Divulgaciones Matemáticas Vol. 10 No. 1(2002), pp. 51–62

Construcción de un Concepto-Imagen Adecuado al Concepto de Continuidad de Cauchy

Construction of an Image-concept Appropriate for Cauchy's Continuity Concept

Pedro Campillo Herrero (pcampillo@umh.es)
Universidad Miguel Hernández de Elche, España
Pedro Pérez Carreras (pperezc@mat.upv.es)
Universidad Politécnica de Valencia, España

Resumen

En [1] expusimos una línea de investigación encuadrada en el modelo educativo de van Hiele cuyo objetivo último era la elaboración de una propuesta metodológica fiable de introducción a la definición formal de continuidad de una función en un punto. Aquí presentamos nuestra propuesta.
Palabras y frases clave: modelo de van Hiele, continuidad, concepto-imagen.

Abstract

In [1] we explained how to proceed in the study of the notion of functional continuity framed in van Hiele's educational model. Our final goal was to provide a methodological proposal of introduction of this notion. Here we present our proposal.
Key words and phrases: van Hiele's model, continuity, image-concept.

Nomenclatura e Intenciones

La estructura cognitiva asociada con un determinado concepto matemático incluye todas las imágenes mentales, representaciones visuales, experiencias

Recibido 2001/04/10. Aceptado 2002/04/05.
MSC (2000): Primary 97C30; Secondary 97C50.

e impresiones, así como propiedades y procesos asociados (que llamaremos **concepto-imagen**, siguiendo a Vinner, Tall y Dreyfus y "estructuras elaboradas" o "esquemas" según los científicos cognitivos) y ha ido emergiendo con el tiempo mediante experiencias de todos los tipos, cambiando a medida que el individuo recibe nuevos estímulos y madura e influyéndose por desviaciones, aparentemente triviales, de un entendimiento válido. A medida que este concepto-imagen se desarrolla, no resulta necesario que sea coherente en cada momento. Así, resulta posible que visiones conflictivas sean evocadas en tiempos diferentes, sin que el individuo sea consciente del conflicto, hasta que son evocadas simultáneamente. Su coincidencia o no con lo que podríamos llamar concepto-definición (la formulación convencional lingüistica que demarca precisamente las fronteras de aplicación del concepto) es fuente de muchas disfunciones en el aprendizaje.

Es nuestra intención presentar una propuesta metodológica que consiga la asimilación de la esencia del concepto de **continuidad de una función en un punto** (es decir, la expresión verbal de las ideas matemáticas subyacentes y no la capacidad de formalización matemática en lenguaje algebraico), ofreciendo las experiencias y ejemplos pertinentes, que sirvan de base y potencien el desarrollo de un razonamiento cada vez más maduro que, partiendo de premisas simples visuales, llegue a lo que es una pareja de desigualdades condicionadas, que es la esencia de la definición de continuidad, tal como hoy día la aceptamos tras las rigorizaciones de A. Cauchy y K. Weierstrass. Partiendo desde una imagen estática del concepto, pasaremos a un concepto-imagen correcto del concepto-definición de continuidad en la forma de una imagen dinámica, proporcionando un método que permita discutir si una función es continua en un punto o no, para luego sentar las bases hacia la formulación habitual algebraica. Este material no se presenta como un marco cerrado y debe de ser adaptado por el docente a las circunstancias específicas de sus alumnos.

Preliminares

La presentación habitual del concepto de continuidad en el sentido de Cauchy-Weierstrass (la formulación "épsilon-delta")

(i) requiere no basarla en todas aquellas consideraciones visuales habituales que la palabra continuidad pueda sugerir, al ser esta definición esencialmente una consideración sobre controlabilidad local de errores y, aunque pueda tener un equivalente visual (eso es precisamente lo que buscamos en esta propuesta metodológica), ese equivalente no corresponde a posibles levantamientos de lápices a la hora de plasmar la gráfica de la función correspondiente (Propiedad del Valor Intermedio) u otras imágenes de no rotura de la gráfica.

(ii) suele sustentarse en una visualización estática (para una función f concreta y un punto a de su dominio de definición, dado un distanciamiento vertical de la recta y = f(a), encontramos un pedazo de gráfica que, conteniendo al punto del plano (a,f(a)), se halla localizado dentro de los límites marcados por ese distanciamiento vertical). Al no transmitir la esencia del concepto de límite como un proceso indefinido, no es adecuada y sólo nos sirve como punto de partida de construcción de nuestro concepto-imagen dinámico.

(iii) requiere de una madurez algebraica en tres vertientes: algebraica es la traducción de efectos visuales en símbolos, algebraica es la manipulación de símbolos (como, por ejemplo, módulos y sus manipulaciones) y algebraica también es la explicitación de las leyes lógicas inherentes al condicionamiento de las desigualdades: “para todo....., existe.....”

No es habitual que las dos primeras vertientes estén presentes en alumnos preuniversitarios y la tercera, aunque disponible, necesita de entrenamiento más largo que el que habitualmente se proporciona (no basta poner los cuantificadores en su posicionamiento correcto y tirar para adelante).

Nuestra propuesta metodológica no requerirá madurez algebraica, por lo que será fuertemente visual y la vertiente lógica se deberá plasmar en el condicionamiento verbal de unas imágenes a otras, lo que lograremos vía el programa **DERIVE®** (instrucciones en negrita) como asistente matemático.

Supondremos que

(a) los alumnos sometidos a la propuesta metodológica reconocen objetos como curva y punto con sus propiedades matemáticas elementales: una curva está constituida por puntos y los puntos no tienen dimensión. Debemos cerciorarnos de que ésto es así y, caso de notar dificultades en esta concepción “ideal” de entes geométricos, debemos lograr su aceptación.

(b) aunque alumnos puedan tener asociado el concepto de curva al de función, evitaremos la mención del término “función” a lo largo de la propuesta, dada la enorme cantidad de obstáculos cognitivos asociados a este término (como han probado numerosas experiencias investigadoras) y presentaremos solamente representaciones gráficas de funciones y no las expresiones algebraicas de las que provienen, para evitar todo tipo de manipulación algebraica.

(c) el concepto-imagen que de una curva posee un alumno es de carácter estático.

Buscamos una propuesta metodológica que transmita la esencia de la definición de continuidad funcional: sustituiremos "función" por "curva" (pero no la imagen de (c), sino algo dinámico y deformable que precisaremos) y todo el proceso de creación de imágenes adecuadas nos llevará al concepto-imagen de "curva controlable localmente", cuya formulación verbal por parte del alumno será el paso inmediatamente anterior a la formulación algebraica de continuidad de una función en un punto.

1 Primer Objetivo: curva deformable

Nuestro primer objetivo es la creación de un concepto-imagen dinámico y deformable de curva, en la que podremos ver más o menos alejados los puntos que la constituyen, lo que es imprescindible para realizar las aproximaciones sucesivas que involucra encubiertamente el concepto de límite subyacente a la definición de continuidad. Trabajando con hilos y gomas, comparando la propiedad de elasticidad que tiene la goma con el hilo y marcando dos puntos en colores distintos, podremos observar que la distancia entre los puntos aumenta al estirar la goma, volviendo ésta a la forma original cuando dejamos de tensionarla. Esta imagen nos deberá servir para introducir el concepto de curva matemática como una goma ideal que nos permite estirarla todo lo que deseemos. No podemos programar cuántos ejercicios sean necesarios para que un alumno asimile la idea, ya que cada alumno realiza su proceso individual de razonamiento, pero, en cualquier caso, para continuar con nuestra experiencia, necesitaremos respuestas adecuadas a las preguntas:

Evaluación:

- ¿Observa el estiramiento como una separación entre puntos?
- ¿Observa la goma estirada como una presentación diferente de la misma?
- ¿Observa que estirar la goma no afecta a la misma y vuelve posteriormente a su forma original?

2 Construcción del estiramiento horizontal.

¿Cómo provocar un estiramiento horizontal semejante al anterior sobre una figura plana sobre papel o pantalla, figura que deberá exhibir las características de lo que entendemos por curva, es decir, la "goma ideal"? Primero, trabajaremos con una lupa sobre ejemplos de curvas presentadas en papel, con la intención de ver sus puntos más separados (para lo que las curvas llevarán pintados dos puntos de diferentes colores). La lupa permite separar los puntos horizontalmente, al mismo tiempo que también tiene el efecto no deseado de verlos separados verticalmente, así que la lupa no produce el efecto de separación que realizábamos con el estiramiento de la goma y no es el instrumento adecuado para reproducir el estiramiento. Un asistente matemático puede producir en pantalla el efecto deseado con un escalamiento de abscisas, dejando inalterable la escala de ordenadas. Ya sobre pantalla, compararemos el efecto Zoom (similar a la lupa) y el estiramiento horizontal sobre distintas curvas y haremos observar como actúa incidiendo en la separación de los puntos de la curva.

Se hace necesario presentar también ejemplos de curvas oscilantes en un punto como f(x) = sen(1/x) alrededor del origen, ya que posteriormente ésta y sus variantes serán de interés en la experiencia. Evaluamos si ha asimilado este paso con las preguntas:

- ¿Ha construido la idea de estiramiento?
- ¿Entiende el estiramiento como separación de puntos horizontalmente?
- ¿Observa el Zoom y el estiramiento como deformaciones distintas?
- ¿Tiene claro que las curvas no se rompen al estirarlas?
- ¿Encuentra la explicación de lo que sucede al estirar curvas oscilantes?

En el caso de que no supere la evaluación, deberemos seguir trabajando con el asistente matemático, sobre estiramiento (tecla **F5**) y Zoom (tecla **F9**), ofreciéndole más experiencias, pero evitando en todo momento presentarle las ecuaciones de las curvas dibujadas, ya que sólo provocaría obstáculos de comprensión. Este paso permite asimilar que existen distintos tipos de deformaciones para una curva, y nos brinda nuestra nueva herramienta para el estudio de la aproximación local: el estiramiento horizontal, que posteriormente tendremos que utilizar.

3 Trozo controlado

Necesitamos introducir lo que entendemos por "trozo controlado": primero en el contexto del lenguaje cotidiano, introduciendo ejemplos de situaciones que el alumno entienda como "controladas" (no necesariamente en el ámbito geométrico) para incidir en la idea de control como la no superación de unos límites establecidos. Posteriormente, introducimos la idea de trozo controlado de curva pasando por la noción de distanciamiento vertical: introducimos parejas de rectas horizontales para identificar el "trozo controlado" con la búsqueda de las intersecciones entre rectas y curva.

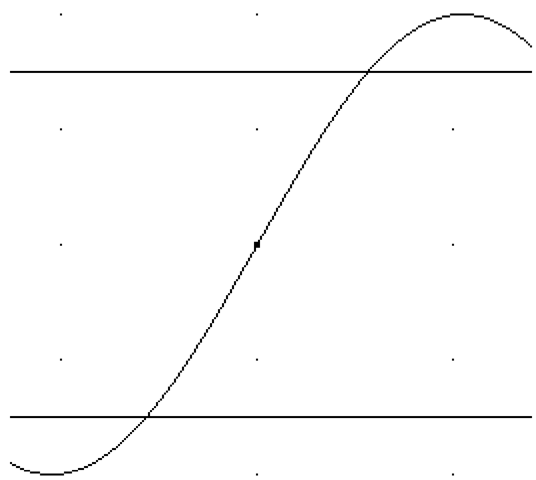

Imagen 1.

Cuando el alumno es capaz de identificar cuál es el trozo de curva controlado en diferentes curvas, le haremos hincapié en la localidad de la situación, indicándole que el trozo controlado que buscamos es el relativo a un punto especifico.

Pasamos a combinar el nuevo elemento "trozo de curva controlado" con la herramienta de "estiramiento horizontal": partimos de una función como **[sign(x)*2*sin(150*(ê^(-(3*x)^2)-1)),[0,0],1,-1]** y utilizamos una pareja de rectas más próximas entre sí y=0.5, y=-0.5 .

Evaluamos si el alumno ha asimilado este paso con las preguntas:

- ¿Busca las intersecciones entre rectas y curvas?
- ¿Sabe determinar el trozo controlado?
- ¿Lo aprecia como una búsqueda local, en los alrededores de un punto?
- ¿Tiene claro que el trozo controlado no cambia con las deformaciones?

Si la evaluación fuera negativa seguiríamos practicando con la búsqueda del "trozo controlado", combinándolo con las deformaciones, señalando en algunos casos puntos de diferentes colores para que observe que se separan con las deformaciones, pero que no cambia su distanciamiento vertical con el estiramiento horizontal.

4 Utilización adecuada de las deformaciones

Debemos de evitar que el alumno se sitúe en una situación mecánica, en la que utilice el estiramiento horizontal por sistema para determinar el trozo de curva controlado. Para evitarlo, proponemos situaciones en la que no se aprecien claramente las intersecciones entre las rectas horizontales y la curva, para producirle la necesidad de utilizar las deformaciones de forma adecuada: combinaciones de Zoom y estiramientos. Un ejemplo en el que se debe utilizar un Zoom en vez de un estiramiento horizontal sería
[sqrt(abs(x))*sin(x)+1/5*sin(60*x)+1/10*cos(100*x),[0,0.1],0.2,0].
Al mismo tiempo vamos cambiando la pareja de rectas horizontales para que observe el dinamismo del proceso: lo más adecuado es ir acercándolas al punto y así observará la dependencia existente entre la variable "pareja de rectas horizontales" y el trozo controlado.

El alumno habrá cambiado sus objetivos de buscar un trozo de curva controlado (fijándose en las intersecciones con las rectas) a observar la dependencia del trozo controlado con la variable pareja de rectas horizontales.

Evaluamos la asimilación de este paso:

- ¿Utiliza adecuadamente las deformaciones para mejorar la visión de las intersecciones?
- ¿Aprecia la dependencia del trozo controlado con las rectas horizontales dadas?

5 No existencia de trozo controlado

Cuando el alumno se desenvuelva con la suficiente seguridad en el paso anterior, presentaremos situaciones en las que no es posible encontrar el trozo controlado, junto con situaciones donde sí es posible, dependiendo de la pareja de rectas horizontales dada. No incidiremos en las discontinuidades de salto o evitables, ya que estas reforzarían la imagen intuitiva y errónea de que una función continua como, exclusivamente, aquella sin roturas. Por ello, buscaremos nuestros ejemplos en funciones como f(x):=sen(1/x), f(0):=0 en el punto 0, donde el alumno observa la imposibilidad de encontrar el trozo controlado. Por ejemplo, **[x^2 + SIN(1/x), [0, 0], -0.2, 0.2]** (ver Imagen 2).

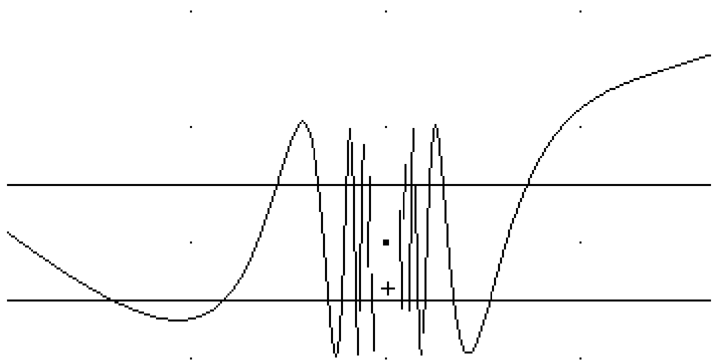

Imagen 2.

Este paso suele representar una dificultad seria para el alumno, ya que anteriormente le estábamos pidiendo que buscara la intersección que permitiera identificar el trozo controlado y, ahora, pasamos a pedirle que determine si existe o no el trozo controlado para la curva y la pareja de rectas horizontales correspondiente. Para ello, el alumno en principio realizará estiramientos horizontales hasta que observe que el posible proceso indefinido de acercamiento no le va a permitir observar las intersecciones entre la recta y la curva, por lo que deberá concluir la no existencia de trozo controlado.

Evaluamos

- ¿Encuentra o no trozo controlado, después de un proceso de deformación de la curva?

- ¿Afirma la no existencia de trozo controlado?

En el caso de que no asimile este paso deberemos seguir practicando con nuevas situaciones, hasta que tenga la suficientes experiencias personales como para poder determinar que no existe trozo controlado. Nos podemos ayudar de unas rectas verticales, que acoten el trozo controlado (encajen en un rectángulo) y que posteriormente utilizaremos para otro propósito (investigación sobre su comprensión en los aspectos lógicos del concepto-imagen que estamos construyendo).

6 Para cualquier par de rectas horizontales

Hasta ahora hemos abundado en la situación estática correspondiente a "dado un épsilon concreto encontrar un delta apropiado", pero debemos dar el paso de ir practicando con cualesquiera épsilons, para lo que recurriremos a presentarle al alumno una curva con una variedad de parejas de rectas horizontales cada vez más próximas preestablecidas y pedirle el trozo controlado que corresponda. Una vez pasado satisfactoriamente este paso, preguntaremos, en ausencia de rectas horizontales, como procedería para cualquier pareja de rectas horizontales. Dos curvas con apariencia similar pero que se comportan de distinta manera, en relación a lo expuesto, son: $\mathbf{SIGN(x) \cdot SIN(150 \cdot (\hat{e}\hat{\ }(-(3 \cdot x)\hat{\ }2) - 1)) + x}$ y $\mathbf{SIN(4/x) + x}$.

Evaluamos

- ¿Utiliza las deformaciones antes de responder?
- ¿Diferencia las curvas en las que podemos encontrar "trozo controlado" para cualquier pareja de rectas horizontales, de las que no es posible?
- ¿Observa que la posibilidad de encontrar "trozo controlado" es una propiedad intrínseca de la curva?

Es importante constatar la evolución del razonamiento que se haya podido producir desde la búsqueda del trozo controlado (fijándose en las intersecciones con la pareja de rectas horizontales) a la discusión de la existencia de trozo controlado para distintas parejas de rectas horizontales de partida prefijadas, y luego a la generalización que supone la discusión de existencia de trozo controlado, sin necesidad de parejas de partida, llegando a considerar el proceso como una propiedad intrínseca de la curva.

7 Distinción entre comenzar por parejas de rectas horizontales o comenzar por parejas de rectas verticales.

Vamos a pasar a estudiar el delicado aspecto lógico de la encubierta definición de límite funcional como es la diferencia entre "dado un épsilon encontrar un delta" y la definición que obtendríamos si diéramos un delta y quisiéramos encontrar un épsilon, sólo como una verificación de que entiende el posicionamiento de los cuantificadores lógicos y las diferencias que se producen al alterarlo.

Para ello presentamos la situación que se obtiene al comenzar por parejas de rectas verticales, buscando el trozo controlado y las rectas horizontales correspondientes. Presentamos situaciones que hayamos observado anteriormente comenzando por parejas de rectas horizontales, y evaluamos la reacción de los alumnos: tomamos **[xˆ2 + SIN(1/x), [0, 0], x = -0.2, x = 0.2].**

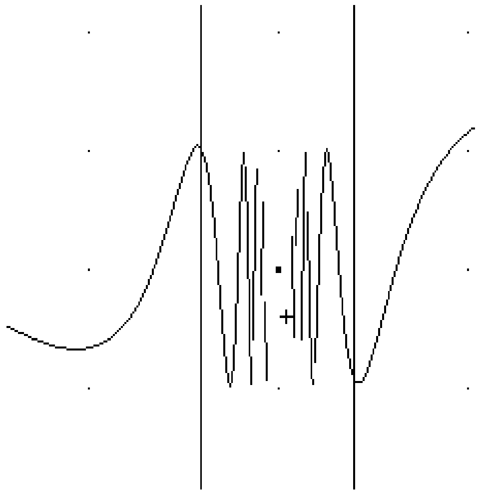

Imagen 3.

- ¿Considera que es diferente el resultado al comenzar por rectas horizontales que el de comenzar por rectas verticales?
- ¿Observa que comenzando por rectas verticales siempre podrá encontrar un trozo controlado?
- ¿Concluye que son dos conceptos distintos los que se obtienen?

8 Método de clasificación.

Ya estaríamos en condiciones de solicitarle la definición de continuidad entendida como controlabilidad local de curvas, para lo que proponemos la idea de "curva controlable localmente" como aquella que, para cualquier pareja de rectas horizontales, siempre podemos encontrar un trozo controlado. Se le propone la búsqueda de un método de clasificación y su aplicación a un conjunto de curvas, pasando antes por ejemplos que le permitan observar que las curvas controlables tienden a quedarse planas ante la realización de estiramientos, propiedad que no se da en las curvas no controlables.

Evaluamos:

- ¿Da un método correcto?
- ¿Lo aplica correctamente?

En caso de no superar la evaluación, se hacen necesarios más ejemplos, en este sentido, donde aprecie como los casos en los que era imposible encontrar el trozo controlado se corresponden con las curvas no controlables, y, como éstas no tienden a quedarse planas mediante estiramientos horizontales. Esperamos que el alumno ofrezca el método "de estirar la curva y aquellas que tiendan a quedarse plana será controlable".

9 Algebrización

La explicitación verbal del método por parte del alumno conlleva una evolución de razonamiento desde premisas muy elementales a la idea de controlabilidad con su manejo implícito de los cuantificadores lógicos y por tanto, habrá asimilado la idea de continuidad, aunque no la reconocerá con ese nombre. Haciéndole saber que el fenómeno estudiado hasta ahora también se le conoce con el término "continuidad", será conveniente enfrentarle con contraejemplos a su concepto-imagen del término verbal continuidad como "no rotura de la curva", para lo que pueden ser útiles funciones como

$$f(x) = \sin(\frac{1}{E(\frac{1}{x})})$$

siendo $E(x)$ la parte entera de x (**[SIN(1/FLOOR(1/x)), [0, 0]]**). Esta función continua en x=0, como se puede comprobar al estirarla horizontalmente, pero con una imagen que no se corresponde con la de no rotura de la curva.

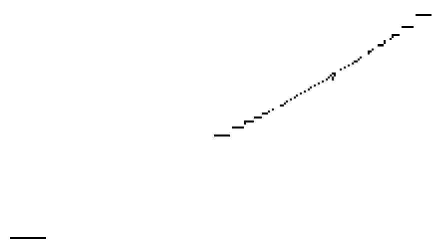

Imagen 4.

También podemos trabajar con las discontinuidades de salto, para que compruebe su no controlabilidad local. Aprovechamos para introducir la definición formal de continuidad local, identificando:

"$\varepsilon > 0$" con: "una pareja de rectas horizontales"

"a" con: "un punto"

"$\exists\delta$ tal que $|x - a| < \delta$" con: "podemos encontrar una pareja de rectas verticales"

"$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$" con: "el rectángulo contiene un trozo de curva, es decir, hay un trozo de curva controlado"

Así, el concepto-definición habitual queda identificado con el concepto-imagen de "*para cualquier pareja de rectas horizontales equidistantes de este punto, podemos encontrar un trozo de curva controlado*". Debemos aprovechar para observar las diferencias del concepto-definición que se obtendría al comenzar por parejas de rectas verticales, en lugar de horizontales, y acompañar el concepto-definición de ejemplos para observar si el concepto-imagen de controlabilidad es el que preside sus manipulaciones del correspondiente concepto-definición.

Referencias

[1] Campillo Herrero, P., Pérez Carreras, P. *La Noción de Continuidad desde la Óptica de los Niveles de van Hiele*, Divulgaciones Matemáticas **6**(1) (1998), 69–80.