Divulgaciones Matemáticas Vol. 11 No. 1(2003), pp. 83–90

Problemas y Soluciones

Problems and Solutions

Editor: José Heber Nieto (jhnieto@luz.ve)
Departamento de Matemática, Facultad Exp. de Ciencias
Universidad del Zulia, Apartado Postal 526
Maracaibo. Venezuela.

Los problemas apropiados para esta sección son aquellos que puedan ser abordados por un estudiante de matemática no graduado sin conocimientos especializados. Problemas abiertos conocidos no son aceptables. Se prefieren problemas originales e interesantes. Las soluciones y los problemas propuestos deben dirigirse al editor, en español o inglés, a la dirección arriba indicada. También pueden enviarse por correo electrónico, preferiblemente como un archivo fuente en LaTeX. Las propuestas deben acompañarse de la solución, o al menos de información suficiente que haga razonable pensar que una solución puede ser hallada.

Appropriate problems for this section are those which may be tackled by undergraduate math students without specialized knowledge. Known open problems are not suitable. Original and interesting problems are preferred. Problem proposals and solutions should be sent to the editor, in Spanish or English, to the address given above. They may also be sent by e-mail, preferably as a LaTeX source file. Proposals should be accompanied by a solution or, at least, enough information on why a solution is likely.

Los problemas que se proponen a continuación corresponden al nivel superior de la cuarta edición de la Olimpíada Bolivariana de Matemática, realizada durante los das 5 y 6 de junio del presente año. Esta competencia se realiza por correspondencia, en dos días consecutivos. Cada día los participantes disponen de tres horas y media para resolver tres problemas.

1 Problemas propuestos

67. Una pareja de números enteros positivos (a, b) se llama *mágica* si se cumple que 1 es divisor de b, 2 es divisor de $b + 1$, 3 es divisor de $b + 2$, y así sucesivamente, hasta $(a + 1)$ es divisor de $(b + a)$.

    (a) Probar que la pareja $(a, 1)$ es mágica para todo entero positivo a.

    (b) Probar que para todo entero positivo a existen infinitos números enteros positivos b tales que la pareja (a, b) es mágica.

(c) Dado un entero positivo a, encontrar todos los enteros positivos b tales que la pareja (a, b) es mágica.

68. Con un grupo de 100 personas, se forman algunos comités de dos personas. Se sabe que, sin importar cómo se acomoden las 100 personas en una mesa redonda, siempre hay exactamente dos comités para los que cada miembro se encuentra vecino a su compañero.

    (a) Determinar el número de comités que hay.

    (b) ¿Es cierto que existe una persona que pertenece a todos los comités?

    Nota: Dos comités se consideran diferentes si difieren en al menos uno de sus miembros.

69. Sea ABC un triángulo acutángulo. Sean D, E y F los pies de las alturas y X, Y, y Z los puntos medios de los lados BC, AC y AB, respectivamente. Sea H el punto de intersección de las alturas. Supóngase que H no se encuentra en el interior del triángulo XYZ. Demostrar que por lo menos el área de uno de los triángulos AEF, BDF, CDE es menor o igual que $1/9$ del área del triángulo ABC.

70. Sea ABC un triángulo isósceles con $AB = AC$. Sea P un punto en AB tal que $BC = CP$. Sea Q un punto en AC tal que $AQ = QP = PB$. Determinar los ángulos del triángulo ABC. Justificar su respuesta.

71. Sea n un entero positivo impar. Se construye una lista de enteros positivos $a_1, a_2, a_3, \ldots$ tal que a_1 es un entero positivo cualquiera y, para todo $j \geq 2$ se define a_j de la siguiente manera:

    (a) Si a_{j-1} es par, entonces $a_j = a_{j-1}/2$.

    (b) Si a_{j-1} es impar, entonces $a_j = a_{j-1} + n$.

    Encontrar, para cada entero positivo n, todos los posibles valores de a_1 tales que éste valor vuelve a aparecer más adelante en la sucesión.

72. Encontrar el número de sucesiones de n enteros positivos, no necesariamente distintos, que satisfacen la siguiente condición: Para cada $k \geq 1$, si el número $k + 1$ aparece en la sucesión, entonces el número k también aparece. Más aún, k aparece en la sucesión por primera vez antes que la última aparición de $k + 1$.

2 Soluciones

11. [**5** (1997) p. 77.] Sea P un polinomio con coeficientes enteros de grado $n > 12$. Si el máximo común divisor de los coeficientes de P es 1 y en más de $n/2$ enteros el valor tomado por P es 1 o -1, pruebe que P es irreducible.

    Solución por Xavier Xarles, Universidad Autónoma de Barcelona, Cataluña, España. Vamos a ver primero un resultado previo.

    Observación: No existe ningún polinomio con coeficientes enteros que tome el valor -1 en cuatro enteros distintos a_1, a_2, a_3, a_4 (o más) y el valor 1 en otro entero b.

    En efecto, supongamos que $p(x)$ verificara esto. Entonces $q(x) = p(x)+1$ cumpliría que $q(a_i) = 0$ para $i = 1, \ldots, 4$ y $q(b) = 2$. De esta forma $q(x) = (x - a_1) * (x - a_2) * (x - a_3) * (x - a_4) * r(x)$ para cierto $r(x)$ con coeficientes enteros. Evaluando en b tendríamos $2 = q(b) = (b - a_1) * (b - a_2) * (b - a_3) * (b - a_4) * r(b)$ y por lo tanto sólo podríamos tener que $(b - a_i) = \pm 1$ o $(b - ai) = \pm 2$ (y esto último sólo para un i). Pero los $(b - a_i)$ son todos diferentes, y sólo pueden tomar 3 valores diferentes. Contradicción.

    Obsérvese que el mismo resultado vale para el valor 1 en cuatro enteros diferentes y el valor -1 en otro (o, más en general, si vale c para 4 valores y $c - p$ para otro con p primo).

    Vamos ya a ver el resultado. Supongamos que tenemos $P(X)$ de grado $n > 11$ tal que toma valor 1 o -1 en más de $n/2$ valores. Si $P(X)$ fuera reducible entonces existirían polinomios no constantes $Q(X)$ y $R(X)$ con coeficientes enteros tales que $P(X) = Q(X) * R(X)$. Si $P(a) = \pm 1$, entonces lo mismo pasa con $Q(a)$ y $R(a)$. Podemos suponer que $Q(X)$ tiene grado $n/2$ o menor. Si $Q(X)$ toma el valor 1 en más de $n/2$ enteros, entonces $Q(X) - 1$ tiene más de $n/2$ raíces y grado menor que $n/2$, contradicción. Lo mismo si en todos toma el valor -1. Así tenemos que en algunos enteros Q toma el valor 1 y en otros el valor -1. De hecho habrá más de $n/4$ enteros en los que toma el valor 1 (o el -1). Como $n > 12$, $n/4 > 3$ y tendremos como mínimo 4 enteros en los que toma el valor 1 (o el -1) y como mínimo un entero en el que toma el valor -1 (resp. 1), en contradicción con la observación inicial.

26. [**8**(1) (2000) p. 89, propuesto por Angel Oneto, Universidad del Zulia, Maracaibo, Venezuela.] Probar que existe una y sólo una función $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que, para todo $m, n \in \mathbb{N}$, se verifica:

(a) $f(mn) = f(m)f(n)$.

(b) $m \neq n$ y $m^n = n^m \Longrightarrow f(m) = n$ ó $f(n) = m$.

(c) $m, n \geq 3$ y $m^n < n^m \Longrightarrow f(n) < f(m)$.

Solución por Angel Oneto.

Se probará en primer lugar que

$$3 \leq n < m \Longrightarrow m^n < n^m.$$

Poniendo $m = n + k$ se probará por inducción en k que

$$(n + k)^n < n^{n+k}. \qquad (*)$$

Para $k = 1$, de $(1+\frac{1}{n})^n < 3$ se sigue $(n+1)^n < 3n^n \leq n^{n+1}$. Suponiendo $(*)$ válido por hipótesis inductiva, debe probarse que

$$(n + k + 1)^n < n^{n+k+1}.$$

En efecto,

$$\frac{(n + k + 1)^{n+k}}{(n + k)^{n+k}} = \left(1 + \frac{1}{n + k}\right)^{n+k} < 3,$$

por tanto:

$$(n + k + 1)^n < \frac{3(n + k)^{n+k}}{(n + k + 1)^k} < 3(n + k)^n < 3n^{n+k} \leq n^{n+k+1}.$$

Resulta que si $n < m$ la única solución de $m^n = n^m$ está dada por $n = 2$ y $m = 4$. Sigue de b) que $f(2) = 4$ o $f(4) = 2$. Pero por a) $f(4) = f(2)f(2)$, por lo que debe ser

d) $f(2) = 4$.

Además de c) resulta: $3 \leq n < m \Longrightarrow f(n) < f(m)$, pero $f(1) = 1$, $f(4) = 16$ y $f(6) = 4f(3) > f(4)$, y se tiene

$$f(1) < f(2) = 4 < f(3).$$

Luego

e) f es estrictamente creciente ($n < m \Longrightarrow f(n) < f(m)$).

Se ha probado que, suponiendo a), las condiciones b) y c) implican d) y e). De la discusión anterior resulta que la recíproca también es válida y entonces las condiciones a), b) y c) equivalen a las condiciones a), d) y e).

La función "elevar al cuadrado" cumple obviamente a), d) y e). Se verá que si una función $f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ cumple a), d) y e) debe ser $f(n)=n^2$ cualquiera sea $n\in\mathbb{N}$. En efecto, dado $n\in\mathbb{N}$ tomando $h,k,r,s\in\mathbb{N}$ tales que

$$n^2-1<4^{\frac{h}{k}}<n^2<4^{\frac{r}{s}}<n^2+1,$$

puesto que $2^h<n^k$ y que $n^s<2^r$ se tiene $f(2^h)=4^h<f(n)^k$ y $f(n)^s<f(2^r)=4^r$, por lo que

$$4^{\frac{h}{k}}<f(n)<4^{\frac{r}{s}}$$

y, por tanto, $f(n)=n^2$.

48. [**9**(2) (2001) p. 207]. Las raíces de un polinomio de grado cuatro con coeficientes complejos están ubicadas en los vértices de un rectángulo con lados de longitud a y b en el plano complejo. Encontrar la distancia entre las raíces de la segunda derivada de este polinomio.

Solución por Antonio González Fernández, Universidad de Sevilla, España.

Las cuatro raíces del polinomio pueden escribirse como $z_1=z_0-A-B$, $z_2=z_0-A+B$, $z_3=z_0+A+B$, $z_4=z_0+A-B$, con A y B números complejos tales que $|A|=a/2$, $|B|=b/2$, $\Re(A\overline{B})=0$. El polinomio se escribirá entonces

$$\begin{aligned} P(z) &= k(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)= \\ &= k\left((z-z_0)^2-(A+B)^2)((z-z_0)-(A-B)^2\right) \\ &= k(u^2-S^2)(u^2-D^2), \end{aligned}$$

donde $u=z-z_0$, $S=A+B$, $D=A-B$. Derivando dos veces tenemos

$$\begin{aligned} P''(z) &= 2k(u^2-D^2)+8ku^2+2k(u^2-S^2) \\ &= 2k(6u^2-D^2-S^2). \end{aligned}$$

Las raíces de este polinomio son $\pm\sqrt{(S^2+D^2)/6}$ y la distancia buscada es

$$d=\sqrt{\frac{2}{3}}\left|\sqrt{S^2+D^2}\right|=\frac{2}{\sqrt{3}}\left|\sqrt{A^2+B^2}\right|.$$

Puesto que A y B pueden escribirse como

$$A = \frac{ae^{i\phi}}{2}, \qquad B = \frac{bie^{i\phi}}{2},$$

resulta

$$d = \sqrt{\frac{|a^2 - b^2|}{3}}.$$

Comentario del editor: También resuelto por Ignacio Larrosa Cañestro, quien observa que mediante una traslación y una rotación el problema puede reducirse al caso en que el rectángulo de las raíces tiene centro en el origen y lados paralelos a los ejes. Ignacio también menciona que para un polinomio de grado 3, la raíz de la derivada segunda es el baricentro del triángulo formado por las tres raíces del polinomio, mientras que las raíces de la derivada primera son los focos de la *elipse interior de Steiner* de dicho triángulo.

49. [**9**(2) (2001) p. 207]. Una función derivable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface la desigualdad $|f(x)| \geq |f'(x)|$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y al menos para un x_0 esta desigualdad es estricta, es decir, $|f(x_0)| > |f'(x_0)|$. Demostrar que la ecuación $f(x) = 0$ no tiene raíces.

Solución I por Julián Aguirre Estibalez, Universidad del País Vasco, España.

El problema es invariante por traslaciones en el eje de las x y por simetrías $x \mapsto -x$ y $f \mapsto -f$. Entonces sin pérdida de generalidad podemos suponer que $f(0) > 0$. Por continuidad, $f(x) > 0$ en un intervalo alrededor de 0. Supongamos por absurdo que $f(a) = 0$. Una vez más sin pérdida de generalidad podemos suponer que $a > 0$. Sea $b = \inf\{x > 0 : f(x) = 0\}$. Es claro que $0 < b \leq a$, $f(b) = 0$ y $f(x) > 0$ si $x \in [0, b)$. La función $g(x) = \log(f(x))$ está bien definida en $[0, b)$, es derivable y $|g'(x)| \leq 1$, de donde $|g(x) - g(0)| \leq x$ en [0,b). Pero por otro lado $\lim_{x\to b} g(x) = -\infty$, lo que es una contradicción.

El resultado se generaliza inmediatamente al caso en que $|f'| \leq c|f|$ para una constante $c > 0$.

Solución II por el editor. Afirmamos que el conjunto C de los ceros de f es abierto. En efecto, si $f(a) = 0$ entonces existe $r > 0$ tal que $|f(x)| < 1/2$ para todo x en $I = (a-r, a+r)$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer $r < 1/2$. Entonces para cada x en I existe un z en I tal que $|f(x)| = |f(x) - f(a)| = |f'(z)(x - a)| \leq |f(z)||x - a| \leq 1/4$, y reiterando este argumento resulta que en I se tiene $|f| \leq 1/8$, luego $|f| \leq 1/16, \ldots$ y en general $|f| \leq 1/2^n$ para todo $n > 0$. Conclusión: f es nula en I.

Ahora, como f es continua, C también es cerrado. Y como $\mathbb{R}$ es conexo, C es vacío o es todo $\mathbb{R}$. Pero esto último no es posible pues $|f(x_0)| > |f'(x_0)| \geq 0$, por lo tanto C es vacío.

53. [**9**(2) (2001) p. 207]. Calcular

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(\frac{\pi}{n}) \cos(\frac{2\pi}{n}) \cdots \cos(\frac{n\pi}{n}).$$

Solución por Ignacio Larrosa Cañestro, Instituto Rafael Dieste, A Coruña, España.

Hagamos

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{n} \cos(\frac{k\pi}{n}).$$

Si n es par uno de los factores es $\cos(\pi/2)$ y el producto es cero. Nos interesan entonces sólo los sumandos con n impar, y podemos escribir

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{k=1}^{2n+1} \cos(\frac{k\pi}{2n+1}). \qquad (\#1)$$

Calculemos el valor de los sumandos:

$$P(n) = \prod_{k=1}^{2n+1} \cos(\frac{k\pi}{2n+1}). \qquad (\#2)$$

Pongamos $m = 2n+1$, $c = \cos(t)$ y $s = \operatorname{sen}(t)$. Desarrollando el miembro derecho de la fórmula de De Moivre

$$\cos(mt) + i \operatorname{sen}(mt) = (c + is)^m$$

mediante el teorema del binomio, e igualando las partes reales de ambos miembros, resulta

$$\cos(mt) = \binom{m}{0} c^m - \binom{m}{2} c^{m-2} s^2 + \cdots + (-1)^{(m-1)/2} \binom{m}{m-1} c s^{m-1},$$

donde todos los exponentes de s son pares y los de c impares. Reemplazando $s^2 = 1 - c^2$ obtenemos de cada sumando uno de la forma $\binom{m}{k}c^m$ con signo positivo, y otros sumandos siempre con potencias impares de c. Por tanto, el polinomio en c correspondiente tiene término independiente nulo y coeficiente principal

$$\binom{m}{0} + \binom{m}{2} + \cdots + \binom{m}{m-1} = 2^{m-1},$$

quedando

$$\cos(mt) = 2^{m-1}c^m + \cdots + (-1)^{(m-1)/2}mc \qquad (\#3)$$

con potencias de c exclusivamente impares.

Si $t = k\pi/(2n+1)$ entonces $\cos(mt)$ toma el valor 1 o -1 según que k sea par o impar y $\cos^2(mt) = 1$. Por lo tanto

$$\left(2^{m-1}c^m + \cdots + (-1)^{(m-1)/2)}mc\right)^2 - 1 = 0,$$

y

$$2^m c^{2m} + \cdots + m^2c^2 - 1 = 0,$$

ecuación en la que c está elevada exclusivamente a potencias pares, puesto que en [#3] todas son impares. Haciendo $d = c^2$ y dividiendo por 2^m, obtenemos la ecuación

$$d^m + \cdots + \frac{m^2}{2^m}d - \frac{1}{2^m} = 0.$$

Las m soluciones de esta ecuación son los cuadrados de los cosenos de los ángulos $k\pi/(2n+1)$, $k = 1, \ldots, 2n+1$. Por tanto, según las relaciones de Cardano-Vieta, $(P(n))^2 = 1/2^m$ y $P(n) = \pm 2^{1-m} = \pm 2^{-2n}$. Para dilucidar el signo basta considerar que los ángulos $k\pi/(2n+1)$ con $k = 1, \ldots, n$ están en el primer cuadrante, mientras que los $n+1$ restantes, en el segundo. Por lo tanto $P(n) = (-1)^{n+1}4^{-n}$ y finalmente

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} P(n) = -\frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)} = -\frac{4}{5}.$$