Divulgaciones Matemáticas Vol. 8 No. 2 (2000), pp. 177–184

Problemas y Soluciones

Problems and Solutions

Editor: José Heber Nieto (jhnieto@luz.ve)
Departamento de Matemática y Computación
Facultad Experimental de Ciencias
La Universidad del Zulia
Apartado Postal 526
Maracaibo. Venezuela.

Los problemas apropiados para esta sección son aquellos que puedan ser abordados por un estudiante de matemática no graduado sin conocimientos especializados. Problemas abiertos conocidos no son aceptables. Se prefieren problemas originales e interesantes. Las soluciones y los problemas propuestos deben dirigirse al editor, en español o inglés, a la dirección arriba indicada. También pueden enviarse por correo electrónico, preferiblemente como un archivo fuente en LaTeX. Las propuestas deben acompañarse de la solución, o al menos de información suficiente que haga razonable pensar que una solución puede ser hallada.

Appropriate problems for this section are those which may be tackled by undergraduate math students without specialized knowledge. Known open problems are not suitable. Original and interesting problems are preferred. Problem proposals and solutions should be sent to the editor, in Spanish or English, to the address given above. They may also be sent by e-mail, preferably as a LaTeX source file. Proposals should be accompanied by a solution or, at least, enough information on why a solution is likely.

Durante el presente año la participación venezolana en olimpíadas matemáticas fue bastante intensa. Luego de las pruebas preliminares y semifinales de la Olimpíada Matemática Venezolana, durante los días 8 y 9 de junio se realizó la **Olimpíada Bolivariana de Matemáticas**, certamen por correspondencia organizado por la Universidad Antonio Nariño, de Colombia (http://olimpia.uanarino.edu.co/). En esta primera edición los países participantes fueron Colombia, Ecuador, Perú y Venezuela. El certamen se realizó en dos niveles: intermedio y superior. Más abajo se incluyen los enunciados correspondientes al segundo nivel (problemas 28 al 32). Venezuela tuvo un buen desempeño en esta competencia obteniendo varias medallas, incluida una de oro conquistada por el estudiante zuliano David Seguí.

Del 4 al 8 de julio se realizó en Caracas el certamen final de la **XXV Olimpíada Matemática Venezolana**. Participaron 36 estudiantes finalistas de todo el país. El Estado Zulia tuvo una importante representación compuesta por nueve estudiantes, todos los cuales obtuvieron medallas. Ellos son: María Virginia Amesty, Pilar Cuadra, Carlos Henríquez, Christopher Di Marco, Angel Medina, Rossana Rincón, Jeffrey Rojas, Enrique Restrepo y David Seguí. Felicitaciones a todos ellos y muy en especial a María Virginia Amesty y a David Seguí, quienes obtuvieron sendas preseas doradas.

Del 7 al 16 de julio se realizó en El Salvador la **II Olimpíada Matemática de Centro América y el Caribe**, a la cual asistimos formando parte de la delegación venezolana. Esta competencia tiene como objetivo promover la participación de los países de la región en concursos olímpicos de matemática. Los participantes no deben haber cumplido los dieciséis años de edad al 31 de diciembre del año inmediato anterior a la celebración de la olimpíada, ni deben haber participado en olimpíadas Iberoamericanas o Internacionales. Como se ve, se busca estimular la participación de los más jóvenes como preparación para eventos internacionales de mayor exigencia.

En esta ocasión participaron los siguientes países: Colombia, Costa Rica, Cuba, El Salvador, Honduras, México, Nicaragua, Puerto Rico y Venezuela.

En cada uno de los dos días de competencia se propusieron tres problemas, otorgándose a los participantes cuatro horas para resolverlos. Cada problema tenía un valor de siete puntos. El país ganador fue Cuba, cuyos representantes obtuvieron dos medallas de oro y una de plata, adjudicándose también la Copa *El Salvador*.

Los representantes de Venezuela fueron: Adolfo Rodríguez (Estado Guárico), quien obtuvo medalla de plata; Enrique Restrepo (Estado Zulia), quien obtuvo medalla de bronce, y Héctor Chang (Distrito Federal), integrante del equipo ganador en la prueba por equipos.

La organización de esta olimpíada, que contó con el apoyo del Ministerio de Educación de El Salvador, la Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura y una amplia colaboración de la empresa privada, fue excelente desde todo punto de vista. Los seis problemas propuestos en esta competencia aparecen más abajo, con los números 33 al 38. La III Olimpíada Matemática de Centro América y el Caribe se realizará en Colombia el año próximo.

Del 13 al 25 de julio tuvo lugar en Taejon, Corea, la **XLI Olimpíada Internacional de Matemáticas**, con la participación de 82 países. Venezuela participó con sólo dos representantes (las delegaciones completas son de seis miembros), David Seguí y Kevin Hernández, a quienes en esta ocasión no les acompañó la fortuna. Sin embargo sabemos que dieron lo mejor de sí y su actuación nos confirma que vamos por el buen camino.

Y para finalizar, entre el 16 y el 24 de septiembre se realizó la **XV Olimpíada Iberoamericana de Matemáticas**, de la cual este año Venezuela fue el país anfitrión. El país ganador fue Brasil, que obtuvo tres medallas de oro y la Copa *Puerto Rico*. Las restantes preseas doradas se distribuyeron así: México dos, Argentina una y Venezuela una obtenida por David Seguí, el venezolano más premiado en competencias nacionales e internacionales de matemática. Los seis problemas propuestos aparecen más abajo con los números 39 al 45. La XVI Olimpíada Iberoamericana se realizará en El Salvador el año próximo.

1 Problemas propuestos

27. a) Sea $ABCD$ un rectángulo tal que $AB = 1$cm y $BC = 2$cm. Sean K el punto medio de AD, L el punto de intersección de AC con BK y M y N los puntos medios de BK y AC respectivamente. Encontrar el área del triángulo LMN.

    b) Sea $ABCD$ un rectángulo tal que $AB = 1$cm y $BC = n$ cm. Sean C' y D' puntos sobre los segmentos BC y AD respectivamente, de modo que $ABC'D'$ es un cuadrado y E un punto del segmento BC tal que $EC = 1$cm. Sean L y M los puntos de intersección de BD' con AC y AE respectivamente y N el punto de intersección de $C'D'$ y AC. Encontrar el área del triángulo LMN.

28. Un rectángulo $ABCD$ de caucho de $m \times n$ se dobla de modo que AB coincida con DC para obtener un cilindro. Luego se unen los extremos de este cilindro para formar una llanta. De este modo la llanta tiene mn casillas. Cada una de las casillas de la llanta junto con las cuatro casillas vecinas que comparten un lado con ella forma una figura de cinco casillas, a la que vamos a llamar *cruz*. Encontrar todos los valores de m y n para los cuales la llanta obtenida se puede recubrir con cruces, de manera tal que todas las casillas estén cubiertas por alguna cruz y no haya dos cruces superpuestas.

29. Sea n un entero positivo par. Hallar todas las triplas de números reales (x, y, z) tales que

$$x^n y + y^n z + z^n x = xy^n + yz^n + zx^n.$$

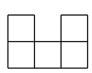
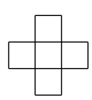
30. Encontrar todos los enteros positivos a, b, c tales que $ab+bc+ca$ es un número primo y
$$\frac{a+b}{a+c} = \frac{b+c}{b+a}.$$

31. a) Sean a_1, A_1, a_2, A_2, a_3, A_3 números reales positivos tales que $a_i + A_i = k$, donde k es una constante dada. Demostrar que
$$a_1A_2 + a_2A_3 + a_3A_1 < k^2.$$
b) Sean a_1, A_1, a_2, A_2, a_3, A_3, a_4, A_4 reales positivos tales que $a_i+A_i = k$, donde k es una constante dada. Si $a_i \geq A_i$, demostrar que
$$a_1A_2 + a_2A_3 + a_3A_4 + a_4A_1 \leq k^2,$$
y determinar cuándo se tiene la igualdad.

32. Encontrar el número de formas de escribir enteros no negativos en cada casilla de un tablero de $n \times n$, de modo que la suma de los números en cada fila y cada columna es igual a 3 y en cada fila y en cada columna sólo puede haber uno o dos números diferentes de cero.

33. Encontrar todos los números naturales de tres dígitos abc ($a \neq 0$) tales que $a^2 + b^2 + c^2$ es divisor de 26.

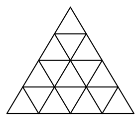
34. Determinar todos los enteros $n \geq 1$ para los cuales es posible construir un rectángulo de lados 15 y n con piezas congruentes a

 y .

Notas:
a) Las piezas no deben superponerse ni dejar huecos.
b) Los cuadritos de las piezas son de lado 1.

35. Sea $ABCDE$ un pentágono convexo (las diagonales quedan dentro del pentágono). Sean P, Q, R y S los baricentros de los triángulos ABE, BCE, CDE y DAE, respectivamente. Demostrar que $PQRS$ es un paralelogramo y que su área es igual a 2/9 del área del cuadrilátero $ABCD$.

36. En la figura, escribir un entero dentro de cada triangulito de manera que el número escrito en cada triangulito que tenga al menos dos vecinos sea igual a la diferencia de los números escritos en algún par de vecinos.



Nota: Dos triangulitos son *vecinos* si comparten un lado.

37. Sea ABC un triángulo rectángulo, C_1 y C_2 dos circunferencias que tienen a los lados AB y CA como diámetros, respectivamente. C_2 corta al lado AB en el punto F ($F \neq A$) y C_1 corta al lado CA en el punto E ($E \neq A$). Además, BE corta a C_2 en P y CF corta a C_1 en Q. Demostrar que las longitudes de los segmentos AP y AQ son iguales.

38. Al escribir un entero $n \geq 1$ como potencia de 2 o como suma de potencias de 2, donde cada potencia aparece a lo más dos veces en la suma, se tiene una *representación buena* de n.

    a) Escriba las 5 representaciones buenas de 10.

    b) ¿Qué enteros positivos admiten un número par de representaciones buenas?

39. Se construye un polígono regular de n lados ($n \geq 3$) y se enumeran sus vértices de 1 a n. Se trazan todas las diagonales del polígono. Demostrar que si n es impar, se puede asignar a cada lado y a cada diagonal un número entero de 1 a n, tal que se cumplan simultáneamente las siguientes condiciones:

    1. El número asignado a cada lado o diagonal sea distinto a los asignados a los vértices que une.

    2. Para cada vértice, todos los lados y diagonales que compartan dicho vértice tengan números diferentes.

40. Sean S_1 y S_2 dos circunferencias, de centros O_1 y O_2 respectivamente, secantes en M y N. La recta t es la tangente común a S_1 y S_2, más cercana a M. Los puntos A y B son los respectivos puntos de contacto de t con S_1 y S_2, C el punto diametralmente opuesto a B y D el punto de intersección de la recta O_1O_2 con la recta perpendicular a la recta AM trazada por B. Demostrar que M, D y C están alineados.

41. Encontrar todas las soluciones de la ecuación.

$$(x+1)^y - x^z = 1$$

para x, y, z enteros mayores que 1.

42. De una progresión aritmética infinita 1, a_1, a_2,... de números reales se eliminan términos, obteniéndose una progresión geométrica infinita 1, a_{n_1}, a_{n_2},... de razón q. Encontrar los posibles valores de q.

43. Hay un montón de 2000 piedras. Dos jugadores se turnan para retirar piedras, alternadamente, de acuerdo a las siguientes reglas:

    1. En cada jugada se pueden retirar 1, 2, 3, 4 o 5 piedras del montón.
    2. En cada jugada se prohibe que el jugador retire la misma cantidad de piedras que retiró su oponente en la jugada previa.

    Pierde el jugador que en su turno no pueda realizar una jugada válida. Determinar cuál jugador tiene estrategia ganadora y encontrarla.

44. Un hexágono convexo se denomina *bonito* si tiene cuatro diagonales de longitud 1, cuyos extremos incluyen todos los vértices del hexágono.

    1. Dado cualquier número k, mayor que 0 y menor o igual que 1, encontrar un hexágono bonito de área k.
    2. Demostrar que el área de cualquier hexágono bonito es menor que $\frac{3}{2}$.

2 Soluciones

15. [**7**(2) (1999) p. 194]. Encontrar un entero positivo n de 1000 cifras, todas distintas de cero, con la siguiente propiedad: es posible agrupar las cifras de n en 500 parejas de tal manera que si multiplicamos las dos cifras de cada pareja y sumamos los 500 productos obtenemos como resultado un número m que es divisor de n.

    Solución I por Wilson Pacheco, Facultad de Ciencias, Universidad del Zulia (`wpacheco@luz.ve`).

    Sea $n = \underbrace{11\dots11}_{997 \text{ unos}}232$. La suma de los productos de pares de dígitos consecutivos de n es $m = 498 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 506$, que es divisor de n.

    Comentario del editor: No sabemos cómo encontró Wilson Pacheco la solución anterior, pero es correcta. Observemos que $506 = 2 \cdot 11 \cdot 23$, y que n es divisible entre 2 y 11 por los criterios usuales de divisibilidad. Si no se tiene Maple o algún software semejante a mano, puede verificarse que $23 \mid n$ observando que $n = (10^{1000} - 1)/9 + 121$ y usando la congruencia $10^{22} \equiv 1 \pmod{23}$ (Fermat).

Otra forma de construir soluciones consiste en elegir los últimos cuatro dígitos para que el número sea múltiplo de $5^4 = 625$, luego de lo cual tenemos amplia libertad para escoger las cifras restantes y aparearlas de modo que la suma de productos sea 625. Como no se permiten ceros podemos usar las terminaciones $625 \cdot 3 = 1875$, $625 \cdot 5 = 3125$, $625 \cdot 7 = 4375$ y $625 \cdot 9 = 5625$ y obtener, por ejemplo: $\underbrace{1 \ldots 1}_{994 \text{ unos}} 994375$ y $\underbrace{1 \ldots 1}_{992 \text{ unos}} 27891875$.

17. [**7**(2) (1999) p. 194]. En el trapecio $ABCD$ de bases AB y CD, sea M el punto medio del lado DA. Si $\overline{BC} = a$, $\overline{MC} = b$ y el ángulo MCB mide 150^o, hallar el área del trapecio $ABCD$ en función de a y b.

    Solución por Wilson Pacheco, Facultad de Ciencias, Universidad del Zulia (`wpacheco@luz.ve`).

    Sea N el punto medio del lado BC. Entonces el área del trapecio es $\overline{MN} \cdot h$, donde h es la altura del trapecio $ABCD$. El área del triángulo MNC es $\overline{MN} \cdot h/4$, la cuarta parte del área del trapecio. En dicho triángulo la altura sobre el lado NC es $\overline{MC} \cdot \operatorname{sen}(150°) = b/2$. Luego el área del triángulo MNC es $ab/8$ y el área del trapecio $ABCD$ es $ab/2$.

    También resuelto por: María Cristina Solaeche (Facultad de Ingeniería, Universidad del Zulia).

18. [**7**(2) (1999) p. 194]. Sea a un entero positivo impar mayor que 17, tal que $3a - 2$ es un cuadrado perfecto. Demostrar que existen enteros positivos distintos b y c, tales que $a+b$, $a+c$, $b+c$ y $a+b+c$ son cuatro cuadrados perfectos.

    Solución por Julio Subocz, Facultad de Ciencias, Universidad del Zulia (`jsubocz@hotmail.com`).

    Sea u el entero positivo definido por $3a - 2 = u^2$. Consideremos las ecuaciones (1) $a+b = x^2$, (2) $a+c = y^2$, (3) $b+c = z^2$, (4) $a+b+c = t^2$. De (3) y (4) se obtiene $a = t^2 - z^2 = (t-z)(t+z)$, que se puede satisfacer tomando $t - z = 1$, $t + z = a$, con lo cual (6) $t = (a + 1)/2$. De (1), (2) y (4) se tiene $x^2 + y^2 = 2a + b + c = a + t^2 = u^2 + (\frac{a-3}{2})^2$, que se satisface tomando $x = u$ y $y = (a - 3)/2$, resultando la solución $b = x^2 - a = u^2 - a = 2(a - 1)$, $c = y^2 - a = (\frac{a-3}{2})^2 - a$.

    Por último $c - b = y^2 - x^2 = (y - x)(y + x)$, y luego de unas cuentas $y - x = \frac{1}{6}(u^2 - 6u - 7) = \frac{1}{6}(u + 1)(u - 7) > 0$, ya que $a > 17$ y por tanto $u^2 = 3a - 2 > 49$. Por lo tanto $c > b > 0$.

20. [**8**(1) (2000) p. 88]. Halle todos los enteros positivos que son menores que 1000 y cumplen con la siguiente condición: el cubo de la suma de sus dígitos es igual al cuadrado de dicho entero.

    Solución por Oswaldo Larreal, Facultad de Ciencias, Universidad del Zulia (`olarreal@luz.ve`).

    Si $n = 100x + 10y + z$ y $(x + y + z)^3 = n^2$ entonces n debe ser un cubo perfecto, y como debe ser menor que 1000 basta examinar $1^3 = 1$, $2^3 = 8$, $3^3 = 27$, $4^3 = 64$, $5^3 = 125$, $6^3 = 216$, $7^3 = 343$, $8^3 = 512$ y $9^3 = 729$, de los cuales los únicos que cumplen con la condición exigida son 1 y 27.

    Comentario del editor: Florian Luca observa que la condición $n < 1000$ puede suprimirse y la respuesta sigue siendo la misma. En efecto si $k \geq 3$, $10^k \leq n < 10^{k+1}$ y S es la suma de los dígitos de n, entonces $S^3 \leq (9(k+1))^3 < 10^{2k} \leq n^2$.

23. [**8**(1) (2000) p. 88]. Sea B un entero mayor que 10 tal que cada uno de sus dígitos pertenece al conjunto $\{1, 3, 7, 9\}$. Demuestre que B tiene un factor primo mayor o igual que 11.

    Solución compuesta de las enviadas por por Ignacio Larrosa Cañestro, A Coruña, España (`ilarrosa@linuxfan.com`) *y Oswaldo Larreal, Facultad de Ciencias, Universidad del Zulia* (`olarreal@luz.ve`).

    Supongamos que todos los factores primos de B sean menores que 11. Si B es múltiplo de 2 o de 5 entonces su última cifra sería par o 5. De lo contrario B debe ser de la forma $B(n, k) = 3^n \cdot 7^k$. Veremos que en este caso B tiene la propiedad (P) de tener la cifra de las decenas par y terminar en 1, 3, 7 o 9. En efecto, $B(3, 0) = 27$, $B(1, 1) = 21$ y $B(0, 2) = 49$ lo cumplen, y al multiplicar un número con la propiedad (P) por 3 o por 7 el resultado tiene la misma propiedad. Por inducción se sigue que todos los $B(n, k)$ mayores que 10 tienen la propiedad.