Divulgaciones Matemáticas Vol. 7 No. 2 (1999), pp. 157–166

Sobre la Propiedad (k-M)

On the (k-M) Property

José R. Morales M. (moralesj@ciens.ula.ve)
Universidad de Los Andes. Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas. Grupo de Análisis Funcional
Mérida, Edo. Mérida, Venezuela.

Resumen

En este artículo continuamos nuestro estudio de la propiedad (k-M) y su relación con otras propiedades geométricas de los espacios de Banach.
Palabras y frases clave: Espacios LUR, espacio LkR, espacio R, propiedad (k-M), espacios LNUC, propiedad (L β).

Abstract

In this paper we continue our study of the property (k-M) and its relation with other geometrical properties of Banach spaces.
Key words and phrases: Spaces LUR, spaces LkR, space R, spaces LNUC, property (k-M), property (L β).

Iniciaremos nuestro trabajo recordando ciertas definiciones y fijaremos nuestra notación. Por E denotamos un espacio de Banach real. Por S_E (S_{E^*}) y B_E (B_{E^*}) denotamos las esferas unitarias y las bolas unitarias de E (E^*), respectivamente. Por $\text{sep}(x_n) = \inf\{\|x_n - x_m\| n \neq m\}$ se denota la *separación* de una sucesión (x_n) en E. Sea A un conjunto en un espacio de Banach. Por $C_0(A)$ denotamos la cápsula convexa de A y por $\text{diam}(A)$ el diámetro de A. La *medida de no-compacidad de Kuratowski* de A es el ínfimo $\alpha[A]$ de aquellos $\epsilon > 0$ para los cuales existe un cubrimiento de A por un número finito de conjuntos A_i, tales que $\text{diam}(A_i) < \epsilon$. $\alpha(A)$ tiene las siguientes propiedades (ver [1]):

1. $\alpha(A) = 0 \Leftrightarrow \overline{A}$ es compacto.

Recibido 1999/02/09. Revisado 1999/06/14. Aceptado 1999/07/14.
MSC (1991): Primary 46B20; Secondary 46A15, 46A55.
Este trabajo fue financiado por CDCHT-ULA: C-903-98-05-B.

2. $\alpha(A) = \alpha(\overline{A})$
3. $\alpha(C_o(A)) = \alpha(A)$
4. $\alpha(A + B) = \alpha(A) + \alpha(B)$
5. $\alpha(\lambda A) = \lambda\alpha(A)$; donde A, $B \subset E$ y $\lambda \geq 0$

Los espacios (CLUR) fueron introducidos por L.P. Vlasov (ver [6]), pero esta propiedad fué estudiada por Panda-Kapoor [11] de manera independiente, quienes la denotaron como la Propiedad (M), y esta es la notación que hemos seguido en nuestros trabajos.

Definición 1. Un Espacio de Banach E se dice que satisface la propiedad (M), si para cada $x \in S_E$ y cada sucesión $(x_n) \subset B_E$ tales que

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n + x\| = 2$$

entonces (x_n) posee una subsucesión convergente.

Es claro que la propiedad (M) es simplemente una generalización de los espacios localmente convexos, introducidos por A.R. Lovaglia [5] en la siguiente forma:

Definición 2. Se dice que un espacio de Banach E es *localmente uniformemente convexo* (LUR), si para todo $x \in S_E$ y cada sucesión $(x_n) \subset B_E$ tal que $\lim_{n\to\infty} \|x_n + x\| = 2$ se cumple

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$$

Ahora, pasemos a recordar la noción de estricta convexidad:

Definición 3. Un espacio de Banach E se dice que es *estrictamente convexo*, (R), si para todo $x, y \in S_E$ tales que $\|x + y\| = 2$ entonces $x = y$.

Panda y Kapoor en [11], usando la propiedad (M) y los espacios estrictamente convexos observaron la siguiente caracterización de los espacios LUR:

Sea E un espacio de Banach. Entonces
LUR $\Longleftrightarrow$ Propiedad (M) + R.

El autor generalizó la propiedad (M) e introdujo la propiedad (k-M) en [6] y la estudia con cierto detalle en [7].

Definición 4. Sea $k \geq 1$. Un espacio de Banach E se dice que satisface la propiedad (k-M) si para cada $x \in S_E$ y cada sucesión $(x_n) \subset B_E$, tales que

$$\lim_{n_1 \ldots n_k \to \infty} \|x + \sum_{i=1}^{k} x_{n_i}\| = k + 1.$$

entonces (x_n) posee una subsucesión convergente.

Es claro que si $k = 1$ entonces la propiedad (1-M) y la propiedad (M) coinciden, esto es,

$$\text{Propiedad (1-M)} \Longleftrightarrow \text{Propiedad (M)}$$

y el autor en [7] mostró que,

$$\text{Propiedad 1-M} \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow \text{Propiedad (k-M)} \Longrightarrow \text{Propiedad ((k+1)-M)}.$$

En [7] encontramos la siguiente:

Definición 5. Sea E un espacio de Banach. Se dice que E satiface la Propiedad (S), si para cada sucesión $(f_n) \subseteq B_{E^*}$, $x \in S_E$ y $f_n(x) \longrightarrow 1$, entonces (f_n) es compacto en B_{E^*}.

En [7] el autor probó el siguiente resultado,

Sea E un espacio de Banach. Si E^* posee la
Propiedad (k-M) entonces E satisface la Propiedad (S).

Ahora, recordemos:

Definición 6. Sea E un espacio de Banach. Se dice que E satisface la Propiedad (H), si para cada $x \in S_E$ y cada sucesión $(x_n) \in S_E$ tal que (x_n) converge débilmente a x, se cumple $(x_n) \longrightarrow x$.

El autor mostró el siguiente resultado en [6]:

Sea E un espacio de Banach que posee la Propiedad (k-M).
Entonces, E tiene la Propiedad (H).

En [13], Nan Chao-Xun y Wang Jian-Hua logran generalizar los espacios LUR e introducen los espacios LkR.

Definición 7. Sea $k \geq 1$ un entero. Se dice que el espacio de Banach E es un espacio LkR, si para cada $x \in S_E$ y toda sucesión $(x_n) \subset B_E$ tales que

$$\lim_{n_1 \ldots n_k \to \infty} \|x + \sum_{i=1}^{k} x_{n_i}\| = k+1,$$

entonces $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$.

Es claro que la propiedad (k-M) constituye una generalización de los espacios LkR y el autor en [6] probó la siguiente caracterización de los espacios LkR:

Sea E un espacio de Banach. Entonces
LkR $\Longleftrightarrow$ R + Propiedad (k-M).

En [3], Kutzarova y Lin introducen la siguiente propiedad:

Definición 8. Un espacio de Banach E es LNUC si para todo $x \in S_E$ y para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta(\epsilon, x) > 0$ tal que para toda sucesión $(x_n) \subset B_E$, con $sep(x_n) > \epsilon$, se cumple:

$$C_0(\{x\} \cup \{x_n\}) \cap (1-\delta)B_E \neq \phi.$$

En el mismo artículo encontramos la siguiente caracterización de los espacios LNUC:

Teorema: 1. *Sea E un espacio de Banach. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *E es un espacio LNUC.*
2. *Para todo $x \in S_E$ y cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todo $f \epsilon S_{E^*}$, si $x \in S(f, \delta)$ entonces $\alpha(S(f,\delta)) < \epsilon$.*

Ahora presentaremos uno de nuestros resultados:

Teorema: 2. *Sea E un espacio de Banach Entonces, si E es un espacio LNUC entonces E posee la Propiedad (M).*

Demostración. Supongamos que E es un espacio LNUC. Sea $\epsilon > o$, $x \in S_E$ y $(x_n) \subset B_E$, tales que,

$$lim_{n\to\infty} \|x_n + x\| = 2.(*)$$

Supongamos que existe una subsucesión (y_n) de (x_n) que no posee subsucesiones de Cauchy. Entonces, existe una subsucesión (z_n) de (y_n) tal que $\mathrm{Sep}(x_n) \geq \epsilon$. por hipótesis, existe un $\delta(\epsilon, x) > 0$ tal que,

$$C_0(\{x\} \cup \{z_n\}) \cap (1-\delta)B_E \neq \phi$$

y de aquí fácilmente se obtiene que,

$$\|\frac{x + z_n}{2}\| \leq 1 - \delta$$

lo cual es imposible por (*). Así, toda subsucesión de (x_n) posee una subsucesión de Cauchy, y por tanto es convergente. Esto nos muestra que E posee la propiedad (M). □

La siguiente caracterización de los espacios LUR, es clara,

Corolario: 1. *Sea E un espacio de Banach. Entonces LUR* $\Longleftrightarrow$ *R + LNUC.*

Otro resultado inmediato es:

Corolario: 2. *Sea E un espacio de Banach. Entonces,*

1. *LNUC* $\Longrightarrow$ *Propiedad (k-M),* $k \geq 1$.
2. *R + LNUC* $\Longrightarrow$ *LkR,* $k \geq 1$.

Ahora pasamos a dar la definición de espacio Lk-NUC.

Definición 9. Sea $k \geq 1$,un entero. Un espacio de Banach E se dice que es un espacio Lk-NUC si para todo $x \in S_E$ y $\varepsilon > 0$ existe un $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$ tal que para toda sucesión $(x_n) \subset B_E$ con $\mathrm{sep}(x_n) > \varepsilon$ existen $n_1, \ldots, n_k$ tales que:

$$\frac{1}{k+1}\|x + \sum_{i=1}^{k} x_{ni}\| \leq 1 - \delta.$$

Es claro que para todo k, se tiene

$$\text{Lk-NUC} \Longrightarrow \text{LNUC}.$$

El autor en [8] probó el siguiente resultado:

Sean $k \geq 1$ un entero y E un espacio de Banach. Entonces,
Lk-NUC $\Longrightarrow$ Propiedad (k-M).

Corolario: 3. *Sean $k \geq 1$ un entero y E un espacio de Banach. Entonces:*

1. *R + Lk-NUC $\Longrightarrow$ LUR.*
2. *R + Lk-NUC $\Longrightarrow$ LkR.*

La parte (2) del anterior corolario fué probada directamente en [3].
Ahora recordaremos la noción de *gota*.

Definición 10. Sea E un espacio de Banach. Por la *gota* $D(x_0, B_E)$ inducida por un elemento $x_0 \in E - B_E$, se entiende la cápsula convexa del conjunto $\{x_0\} \cup B_E$, esto es:

$$D(x_0, B_E) = C_0(\{x_0\} \cup B_E).$$

El subconjunto de E

$$R(x_0) = D(x_0, B_E) - B_E$$

es llamado el *resto* de x_0.

Montesinos y Torregrosa [10] logran caracterizar los espacios LUR, usando la noción de resto:

Un espacio de Banach es LUR si y sólo si para cada $x_0 \in S_E$,
diam $R(tx_0) \to 0$, para $t \to 1^+$.

Usando la noción del resto y la medida de no-compacidad de Kuratowski, Kutzarova y Papini, Kirk y Torregrosa obtuvieron, de manera independiente. la siguiente

Definición 11. Un espacio de Banach E se dice que satisface la Propiedad (Lβ), si para cualquier $x_0 \in S_E$ se tiene

$$\lim_{t \to 1^+} \alpha[R(tx_0)] = 0.$$

En [4] y [13] se encuentra la siguiente caracterización de los espacios LUR:

Sea E un espacio de Banach. Entonces LUR $\Longleftrightarrow$ R + Propiedad (Lβ).

De este resultado fácilmente se desprende que,

$$\text{R + Propiedad (L}\beta\text{)} \Longrightarrow \text{LkR} \Longrightarrow \text{Propiedad(k-M)}.$$

Teniendo presente las caracterizaciones de los espacios LUR, usando los espacios LNUC, la Propiedad (Lβ) y la Propiedad (M), se obtiene que:

$$\text{R + LNUC} \Longleftrightarrow \text{R + Propiedad (L}\beta) \Longleftrightarrow \text{R + Propiedad(M).}$$

De este último resultado en [9] nos planteamos las siguientes interrogantes: Sea E un espacio de Banach. Entonces

a.- ¿Son equivalentes la Propieded($L\beta$) y los espacios LNUC?

b.- ¿Son equivalentes los espacios LNUC y la Propiedad(M)?

c.- ¿Son equivalentes la Propieded($L\beta$) y la Propiedad(M)?

En [9], el autor probó el siguiente resultado,

Teorema: 3. *Sea E un espacio de Banach. Entonces,*

$$\textit{Propiedad } (L\beta) \Longrightarrow \textit{Propiedad (M).}$$

Demostración. Supongamos que E posee la Propiedad (Lβ). Sean

$$x \in S_E,\ y\ (x_n) \subset B_E$$

tales que,

$$\lim_{n\to\infty} \|x + x_n\| = 2.$$

Mostraremos que (x_n) posee una subsucesión convergente. En efecto, sea $\varepsilon > 0$. Como E tiene la Propiedad $(L\beta)$, existe un $\delta > 0$ tal que para todo $1 < t \leq 1 + \delta$ se tiene $\alpha[R(tx)] < \varepsilon$. Sea $\mu = (1 + \delta)x$. Entonces,

$$z_n = \frac{1}{2+\delta}\mu + \frac{1+\delta}{2+\delta}x_n \in D(\mu, B_E)$$

como,

$$z_n = \frac{1+\delta}{\frac{2+\delta}{2}}\left(\frac{x + x_n}{2}\right)$$

entonces,

$$\|z_n\| \longrightarrow \frac{1+\delta}{\frac{2+\delta}{2}} > 1,$$

y así, existe $n_0 \in N$ tal que para todo $n > n_0$, $\|z_n\| > 1$, esto es, $z_n \in R(\mu)$.

Por tanto,

$$\alpha[(x_n)]_{n\geq n_0} = \frac{2+\delta}{1+\delta}\alpha[(y_n)]_{n\geq n_0} \leq \frac{2+\delta}{1+\delta}\varepsilon < 3\varepsilon \quad \text{y} \quad \alpha[(x_n)] = 0,$$

entonces $\overline{(x_n)}$ es compacto, luego (x_n) posee una subsucesión convergente. Por lo tanto E tiene la Propiedad (M). $\square$

La prueba del siguiente resultado es evidente,

Corolario: 4. *Sea E un espacio de Banach.Entonces,*

Propiedad(Lβ) $\Longrightarrow$ Propiedad(k-M).

Ahora, dejaremos planteada la siguiente conjetura,

Sea E un espacio de Banach. Si E posee la Propiedad (M)
entonces E tiene la Propiedad (Lβ).

En [12], se encuentra la siguiente propiedad:

Definición 12. Un espacio de Banach E se dice que tiene la Propiedad($L\alpha$), si dado $f \in S_{E^*}$, que alcanza el supremo en $x_0 \in S_E$, entonces para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon, f) > 0$ tal que $\alpha[S(f,\delta] < \varepsilon$.

También en [12] se encuentra el siguiente resultado:

Sea E un espacio de Banach. Entonces,
Propiedad (Lβ) $\Longrightarrow$ Propiedad (Lα).

En el mismo artículo Torregrosa da un ejemplo que muestra que el recíproco de la implicación no se cumple en general.

Consideramos conveniente dejar la siguiente interrogante,

Sea E un espacio de Banach que tiene la propiedad (M).
¿Tiene E la propiedad (Lα)?

Para finalizar pasaremos a estudiar la heredabilidad de los espacios LUR y las propiedades $(L\alpha)$, (M) y (k-M). En este sentido estamos interesados en saber si los espacios cociente conservan las propiedades geométricas antes señaladas. De hecho ya son conocidos algunos resultados al respecto. En efecto, Montesinos y Torregrosa [10] probaron el siguiente:

Lema: 1. *Sea E un espacio de Banach LUR. Sea $F \subseteq E$ un subespacio cerrado proximinal de E. Entonces E/F es también un espacio LUR.*

Torregrosa en [12] mostró:

Lema: 2. *Sea E un espacio de Banach reflexivo con la propiedad $(L\beta)$. Sea $F \subseteq E$ un subespacio cerrado de E. Entonces, E/F posee la propiedad $(L\beta)$.*

Ahora, pasaremos a dar uno de nuestros resultados,

Teorema: 4. *Sea E un espacio de Banach reflexivo que satisface la propiedad (M). Sea $F \subseteq E$ un subespacio cerrado de E. Entonces, E/F satisface la propiedad (M).*

Demostración. Sean $\tilde{x} \in S_{E/F}$ y $(\tilde{x_n}) \subset B_{E/F}$ tales que

$$\lim_{n\to\infty} \|\tilde{x} + \tilde{x_n}\| = 2$$

Por la reflexividad de E, existen $x \in S_E$ y $x_n \in B_E$ tales que

$$\pi(x) = \tilde{x} \ \text{ y } \ \pi(x_n) = \tilde{x_n}.$$

donde $\pi : E \to E/F$ es la aplicación natural. Como

$$\|\tilde{x} + \tilde{x_n}\| \leq \|x + x_n\|,$$

entonces fácilmente obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n + x\| = 2$$

Ya que E posee la propiedad (M), entonces (x_n) posee una subsucesión (x_{n_i}) convergente y en consecuencia $(\tilde{x_{n_i}})$ es una subsucesión de $(\tilde{x_n})$ convergente. Por lo tanto, E/F posee la propiedad (M). $\square$

Finalmente, en forma similar podemos probar el siguiente resultado,

Teorema: 5. *Sea $k \geq 1$ un entero. Sea E un espacio de Banach reflexivo que posee la propiedad (k-M). Sea $F \subseteq E$ un subespacio cerrado de E. Entonces, E/F satisface la propiedad (k-M).*

Agradecimiento

Mi más sincero agradecimiento a los distinguidos árbitros por su paciencia en la lectura del trabajo y por sus valiosas recomendaciones.

Referencias

[1] Banas, J., Goebel, K. *Measures of Noncompactness in Banach Spaces*, Marcel Dekker, 1980.

[2] Kirk, W. *Property* (β) *and Edelstein's Algorithms for Constructing Nearest and Farthest Point*, Preprint.

[3] Kutzarova, D., Lin, B. *Locally k-Nearly Uniformly Convex Banach Spaces*, Math Balkanica **8** (1994), 20–210.

[4] Kutzarova, D., Papini, P.L. *On a Characterization of Properties* (β) *and* LUR, Preprint.

[5] Lovaglia, A.R. *Locally Uniformly Convex Banach Spaces*, Trans. A.M.S. **78** (1955), 225–238.

[6] Morales, J. R. *Propiedad (k-M) en Espacios de Banach*, Notas de Matemática ULA No. 118, Mérida, 1992.

[7] Morales, J. R. *Sobre los espacios LkR*, Notas de Matemática ULA No. 105, Mérida, 1990.

[8] Morales, J. R. *Algo más sobre la Propiedad (k-M)*, Notas de Matemática ULA No. 127, Mérida, 1993.

[9] Morales, J. R. *Los Espacios* $L\omega R$, Trabajo de Ascenso, ULA, Mérida, 1995.

[10] Montesinos, V., Torregrosa, J.R. *Sobre Espacios de Banach Localmente Uniformemente Rotundos*, Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid, Tomo LXXXVI (1992), 263–277.

[11] Panda, B.B., Kapoor, O.P. *A Generalization of Local Uniform Convexity of the Norm*, J. Math. Ann. Appl. **52** (1975), 300–308.

[12] Torregrosa, J.R. *Las Propiedades* ($L\beta$) *y* ($S\beta$) *en un Espacio de Banach*, Collect. Math. **43**,3 (1992), 203–216.

[13] Nan, Ch., Wang, J. *On the* $Lk-UR$ *and LkR Spaces*, Math. Proc. Comb. Phil. Soc. **104** (1988), 521–526.