k-1}^{*-1} - I_r\right) \Phi_{k-1}^* d_k + e_\alpha \Phi_N \Phi_{k-1}^* d_k \\
&= 0.
\end{aligned}$$

D'une manière tout à fait analogue, on démontre que $\widetilde{T}_2\widetilde{\Psi}_2^* + \widetilde{\Phi}_2\widetilde{K}_2^* = 0$. Montrons que $\widetilde{\Phi}_2^*\widetilde{\Phi}_2 + \widetilde{K}_2^*\widetilde{K}_2 = I_r$. En effet, on a

The Electronic Journal of Linear Algebra ISSN 1081-3810
A publication of the International Linear Algebra Society
Volume 9, pp. 171-189, September 2002
ELA
http://math.technion.ac.il/iic/ela

$$\left(\widetilde{\Phi}_2^*\widetilde{\Phi}_2+\widetilde{K}_2^*\widetilde{K}_2\right)(e_\alpha)=\sum_{\beta=1}^{r}\left[\left[\left(\widetilde{\Phi}_2^*\widetilde{\Phi}_2+\widetilde{K}_2^*\widetilde{K}_2\right)(e_\alpha)\right]e_\beta^*\right]e_\beta=$$
$$=\sum_{\beta=1}^{r}\langle\, h_\alpha;h_\beta\,\rangle_{M_2}e_\beta+\sum_{\beta=1}^{r}\left[e_\alpha\Phi_N\Phi_N^*e_\beta^*\right]e_\beta=$$
$$=\sum_{\beta=1}^{r}\sum_{k=1}^{N}\left[e_\alpha\Phi_N\Phi_k^{-1}d_k^2\Phi_k^{*-1}\Phi_N^*e_\beta^*\right]e_\beta+\sum_{\beta=1}^{r}e_\alpha\Phi_N\Phi_N^*e_\beta^*=$$
$$=\sum_{\beta=1}^{r}e_\alpha\left[\left(\Phi_N\Phi_N^{*-1}-I_r\right)\Phi_N^*e_\beta^*\right]e_\beta+\sum_{\beta=1}^{r}e_\alpha\Phi_N\Phi_N^*e_\beta^*=e_\alpha\sum_{\beta=1}^{r}e_\beta^*e_\beta$$
$$=e_\alpha.$$

Donc $\widetilde{\Phi}_2^*\widetilde{\Phi}_2+\widetilde{K}_2^*\widetilde{K}_2=I_r$. De manière tout à fait analogue; on montre que $\widetilde{\Psi}_2\widetilde{\Psi}_2^*+\widetilde{K}_2\widetilde{K}_2^*=I_r$. Ainsi donc, l'ensemble $\widetilde{\Delta}_2=\left(M_2,C^r,C^r,\widetilde{T}_2,\widetilde{\Phi}_2,\widetilde{\Psi}_2,\widetilde{K}_2\right)$ vérifie toutes les conditions d'un noeud unitaire. □

Calculons la fonction caractéristique du noeud $\widetilde{\Delta}_2$. Remarquons tout d'abord que pour tout $k\in\{1,\ldots,N\}$, la restriction de l'opérateur d_k à M_2 est inversible . On désignera par le même symbole d_k cette restriction. On a

$$S_{\widetilde{\Delta}_2}(\lambda)=\left[S_{\alpha\,,\,\beta}(\lambda)\right]_{\alpha\,,\beta=1}^{r}$$
$$\left[S_{\alpha\,,\,\beta}(\lambda)\right]=\left[S_{\widetilde{\Delta}_2}(\lambda)(e_\alpha)\right]e_\beta^*$$
$$=\left[K^*(e_\alpha)\right]e_\beta^*+\lambda\langle\left(I-\lambda\widetilde{T}_2^*\right)^{-1}g_\alpha;h_\beta\,\rangle_M e_\beta^*.$$

D'autre part,

$$(3.8)\quad \left(I-\lambda\widetilde{T}_2^*\right)^{-1}g_\alpha=f_\alpha\Leftrightarrow g_\alpha=\left(I-\lambda\widetilde{T}_2^*\right)f_\alpha\Leftrightarrow[g_\alpha]_k=\left[\left(I-\lambda\widetilde{T}_2^*\right)f_\alpha\right]_k ji$$
$$\Leftrightarrow e_\alpha\Phi_{k-1}^*d_k=f_\alpha(k)(I-\lambda B_k^*)+\lambda\sum_{j=1}^{k-1}f_\alpha(j)\,d_j\Phi_j^{*-1}e^{-i\,\alpha_j}\Phi_{k-1}^*d_k$$
$$\Leftrightarrow e_\alpha=f_\alpha(k)(I-\lambda B_k^*)\,d_k^{-1}\Phi_{k-1}^{*-1}+\lambda\sum_{j=1}^{k-1}f_\alpha(j)\,d_j\Phi_j^{*-1}e^{-i\,\alpha_j}.$$

Posons

$$F_\alpha(k)=f_\alpha(k)(I-\lambda B_k^*)\,d_k^{-1}\Phi_{k-1}^{*-1}.$$

On a alors le système

$$\begin{cases} e_\alpha=F_\alpha(k)+\lambda\displaystyle\sum_{j=1}^{k-1}F_\alpha(j)\,\Phi_{j-1}^*\left(I-\lambda B_j^*\right)^{-1}d_j^2\Phi_j^{*-1}e^{-i\,\alpha_j}\\ F_\alpha(1)=e_\alpha.\end{cases}$$

D'où,

$$(3.9)\qquad \begin{cases} F_\alpha(k+1)=F_\alpha(k)-\lambda F_\alpha(k)\,\Phi_{k-1}^*(I-\lambda B_k^*)^{-1}d_k^2\Phi_k^{*-1}e^{-i\,\alpha_k}\\ F_\alpha(1)=e_\alpha.\end{cases}$$

The Electronic Journal of Linear Algebra ISSN 1081-3810
A publication of the International Linear Algebra Society
Volume 9, pp. 171-189, September 2002

ELA
http://math.technion.ac.il/iic/ela

La solution de (3.9) est de la forme

$$F_\alpha(k) = e_\alpha \prod_{j=1}^{\overrightarrow{k-1}} \Phi_{j-1}^* \left[|B_j| - \lambda e^{-i\,\alpha_j} \left(I - \lambda B_j^*\right)^{-1} d_j^2 \right] \Phi_j^{*-1}.$$

Ainsi donc,

$$f_\alpha(k) = e_\alpha \prod_{j=1}^{\overrightarrow{k-1}} \Phi_{j-1}^* \left[|B_j| - \lambda e^{-i\,\alpha_j} \left(I - \lambda B_j^*\right)^{-1} d_j^2 \right] \Phi_{k-1}^* \left(I - \lambda B_k^*\right)^{-1} d_k. \tag{3.10}$$

En reportant (3.10) dans (3.8) et en posant

$$\begin{cases} H(k\,,\lambda) = \displaystyle\prod_{j=1}^{\overrightarrow{k}} \Phi_{j-1}^* \left[|B_j| - \lambda e^{-i\,\alpha_j} \left(I - \lambda B_j^*\right)^{-1} d_j^2 \right] \Phi_j^{*-1} \\ H(0, \lambda) = I_r \end{cases}$$

on obtient après transformations,

$$\begin{aligned} [S_{\alpha\,,\beta}(\lambda)] &= e_\alpha \Phi_N^* e_\beta^* + e_\alpha \sum_{k=1}^{N} \left\{ H(k\,,\lambda) - H(k-1\,,\lambda) \right\} \Phi_N^* e_\beta^* \\ &= e_\alpha \Phi_N^* e_\beta^* + e_\alpha \left\{ H(N\,,\lambda) - H(0\,,\lambda) \right\} \Phi_N^* e_\beta^* = e_\alpha H(N\,,\lambda)\, \Phi_N^* e_\beta^* \\ &= \left\{ \prod_{j=1}^{\overrightarrow{N}} \Phi_{j-1}^* \left[|B_j| - \lambda e^{-i\,\alpha_j} \left(I - \lambda B_j^*\right)^{-1} d_j^2 \right] \Phi_j^{*-1} \right\} \Phi_N^* e_\beta^*. \end{aligned}$$

En développant ce dernier produit, on obtient finalement

$$[S_{\alpha\,,\beta}(\lambda)] = e_\alpha \prod_{j=1}^{\overrightarrow{N}} \left[|B_j| - \lambda e^{-i\,\alpha_j} \left(I - \lambda B_j^*\right)^{-1} d_j^2 \right] e_\beta^*.$$

Donc,

$$\begin{aligned} S_{\widetilde{\Delta}_2}(\lambda) &= \prod_{j=1}^{\overrightarrow{N}} \left[|B_j| - \lambda e^{-i\,\alpha_j} \left(I - \lambda B_j^*\right)^{-1} d_j^2 \right] \\ &= \prod_{k=1}^{\overrightarrow{N}} U_k \begin{bmatrix} \displaystyle\prod_{k=1}^{N} \frac{\lambda_k - \lambda}{1 - \lambda \overline{\lambda_k}} \times \frac{|\lambda_k|}{\lambda_k} & 0 \\ 0 & I_{r-1} \end{bmatrix} U_k^*. \end{aligned}$$

De ce qui précéde, découle que la contraction $\widetilde{T}_2$ est simple. En effet, on remarque que $S_{\widetilde{\Delta}_2}(\lambda)$ n'est pas injective pour $\lambda \in \{\lambda_1, \ldots, \lambda_N\}$. Donc d'après la Proposition

The Electronic Journal of Linear Algebra ISSN 1081-3810
A publication of the International Linear Algebra Society
Volume 9, pp. 171-189, September 2002

ELA
http://math.technion.ac.il/iic/ela

2.14 , les valeurs $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ sont des valeurs propres pour $\widetilde{T}_2$. De plus, ce sont les seules valeurs propres de $\widetilde{T}_2$ car *dim* $M_2 = N$. Donc d'après le Théorème 2.3, $\widetilde{T}_2$ est simple.

Théorème 3.9. *Chacune des contractions T de la classe $\Lambda_r\left[\{\lambda_k\}_{k=1}^N\right]$ est unitairement équivalente à un modèle matriciel du type $\widetilde{T}_2$. Le nombre naturel r ainsi que les λ_k $(k = 1, \ldots, N)$, intervenant dans la construction de $\widetilde{T}_2$ sont les mêmes que dans la notation $\Lambda_r\left[\{\lambda_k\}_{k=1}^N\right]$.*

Preuve. Soit T une contraction (simple) de la classe $\Lambda_r\left[\{\lambda_k\}_{k=1}^N\right]$. Incluons T dans un noeud unitaire simple $\Delta = (E, C^r, C^r, T, \Phi, \Psi, K)$. D'après ce qui, précéde, la fonction caractéristique $S_\Delta(\lambda)$ du noeud Δ est de la forme (3.1). Considérons maintenant l'ensemble $\widetilde{\Delta}_3 = \left(M_2, C^r, C^r, \widetilde{T}_2, \widetilde{\Phi}_2 U^*, \widetilde{\Psi}_2, \widetilde{K}_2 U^*\right)$ où U est l'opérateur unitaire figurant dans la représentation (3.1). Il est évident que $\widetilde{\Delta}_3$ est un noeud unitaire simple. De plus, sa fonction caractéristique $S_{\widetilde{\Delta}_3}(\lambda)$ vérifie la relation

$$S_{\widetilde{\Delta}_3}(\lambda) = U S_{\widetilde{\Delta}_2}(\lambda) = S_\Delta(\lambda).$$

Ainsi donc, les noeuds unitaires simples Δ et $\widetilde{\Delta}_3$ ont la même fonction caractéristique. D'après le Théorème 2.12 , ils sont unitairement équivalents. Par conséquent,il existe un opérateur unitaire V défini de E dans M_2 tel que $T = V^{-1}\widetilde{T}_2 V$. □

Remarque 3.10. L'opérateur $\widetilde{T}_2$ dépend aussi des opérateurs unitaires U_k (formule (3.1)), eux mêmes dépendants de la contraction d'origine T. Pour cela, deux contractions d'une même classe peuvent avoir deux modèles matriciels différents.

Exemple 3.11. Soit T une contraction simple et inversible, définie dans un espace complexe E de dimension 2. Désignons par $\lambda_1 = r_1 e^{i\alpha_1}$ et $\lambda_2 = r_2 e^{i\alpha_2}$ les deux valeurs propres de T . On distingue deux cas.

1$^{\text{er}}$ *cas:* $\dim(I - T^*T)E = 1$. Dans ce cas, la fonction caractéristique $S_\Delta(\lambda)$ admet la représentation $S_\Delta(\lambda) = c\prod_{k=1}^{2}\frac{\lambda_k-\lambda}{1-\lambda\overline{\lambda}_k}\times\frac{|\lambda_k|}{\lambda_k}$, où c est une constante complexe de module 1. Le modèle matriciel $\widetilde{T}_2$ de T est donné dans l'espace C^2 par la formule suivant,

$$\widetilde{T}_2(x,y) = \left(\lambda_1 x - y\sqrt{\left(1-|\lambda_2|^2\right)\left(1-|\lambda_1|^2\right)}e^{i\alpha_1}\,;\lambda_2 y\right).$$

2$^{\text{ième}}$ *cas:* $\dim(I - T^*T)E = 2$. Dans ce cas, la fonction caractéristique $S_\Delta(\lambda)$ admet la représentation suivant,

$$\begin{aligned} S_\Delta(\lambda) &= U\overrightarrow{\prod_{k=1}^{2}}U_k\left[|A_k| - \lambda e^{-i\alpha_k}(I-\lambda A_k^*)^{-1}(I - A_k^*A_k)\right]U_k^* \\ &= U\overrightarrow{\prod_{k=1}^{2}}\left[|B_k| - \lambda e^{-i\alpha_k}(I-\lambda B_k^*)^{-1}d_k^2\right]; \end{aligned}$$

The Electronic Journal of Linear Algebra ISSN 1081-3810
A publication of the International Linear Algebra Society
Volume 9, pp. 171-189, September 2002
ELA
http://math.technion.ac.il/iic/ela

$$A_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & 0 \\ 0 & e^{i\,\alpha_k} \end{bmatrix}; \quad B_k = U_k A_k U_k^*;$$
$$d_k = U_k \sqrt{(I - A_k^* A_k)} U_k^* = U_k \begin{bmatrix} \sqrt{1-r_k^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U_k^*.$$

Les matrices carrées U_k étant unitaires d'ordre 2, admettent la représentation:

$$U_k = \begin{bmatrix} a_k & |b_k|\, e^{i\,\beta_k^1} \\ b_k & |a_k|\, e^{i\,\beta_k^2} \end{bmatrix}; \quad |a_k|^2 + |b_k|^2 = 1; \quad \beta_k^1,\ \beta_k^2 \in R.$$

L'espace M_2 est défini comme suit:

$$\begin{aligned} M_2 &= \left\{ X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \in M_{2,\,2}\,(C) : X_1 = (x, 0)\, U_1^*;\ X_2 = (y, 0)\, U_2^*;\ \ (x, y) \in C^2 \right\} \\ &= \left\{ X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \in M_{2,\,2}\,(C) : X_1 = x\left(\overline{a_1}, \overline{b_1}\right);\ X_2 = y\left(\overline{a_2}, \overline{b_2}\right);\ \ (x, y) \in C^2 \right\}. \end{aligned}$$

Le modèle matriciel $\widetilde{T}_2$ agit dans M_2 par la formule

$$\widetilde{T}_2 \begin{pmatrix} x\left(\overline{a_1}, \overline{b_1}\right) \\ y\left(\overline{a_2}, \overline{b_2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}; \tag{3.11}$$

où

$$z_1 = \lambda_1 x\left(\overline{a_1}, \overline{b_1}\right) - \sqrt{\left(1 - |\lambda_2|^2\right)\left(1 - |\lambda_1|^2\right)} e^{i\,\alpha_1} y\left(\overline{a_2}, \overline{b_2}\right) \begin{bmatrix} |a_1|^2 & a_1\overline{b_1} \\ \overline{a_1} b_1 & |b_1|^2 \end{bmatrix}; \tag{3.12}$$

$$z_2 = \lambda_2 y\left(\overline{a_2}, \overline{b_2}\right). \tag{3.13}$$

Ainsi donc, on peut énoncer le résultat suivant.

THÉORÈME 3.12. *Soit T une contraction simple et inversible de la classe $\Lambda_2\left[\{\lambda_k\}_{k=1}^2\right]$. Il existe alors quatre nombres complexes $a_1, b_1; a_2, b_2$ dépendant de T, vérifiant la relation $|a_1|^2 + |b_1|^2 = |a_2|^2 + |b_2|^2 = 1$ et tels que T est unitairement équivalente à l'opérateur $\widetilde{T}_2$, défini par les formules* (3.11), (3.12), (3.13) *dans l'espace*

$$M_2 = \left\{ X = \begin{bmatrix} x\left(\overline{a_1}, \overline{b_1}\right) \\ y\left(\overline{a_2}, \overline{b_2}\right) \end{bmatrix} \in M_{2,\,2}\,(C) : (x, y) \in C^2 \right\}.$$

4. Modèle universel. Dans ce section, nous construisons le modèle universel et nous établissons son universalité. Les valeurs λ_k $(k = 1, \ldots, N)$ ne sont pas supposées forcément différentes. Considérons dans l'espace C^N l'opérateur $\widehat{T}$ défini par:

$$\left(\widehat{T}x\right)_k = \lambda_k x_k - \sum_{j=k+1}^{N} x_j d_j \phi_{j-1} d_k \phi_k^{-1} e^{i\,\zeta_k}; \quad x = (x_1, \ldots, x_N) \tag{4.1}$$

$$\zeta_k = \arg\, \lambda_k;\ d_k = \sqrt{1 - |\lambda_k|^2};\ \phi_k = \prod_{j=1}^{k} |\lambda_k|;\ \ (k = 1, \ldots, N).$$

On remarque que $\widehat{T}$ est l'opérateur $\widetilde{T}$ défini dans l'espace $M_{N,\,1}\,(C) = C^N$. Donc on a immédiatement la suivant proposition.

The Electronic Journal of Linear Algebra ISSN 1081-3810
A publication of the International Linear Algebra Society
Volume 9, pp. 171-189, September 2002

ELA
http://math.technion.ac.il/iic/ela

PROPOSITION 4.1. *On a*

$$\left(\widehat{T}^* x\right)_k = \overline{\lambda}_k x_k - \sum_{j=1}^{k-1} x_j d_j \phi_j^{-1} e^{-i\zeta_j} d_k \phi_{k-1}$$
$$\left(I - \widehat{T}^*\widehat{T}\right) x = \langle\, x;\, g\,\rangle; \quad g = \left(d_1, d_2\phi_1, \ldots, d_k\phi_{k-1}, \ldots, d_N\phi_{N-1}\right).$$
$$\left(I - \widehat{T}\widehat{T}^*\right) x = \langle\, x;\, h\,\rangle; \quad h = \phi_N \left(d_1 e^{i\zeta_1}\phi_1^{-1}, \ldots, d_N e^{i\zeta_N}\phi_N^{-1}\right).$$
$$\dim\left(I - \widehat{T}^*\widehat{T}\right) C^N = \dim\left(I - \widehat{T}\widehat{T}^*\right) C^N = 1.$$

PROPOSITION 4.2. *La contraction $\widehat{T}$ est simple.*

Preuve. Soit $\{e_j\}_{j=1}^N$ la base canonique de C^N. On vérifie facilement que la matrice de $\widehat{T}$ dans cette base est

$$\widehat{M} = [a_{pq}]_{p,q=1}^N; \qquad a_{pq} = \begin{cases} -d_p d_q \phi_{q-1}\phi_p^{-1} e^{i\xi_p} & (p \prec q) \\ \lambda_p & (p = q) \\ 0 & (q \prec p). \end{cases}$$

Donc le spectre de $\widehat{T}$ coincide avec l'ensemble $\{\lambda_k\}_{k=1}^N$. D'après le Théorème 2.3, l'opérateur $\widehat{T}$ est simple. De ce qui précède, découle en particulier que l'opérateur $\widehat{T}$ est un élément de la classe $\Lambda_1\left[\{\lambda_k\}_{k=1}^N\right]$.

Soit la somme orthogonale $L_r = C^N \oplus \ldots \oplus C^N$ ($r-$ fois), munie du produit scalaire:

$$\begin{cases} \langle\, x;\, y\,\rangle_r = \sum_{\alpha=1}^{r} \sum_{j=1}^{N} x_\alpha^j . \overline{y_\alpha^j} \\ x = (x_1, \ldots, x_r); \quad y = (y_1, \ldots, y_r) \\ x_\alpha = \left(x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^N\right) \in C^N; \quad \left(y_\alpha^1, \ldots, y_\alpha^N\right) \in C^N. \end{cases}$$

Définissons dans l'espace L_r l'opérateur $\overline{T}(r) = \widehat{T} \oplus \ldots \oplus \widehat{T}$ ($r-$ fois) par la formule:

$$\left(\overline{T}(r)\right)(x_1, \ldots, x_r) = \left(\widehat{T} x_1, \ldots, \widehat{T} x_r\right).$$

On a immédiatement que

$$\left(I - \overline{T}^*(r)\,\overline{T}(r)\right) = \sum_{j=1}^{r} \langle\, ;\, g_j\,\rangle g_j; \quad g_j = (0, \ldots, 0, g, 0, \ldots, 0),$$
$$\left(I - \overline{T}(r)\,\overline{T}^*(r)\right) = \sum_{j=1}^{r} \langle\, ;\, h_j\,\rangle h_j; \quad h_j = (0, \ldots, 0, h, 0, \ldots, 0).$$

PROPOSITION 4.3. *L'opérateur $\overline{T}(r)$ est une contraction simple dont le spectre coincide avec l'ensemble $\{\lambda_k\}_{k=1}^N$. De plus, si $\lambda \notin \{\lambda_k\}_{k=1}^N$, alors $\left(\overline{T}(r) - \lambda I\right)^{-1} =$*

The Electronic Journal of Linear Algebra ISSN 1081-3810
A publication of the International Linear Algebra Society
Volume 9, pp. 171-189, September 2002

ELA
http://math.technion.ac.il/iic/ela

$\left(\left(\widehat{T}-\lambda I\right)^{-1};\ldots;\left(\widehat{T}-\lambda I\right)^{-1}\right)$.

Considérons les opérateurs $\overline{\Phi}\in L\left(C^r;L_r\right);\overline{\Psi}\in L\left(L_r;C^r\right);\overline{K}\in L\left(C^r;C^r\right)$ comme suit:

$$\overline{\Psi}\left(x\right)=\sum_{j=1}^{r}\langle\ x\ ;\ g_j\ \rangle e_j\ ;\ \overline{\Phi}\left(e_j\right)=-h_j;\ \overline{K}\left(e_j\right)=\phi_N e_j.$$

On peut facilement vérifier que l'ensemble $\overline{\Delta}\ (r)=\left(L_r,C^r,C^r,\overline{T}\left(r\right),\overline{\Phi},\overline{\Psi},\overline{K}\right)$ est un noeud unitaire simple dont la fonction caractéristique est donnée par la formule suivant,

$$S_{\overline{\Delta}\,(r)}\left(\lambda\right)=\prod_{k=1}^{N}\frac{\lambda_k-\lambda}{1-\lambda\overline{\lambda_k}}\times\frac{|\lambda_k|}{\lambda_k}I_r\qquad(\lambda\in D)\,,$$

où I_r désigne l'identité dans C^r.

Théorème 4.4. *Pour toute contraction simple T de la classe $\Lambda_r\left[\{\lambda_k\}_{k=1}^N\right]$, il existe un sous espace $L_r^{(0)}$ de L_r invariant pour $\overline{T}\left(r\right)$ et un opérateur unitaire U de E (espace de définition de T) dans $L_r^{(0)}$ tels que $T=U^{-1}\left(\overline{T}\left(r\right)\right)U$.*

Preuve. Incluons T dans un noeud simple $\Delta=(E,C^r,C^r,T,\Phi,\Psi,K)$. Puisque $S_\Delta\left(\lambda\right)$ est une matrice carrée holomorphe et contractante sur le disque unité ouvert D, alors d'aprés [8], elle admet un multiple scalaire. C'est à dire qu'il existe une matrice carrée $S_1\left(\lambda\right)$ holomorphe et contractante sur le disque unité ouvert D et telle que $\left[detS_\Delta\left(\lambda\right)\right]I_r=S_1\left(\lambda\right)S_\Delta\left(\lambda\right)$. La matrice carrée $\left[S_1\left(\lambda\right)\right]$ étant holomorphe et contractante sur le disque unité ouvert D, il existe d'après [Théorème 5.1, 4] un noeud unitaire simple $\Delta_1=(E_1,C^r,C^r,T_1,\Phi_1,\Psi_1,K_1)$ tel que $S_{\Delta_1}\left(\lambda\right)$ soit égale à $\left[\,S_1\left(\lambda\right)\right]$ pour tout $\lambda\in D$. Soit $\Delta_2=\Delta*\Delta_1$ le couplage des noeuds Δ et Δ_1. On a,

$$\Delta_2=\Delta*\Delta_1=\left(E_2,C^r,C^r,T_2,\Phi_2,\Psi_2,K_2\right);\ E_2=E\oplus E_1\ ,\ T_2=TP+T_1P_1+\Phi\Psi_1P_1.$$

D'après ce qui précéde, le couplage $\Delta_2=\Delta*\Delta_1$ est simple. De plus,

$$S_{\Delta_2}\left(\lambda\right)=S_1\left(\lambda\right)S_\Delta\left(\lambda\right)=S_{\overline{\Delta}\,(r)}\left(\lambda\right).$$

Les noeuds simples Δ_2 et $\overline{\Delta}\ (r)$ ont donc la même fonction caratéristique et par conséquant, il existe d'après le Théorème 2.12 un opérateur unitaire U défini de E_2 dans L_r tel que $T_2=U^{-1}\overline{T}\left(r\right)U$.
Considérons le sous espace $Y=U\left(E\right)$. Pour tout $y=U\left(x\right)$ $(x\in E)$, on a:
$\overline{T}\left(r\right)\left(U\left(x\right)\right)=UT_2U^{-1}\left(U\left(x\right)\right)=UT_2\left(x\right)=UT\left(x\right)=UTU^{-1}\left(U\left(x\right)\right)$
(car $T_2\left(x\right)=T\left(x\right)\in E$, pour $x\in E$).
Les dernières relations montrent que Y est invariant par rapport à $\overline{T}\left(r\right)$ et que $T=U^{-1}\left(\overline{T}\left(r\right)\right)U$. □

Remarquons que dans le cas où $\dim\left(I-TT^*\right)E=1$, les contractions simples $\widetilde{T}$ et $\overline{T}\left(1\right)=\widehat{T}$ coïncident. D'autre part, chaque contraction simple de la classe

The Electronic Journal of Linear Algebra ISSN 1081-3810
A publication of the International Linear Algebra Society
Volume 9, pp. 171-189, September 2002
ELA
http://math.technion.ac.il/iic/ela

$\Lambda_1\left[\{\lambda_k\}_{k=1}^N\right]$ est unitairement équivalente à $\overline{T}(1)=\widehat{T}$ car ils ont la même fonction caractéristique. On a donc le résultat suivant:

PROPOSITION 4.5. *Toutes les contractions simples de la classe* $\Lambda_1\left[\{\lambda_k\}_{k=1}^N\right]$ *sont unitairement équivalentes entre elles.*

Le théorème suivant, nous fournit un critère suffisant d'équivalence unitaire de deux matrices données.

THÉORÈME 4.6. *Soient* $A=[a_{ij}]_{ij=1}^N$ *et* $B=[b_{ij}]_{ij=1}^N$ *deux matrices carrées à coefficients complexes vérifiant les conditions suivantes:*

(a) *A et B sont inversibles.*

(b) *A et B possédent le même polynome caractéristique.*

(c) $rang\,(I_N-A^*A)=rang\,(I_N-B^*B)=1$ *où I_N désigne la matrice unité d'ordre N .*

(d) $\sum\limits_{i,j=1}^N |a_{ij}|^2 \prec 1$ *et* $\sum\limits_{i,j=1}^N |b_{ij}|^2 \prec 1$.

Preuve. Soit $D=\{e_1,\ldots,e_N\}$ la base canonique de C^N. Désignons par f_A (resp. f_B) l'application linéaire définie dans C^N et dont la matrice par rapport à la base D est A (resp. B). Des conditions (c) et (d), découle que f_A et f_B sont deux contractions simples telles que $\dim(I-f_A^*f_A)=\dim(I-f_B^*f_B)=1$. Par conséquent, f_A et f_B sont deux éléments de la classe $\Lambda_1\left[\{\lambda_k\}_{k=1}^N\right]$ où $\{\lambda_k,\ k=1,\ldots,N\}$ désigne l'ensemble des valeurs propres de la matrice A et donc de B (condition (b)). D'aprés la Proposition 4.5., les contractions f_A et f_B sont unitairement équivalentes. Il existe donc une application linéaire inversible U telle que $f_A=U^{-1}\,f_BU$. En remplaçant dans cette dernière relation chacune des applications par sa matrice par rapport à la base canonique D, on obtient le résultat recherché. □

5. Complément. Jusqu'à présent, nous avons supposé que toutes les valeurs λ_k sont différentes de zéro c'est à dire que l'opérateur T est inversible. Considérons maintenant le cas non inversible. Puisque $\dim E \prec +\infty$, il existe alors au moins un complexe a ($a\neq 0, |a|\prec 1$) tel que l'opérateur $(T-aI)$ soit inversible. Il est évident que $(I-\overline{a}T)$ est aussi inversible. Considérons l'opérateur

$$T_a=(T-aI)\,(I-\overline{a}T)^{-1}\,.$$

L'opérateur T s'obtient à partir de T_a par la relation

$$T=(T_a+aI)\,(I+\overline{a}T_a)^{-1}\,.$$

Des relations

$$\begin{aligned} I-T_a^*T_a &= S^*\,(I-T^*T)\,S,\\ I-T_aT_a^* &= S\,(I-TT^*)\,S^*\,, \end{aligned}$$

où

$$S=\left(1-|a|^2\right)^{\frac12}(I-\overline{a}T)^{-1}$$

The Electronic Journal of Linear Algebra ISSN 1081-3810
A publication of the International Linear Algebra Society
Volume 9, pp. 171-189, September 2002
ELA
http://math.technion.ac.il/iic/ela

découle que T_a est une contraction vérifiant

$$\dim (I - T_a^* T_a) E = \dim (I - TT^*) E = \dim (I - T_a T_a^*) E.$$

D'autre part, de la formule

$$\begin{aligned}(T_a - \alpha I) &= (T - aI)(I - \overline{a}T)^{-1} - \alpha I \\ &= [(T - aI) - \alpha (I - \overline{a}T)] (I - \overline{a}T)^{-1} \\ &= (1 + \alpha\overline{a}) \left[T - (\alpha + a)(1 + \alpha\overline{a})^{-1} I\right] (I - \overline{a}T)^{-1}\end{aligned}$$

découle que les valeurs propres $\lambda_k^{(a)}$ de l'opérateur T_a et les valeurs propres λ de T sont liés par la formule

$$\lambda_k^{(a)} = (\lambda_k + a)(1 + \overline{a}\lambda_k)^{-1}.$$

Cette transformation applique le disque unité ouvert dans lui même. Donc la simplicité de T entraine la simplicité de T_a et inversement. L'opérateur T_a est un élément de la classe $\Lambda_r \left[\left\{\lambda_k^{(a)}\right\}_{k=1}^N\right]$. Il existe donc un opérateur unitaire U défini de E dans M_2 tel que $T_a = U^{-1}\widetilde{T}_a U$ où l'opérateur $\widetilde{T}_a$ est l'opérateur obtenu en remplaçant dans la formule (3.2) λ_k par $\lambda_k^{(a)}$. D'autre part, on a

$$\begin{aligned}T &= (T_a + aI)(I + \overline{a}T_a)^{-1} = \left(U^{-1}\widetilde{T}_a U + aI\right)\left(I + \overline{a}U^{-1}\widetilde{T}_a U\right)^{-1} \\ &= U^{-1}\left(\widetilde{T}_a + aI\right)\left(I + \overline{a}\widetilde{T}_a\right)^{-1} Ua.\end{aligned}$$

Ainsi donc, on a le résultat suivant.

THÉORÈME 5.1. *Soit T une contraction simple définie dans E vérifiant* $\dim E = N \prec +\infty$. *Alors, T est unitairement équivalente à l'opérateur*

$$\left(\widetilde{T}_a + aI\right)\left(I + \overline{a}\widetilde{T}_a\right)^{-1},$$

où a est n'importe quel point situé à l'intérieur du disque unité et régulier pour T.

Signalons d'autre part que les théorèmes 3.9 et 4.4 restent valables dans le cas où dim $E = +\infty$ (dans ce cas, on a $N = +\infty$). Il suffit pour cela de rajouter la condition $\sum_{k=1}^{+\infty} (1 - |\lambda_k|) \prec +\infty$ ce qui assure la convergence du produit matriciel dans (3.1) ainsi que la convergence des séries figurant dans les formules (3.2) et (4.1).

BIBLIOGRAPHIE

[1] B. Bendoukha. Modèles universels certaines classes d'opérateurs dans un espace de Hilbert. *Maghreb Math. Rev.*, 5:1–11, 1996.

The Electronic Journal of Linear Algebra ISSN 1081-3810
A publication of the International Linear Algebra Society
Volume 9, pp. 171-189, September 2002

ELA
http://math.technion.ac.il/iic/ela

[2] B. Bendoukha. Sur une certaine classe d'opérateurs à spectre concentré en un point dans un espace de Hilbert. *Revue Sciences et technologie de l'Université de Constantine*, 14:7–11, 2000.

[3] M.S. Brodskii. Triangular and Jordan representations of linear operators. *Trans. Math. Monographs*, Vol. 32, Amer. Math. Soc., Providence, 1970.

[4] M.S. Brodskii. Unitary operator nodes and their characteristical functions (in Russian). *Uspehi Mat. Nauk.*, 33:141–168, 1978.

[5] Y.P. Heinsburg. Sur la factorisation des matrices-fonctions analytiques. *Dokl. Acad. Nauk.*, 170:489–492, 1966.

[6] R.A. Horn and C.R. Johnson. *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, New York, 1985.

[7] M.S. Livshits and A.A. Yansévitch. *Operator colligations in Hilbert spaces.* V.H. Winston and Sons, Washington, D.C. 1979.

[8] Sz. Nagy Béla and C. Foias. *Analyse harmonique des opérateurs de l'espace de Hilbert*, Masson et Cie, Paris; Acad. Kiado, Budapest, 1967.

[9] G.C. Rota. On models for linear operators. *Communs Pure and Appl. Math.*, 13(3):469–472, 1960.