Divulgaciones Matemáticas Vol. 7 No. 1 (1999), pp. 59–85

Homogeneización Periódica de una Clase de Funcionales No-Coercivos

Periodic Homogenization of a Non-coercive Class of Functionals

Gaetano Tepedino Aranguren (tepedino@ciens.ula.ve)
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad de Los Andes
Mérida, Venezuela

Resumen

En la pasada década varios autores demostraron resultados concernientes a la Γ-convergencia de familias de funcionales no coercivos de la forma $J_\epsilon = \int_\Omega f(x, \frac{x}{\epsilon}, u(x), \nabla u(x))\, dx$ para $\epsilon \to 0$, bajo ciertas condiciones en f (ver por ejemplo [4], [3], [1], [5], [6]). Este trabajo usa esos resultados existenciales del Γ-límite para contruir una fórmula que nos proporciona, mediante un esquema variacional, el cómputo del mismo cuando $f(x, ., u, z)$ es Y-periódica. Se estudia primero el caso $f(\frac{x}{\epsilon}, \nabla u)$ para el cual la demostración del caso no coercivo es esencialmente la misma que la del caso coercivo; este último está presentado en [4]. Del estudio de ese caso se desprenden fórmulas para el caso general aquí considerado. El trabajo concluye probando que, bajo ciertas condiciones especiales para f se tiene que para todo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y acotado y para toda $u \in W^{1,p}(\Omega)$ se tiene que

$$\begin{aligned} J(u) &= \int_\Omega \hat{f}(x, u(x), \nabla u(x))\, dx \\ &= \Gamma(L^p(\Omega)) \lim_{\epsilon \to 0} \int_\Omega f(x, \frac{x}{\epsilon}, u(x), \nabla u(x))\, dx, \end{aligned}$$

donde

$$\hat{f}(x, u, z) = \inf\left\{ \fint_Y f(x, y, u, \nabla w(y) + z)\, dy : w \in W^{1,p}_{per}(Y) \right\}.$$

La interpretación física consiste en que conocida la estructura microscópica de un medio físico descripta por $J_\epsilon(u)$, entonces $J(u)$ describirá las propiedades macroscópicas de dicho medio.

Recibido 1998/09/25. Revisado 1999/04/12. Aceptado 1999/04/21.
MSC (1991): Primary 35B27; Secondary 73B27.

Palabras y frases clave: homogeneización, periódica, convexa, Γ-convergencia.

Abstract

During the last decade several authors proved results concerning the Γ-convergence of a class of non-coercive functionals of the form $J_\epsilon = \int_\Omega f(x, \frac{x}{\epsilon}, u(x), \nabla u(x))\, dx$ as $\epsilon \to 0$, under certain conditions on f (see for example [4], [3], [1], [5], [6]). This work uses those Γ-limit existence results to construct a formula which gives that limit when $f(x, ., u, z)$ is Y-periodic. First the case $f(\frac{x}{\epsilon}, \nabla u)$ is studied, for which the proof in the non-coercive case is essentially the same as for the coercive case; this last case is presented in [4]. From the study of this case there follow formulae for the general case here considered. The paper ends proving that, under certain special conditions for f, for all $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ open and bounded and for all $u \in W^{1,p}(\Omega)$, it holds that

$$\begin{aligned} J(u) &= \int_\Omega \hat{f}(x, u(x), \nabla u(x))\, dx \\ &= \Gamma(L^p(\Omega)) \lim_{\epsilon \to 0} \int_\Omega f(x, \frac{x}{\epsilon}, u(x), \nabla u(x))\, dx, \end{aligned}$$

where

$$\hat{f}(x, u, z) = \inf \left\{ \fint_Y f(x, y, u, \nabla w(y) + z)\, dy : w \in W^{1,p}_{per}(Y) \right\}.$$

The physical interpretation is that, known the microscopic structure of a physical medium described by $J_\epsilon(u)$, then $J(u)$ describes the macroscopic properties of such medium.
Key words and phrases: Homogenization, periodic, convex, Γ-convergence.

1 Definiciones y Notaciones

(1.1) (a) Dado $x_0 \in \mathbb{R}^N$, $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0N})$, con $x_{0i} > 0$, $i \in \{1, \dots, N\}$, se denotará por $Y = Y(x_0)$ al rectángulo abierto:

$$Y = \left\{ x \in \mathbb{R}^N \ : \ 0 < x_i < x_{0i}, \quad i \in \{1, \dots N\} \right\} \tag{1.1}$$

(b) El volumen o medida de Lebesgue de este paralelepípedo se denotará por

$$|Y| = \prod_{i=1}^{N} x_{0i} = \alpha \tag{1.2}$$

Por lo tanto, $\forall \delta \in \mathbb{N}$, δY es un paralelepípedo abierto de volumen

$$|\delta Y| = \delta^N |Y| = \delta^N \alpha \tag{1.3}$$

(c) Una función $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ se dice Y-*periódica* si y sólo si:

$$(\forall x \in \mathbb{R}^N, \forall (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_N) \in \mathbb{Z}^N):$$
$$u(x + (\delta_1 x_{01}, \delta_2 x_{02}, \ldots, \delta_N x_{0N})) = u(x).$$

(d) La integral $\displaystyle{-\!\!\!\!\!\!\int_A} f(x)\,dx$ es el promedio $\displaystyle\frac{1}{|A|}\int_A f(x)\,dx$, donde $|A|$ es el volumen de A.

(1.2) Dados $N \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$; $a \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ Y-periódica; $\{g_r\}_{r>0} \subset L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, diremos que $f \in \mathcal{H}(N, a, p)$ si y sólo si $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ satisface las condiciones:

(a1) $\forall z \in \mathbb{R}^N : f(\cdot, z)$ es medible, Y-periódica.

(a2) $\forall y \in \mathbb{R}^N : f(y, \cdot)$ es convexa.

(a3) (i) Si $1 \leq p < \infty$, entonces $\forall y, z \in \mathbb{R}^N$:

$$0 \leq f(y, z) \leq a(y) + |z|^p \tag{1.4}$$

(ii) Si $p = \infty$, entonces $\forall x, z \in \mathbb{R}^N$, $\forall r > 0$, $|z| \leq r$:

$$0 \leq f(y, z) \leq g_r(y) \tag{1.5}$$

(1.3) Dados $N \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$; $a \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ Y-periódica; $\omega : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continua, creciente y $\omega(0) = 0$; $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua; $\{g_r\}_{r>0} \subset L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, diremos que $f \in \widetilde{\mathcal{H}}(N, a, p, \omega, b)$ si y sólo si $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ satisface las condiciones:

(b1) $\forall y, z \in \mathbb{R}^N : f(\cdot, y, z)$ es medible.

(b2) $\forall x, z \in \mathbb{R}^N : f(x, \cdot, z)$ es Y-periódica, medible, (b3) $\forall x, y \in \mathbb{R}^N : f(x, y, \cdot)$ es convexa.

(b4) $\forall x_1, x_2, y, z \in \mathbb{R}^N$:

$$|f(x_1, y, z) - f(x_2, y, z)| \leq \omega\left(|x_1 - x_2|\right)\left(a(y) + f(x_1, y, z)\right) \quad (1.6)$$

(b5) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^N$ se tiene

i) Si $1 \leq p < \infty$, entonces:

$$0 \leq f(x, y, z) \leq b(x)\left(a(y) + |z|^p\right) \quad (1.7)$$

ii) Si $p = \infty$, entonces si $|z| \leq r$:

$$0 \leq f(x, y, z) \leq g_r(y) b(x) \quad (1.8)$$

(1.4) Dados $N \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$; $a \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ Y-periódica; $\omega : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continua, creciente y $\omega(0) = 0$; $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua; $\{g_r\}_{r>0} \subset L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, diremos que $f \in \mathcal{H}(N, a, p, \omega, b)$ si y sólo si $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ satisface las condiciones:

(c1) $\forall y, z \in \mathbb{R}^N; \forall u \in \mathbb{R} : f(\cdot, y, u, z)$ es medible.

(c2) $\forall x, z \in \mathbb{R}^N; \forall u \in \mathbb{R} : f(x, \cdot, u, z)$ es Y-periódica, medible,

(c3) $\forall y, z \in \mathbb{R}^N : f(\cdot, y, \cdot, z)$ es continua

(c4) $\forall x, y \in \mathbb{R}^N; \forall u \in \mathbb{R} : f(x, y, u, \cdot)$ es convexa.

(c5) $\forall x_1, x_2, y, z \in \mathbb{R}^N; \forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} &|f(x_1, y, u_1, z) - f(x_2, y, u_2, z)| \\ &\qquad \leq \omega\left(|x_1 - x_2| - |u_1 - u_2|\right)\left(a(y) + f(x_1, y, u_1, z)\right) \end{aligned} \quad (1.9)$$

(c6) (i) Si $1 \leq p < \infty$, entonces $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^N; \forall u \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq f(x, y, u, z) \leq b(x)\left(a(y) + |u|^p + |z|^p\right) \quad (1.10)$$

(ii) Si $p = \infty$, entonces $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^N; \forall u \in \mathbb{R}$, $\forall r > 0$, $|z| \leq r$:

$$0 \leq f(x, y, u, z) \leq g_r(y) b(x) \quad (1.11)$$

Notar las inmersiones

$$\mathcal{H}(N, a, p) \hookrightarrow \widetilde{\mathcal{H}}(N, a, p, b, \omega) \hookrightarrow \mathcal{H}(N, a, p, b, \omega).$$

(1.5) Dado $N \in \mathbb{N}$ se denotará por $\mathcal{A}^N$ a la clase de todos los abiertos acotados de $\mathbb{R}^N$.

(1.6) Si $\Omega \in \mathcal{A}^N$ se denotará por $\mathcal{A}(\Omega)$ a la clase de todos los sub-conjuntos abiertos $S \subset \Omega$ para los cuales $\bar{S} \subset \Omega$.

(1.7) Dado el paralelepípedo Y definido en (1.1), $C^1_{\text{per}}(\bar{Y})$ denotará el conjunto de las funciones $u \in C^1(\bar{Y}; \mathbb{R})$ que se extienden a todo $\mathbb{R}^N$ via Y-periodicidad. Es importante observar que

$$\forall u \in C^1_{\text{per}}(\bar{Y}) \ : \qquad \int_Y \nabla u(x)\, dx = (0, 0, \dots, 0). \tag{1.12}$$

Esto es una consecuencia del Teorema de la Divergencia de Gauss, del hecho obvio de que la frontera de Y es la unión de $2N$ hiperplanos de dimensión $N-1$ y de la periodicidad de u.

(1.8) Los espacios $W^{1,p}(\Omega)$, $W^{1,p}_0(\Omega)$, $W^{1,p}_{\text{per}}(Y)$, son respectivamente la completacion de los espacios $C^1(\Omega)$, $C^1_0(\Omega)$, $C^1_{\text{per}}(\overline{Y})$, bajo la norma usual:

$$\|u\|_{1,p,\Omega} = \|u\|_{p,\Omega} + \|\nabla u\|_{p,\Omega} \, .$$

(1.9) Trabajaremos con las siguientes métricas en $C^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned} d_\Omega(u,v) &= \|u-v\|_{p,\Omega} + \|\nabla u - \nabla v\|_{p,\Omega} = \|u-v\|_{1,p,\Omega} \\ \sigma_\Omega(u,v) &= \|u-v\|_{p,\Omega} \\ \tau_\Omega(u,v) &= \begin{cases} \|u-v\|_{\infty,\Omega} & \text{si sop } (u-v) \subset \Omega. \\ +\infty & \text{si sop } (u-v) \not\subset \Omega. \end{cases} \end{aligned}$$

Es decir, d_Ω es la métrica inducida por la norma $\|\cdot\|_{1,p,\Omega}$ y σ_Ω es la métrica inducida por la norma usual de $L^p(\Omega)$.

(1.10) Sea $(\mathbf{E}, \tau)$ es un espacio topológico el cual satisface el primer axioma de numerabilidad. El concepto de Γ-*convergencia* es usado en este trabajo en el sentido siguiente: sean $A \subset \mathbf{E}$; $S \subset \overline{\mathbb{R}}$, $a \in \overline{S}$ y $F_s : A \to \overline{\mathbb{R}}$, $\forall s \in S$, una familia de funciones. Dado $x \in \bar{A}$ se dice que

$$\lambda = \Gamma(\tau) \lim_{s \to a} F_s(x) \tag{1.13}$$

si y sólo si

(1) $\forall \{s_n\} \subset S$ con $s_n \to a$ y $\forall \{x_n\} \subset A$ con $x_n \to x$ se tiene:

$$\lambda \leq \liminf_{n\to\infty} F_{s_n}(x_n) \tag{1.14}$$

(2) $\forall \{s_n\} \subset S$ con $s_n \to a$, $\exists \{x_n\} \subset A$ con $x_n \to x$ para el cual:

$$\lambda \geq \limsup_{n\to\infty} F_{s_n}(x_n) \tag{1.15}$$

Dados $N \in \mathbb{N}$ y $\Omega \in \mathcal{A}^N$, el espacio topológico que escogeremos es $\mathbf{E} = L^p(\Omega)$ y $A = W^{1,p}(\Omega)$; donde, si $1 \leq p < \infty$ entonces escogeremos para $\mathbf{E}$ la topología inducida por la métrica σ_Ω; y para $p = \infty$, escojeremos para $\mathbf{E}$ la topología inducida por la métrica τ_Ω (definidas en (1.9)).

2 Homogeneización en el caso $\int_\Omega f(\frac{x}{\epsilon}, \nabla u)\, dx$

Queremos investigar la Γ-convergencia explícita de la familia de funcionales:

$$J_\epsilon(u) = \int_\Omega f\left(\frac{x}{\epsilon}, \nabla u(x)\right)\, dx \ ,$$

cuando $\epsilon \to 0$, siendo $f \in \mathcal{H}(N, a, p)$.

Definición 2.1. Dados $N \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$; $a \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ Y-periódica; $\{g_r\}_{r>0} \subset L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ y $f \in \mathcal{H}(N, a, p)$, definimos el funcional $\widetilde{f} : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}$ como

$$\widetilde{f}(z) = \inf \left\{ \fint_Y f(y, \nabla u(y) + z)\, dy \ : \ u \in W^{1,p}_{\text{per}}(Y) \right\}. \tag{2.1}$$

Para cada $\epsilon > 0$, se definen los funcionales $A_\epsilon : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}$ y $B_\epsilon : \mathbb{R}^N \to \overline{R}$ como:

$$A_\epsilon(z) = \inf \left\{ \fint_Y f\ \left(\frac{y}{\epsilon}, \nabla u(y) + z\right) dy \ : \ u \in W^{1,p}_0(Y) \right\}. \tag{2.2}$$

$$B_\epsilon(z) = \inf \left\{ \fint_Y f\ \left(\frac{y}{\epsilon}, \nabla u(y) + z\right) dy \ : \ u \in W^{1,p}_{\text{per}}(Y) \right\}. \tag{2.3}$$

Se observa que, $\forall z \in \mathbb{R}^N$:

$$\widetilde{f}(z) = B_1(z). \tag{2.4}$$

Además como toda función de $W_0^{1,p}(Y)$ puede ser extendida a todo $\mathbb{R}^N$ via Y-periodicidad, entonces

$$W_0^{1,p}(Y) \hookrightarrow W_{\text{per}}^{1,p}(Y)$$

y por lo tanto $\forall z \in \mathbb{R}^N$, $\forall \epsilon > 0$:

$$B_\epsilon(z) \leq A_\epsilon(z). \tag{2.5}$$

Teorema 2.1. *Si $f \in \mathcal{H}(N, a, p)$ y $\{\epsilon_n\} \subset (0, +\infty)$ con $\epsilon_n \to 0$, entonces existen $\{h_n\} \subset \mathbb{N}$ monótona creciente y $\widehat{f} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ tales que $\forall \Omega \in \mathcal{A}^N$, $\forall u \in W^{1,p}(\Omega)$:*

$$\begin{aligned} \int_\Omega \widehat{f}(\nabla u)\, dx &= \Gamma(\sigma_\Omega) \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f\left(\frac{x}{\epsilon_{h_n}}, \nabla u\right) dx \\ &= \Gamma(\tau_\Omega) \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f\left(\frac{x}{\epsilon_{h_n}}, \nabla u\right) dx \\ &= \Gamma(d_\Omega^*) \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f\left(\frac{x}{\epsilon_{h_n}}, \nabla u\right) dx. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Demostración: En [1] se demuestra la existencia de una función

$$\widehat{f} : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$$

y de una sucesión $\{h_n\} \subset \mathbb{N}$ monótona creciente, tales que $\forall \Omega \in \mathcal{A}, \forall u \in W_{per}^{1,p}(\Omega)$ se satisfacen los Γ-límites:

$$\begin{aligned} \int_\Omega \widehat{f}(x, \nabla u)\, dx &= \Gamma(\sigma_\Omega) \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f\left(\frac{x}{\epsilon_{h_n}}, \nabla u\right) dx \\ &= \Gamma(\tau_\Omega) \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f\left(\frac{x}{\epsilon_{h_n}}, \nabla u\right) dx \\ &= \Gamma(d_\Omega^*) \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f\left(\frac{x}{\epsilon_{h_n}}, \nabla u\right) dx. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Veamos que $\forall z \in \mathbb{R}^N : \widehat{f}(\cdot, z)$ es constante en casi todas partes. Sea $R > 0$ y $B = B(\theta, R)$. Usemos la Γ-convergencia mencionada escogiendo $\Omega = B$. Sea $\{\epsilon_n\} \subset (0, +\infty)$ con $\epsilon_n \to 0$ y sea $\{\epsilon_{n_k}\}$ la subsucesión obtenida. Sea $y \in \mathbb{R}^N$ fijo y escojamos $\{y_k\} \subset \mathbb{R}^N$ y $z_k = \dfrac{y_k}{\epsilon_{n_k}}$ de tal forma que

$$\lim_{k\to\infty} y_k = y \ , \ f(x + z_k, \cdot) = f(x, \cdot) \, . \tag{2.8}$$

Sean $r_k = R(1 - \dfrac{1}{k})$ y $B_k = B(\theta; r_k)$, entonces

$$\forall k \geq 2 : \quad B_k \subset B_{k+1} \subset B. \tag{2.9}$$

Para $\xi \in \mathbb{R}^n$ sea

$$u(x) = \langle \xi, x \rangle. \tag{2.10}$$

Claramente

$$u \in W^{1,p}(B) \quad \text{y} \quad \nabla u(x) = \xi. \tag{2.11}$$

Entonces por definición de Γ-convergencia existe $\{u_k\} \in W^{1,p}(B)$ tal que

$$\begin{gathered} \lim\nolimits_{k\to\infty} \|u_k - u\|_{p,B} = 0 \\ \text{y} \\ \int_B \tilde{f}(x, \nabla u)\, dx = \lim_{k\to\infty} \int_B f\left(\frac{x}{\epsilon_{n_k}}, \nabla u_k\right) dx. \end{gathered} \tag{2.12}$$

Sea $\epsilon > 0$, de (2.8) existe $\upsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall k \geq \upsilon : \quad B_k + y_k \subset B + y. \tag{2.13}$$

De (2.10) y (2.12) obtenemos

$$\begin{aligned} \int_B \hat{f}(x, \xi)\, dx &= \int_B \hat{f}(x, \nabla u(x))\, dx \\ &= \lim_{k\to\infty} \int_B \hat{f}\left(\frac{x}{\epsilon_{n_k}}, \nabla u_k\right) dx. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Usando (2.7) en (2.14), haciendo uso de (2.9) y un cambio de variable resulta

$$\begin{aligned}
\int_B \hat{f}(x,\xi)\,dx &= \lim_{k\to\infty}\int_B f\left(\frac{x}{\epsilon_{n_k}}+z_k,\nabla u_k\right)dx \\
&= \lim_{k\to\infty}\int_B f\left(\frac{x+y_k}{\epsilon_{n_k}},\nabla u_k\right)dx \\
&= \lim_{k\to\infty}\int_{B+y_k} f\left(\frac{x}{\epsilon_{n_k}},\nabla u_k(x-y_k)\right)dx \qquad (2.15)\\
&= \lim_{k\to\infty}\int_{B_k+y_k} f\left(\frac{x}{\epsilon_{n_k}},\nabla u_k(x-y_k)\right)dx \\
&\geq \liminf_{k\to\infty}\int_{B_k+y} f\left(\frac{x}{\epsilon_{n_k}},\nabla u_k(x-y_k)\right)dx. \qquad (2.16)
\end{aligned}$$

Sea $\widetilde{u}_k(x) = u_k(x-y_k)$, entonces de (2.11) y (2.12) se tiene que si $\widetilde{u} = \langle \xi, x-y_k\rangle$, entonces

$$\{\widetilde{u}_k\}\subset W^{1,p}(B+y_k), \quad \nabla\widetilde{u}(x)=\xi, \quad \lim_{k\to\infty}\|\widetilde{u}_k-\widetilde{u}\|_{p,B+y_k}=0. \qquad (2.17)$$

Debido a la Γ-convergencia se obtiene :

$$\int_B \hat{f}(x,\xi)\,dx \geq \int_{B+y}\widehat{f}(x,\nabla\widetilde{u})\,dx = \int_{B+y}\widehat{f}(x,\xi)\,dx. \qquad (2.18)$$

Usando el teorema de la Convergencia Monótona al tomar $k\to\infty$ en (2.18) se obtiene finalmente

$$\int_B \hat{f}(x,\xi)\,dx \geq \int_{B+y}\widehat{f}(x,\xi)\,dx = \int_B \hat{f}(x+y,\xi)\,dx. \qquad (2.19)$$

Como B es simétrico, entonces de (2.19) se obtiene

$$\forall B(\theta,R): \quad \int_B \hat{f}(x,\xi)\,dx = \int_B \hat{f}(x+y,\xi)\,dx. \qquad (2.20)$$

Es decir, existe $M(\xi)\subset\mathbb{R}^N$ con $|M(\xi)|=0$ tal que

$$\forall x\in\mathbb{R}^N\backslash M(\xi): \quad \widehat{f}(x,\xi)=\widehat{f}(x+y,\xi). \qquad (2.21)$$

En particular, se ha obtenido que $\widehat{f}(\cdot,\xi)$ es constante en casi todas partes. $\square$

Teorema 2.2. $\forall z \in \mathbb{R}^N$ *existe el límite*

$$A(z) = \lim_{\epsilon \to 0} A_\epsilon(z) \tag{2.22}$$

Demostración: Para $t > 0$ definamos

$$\widehat{t} = \begin{cases} t, & \text{si } t \in \mathbb{N} \\ [t+1], & \text{si } t \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

donde $[x]$ denota la parte entera de x. Sean $0 < t < t+1 \le s$, entonces $0 < t \le \widehat{t} < t+1 \le s$, por lo tanto

$$0 < t \le \widehat{t} < v \le t+1 \le s\,, \tag{2.23}$$

donde $v = \left[\dfrac{s}{\widehat{t}}\right]\widehat{t}$. Claramente $tY \subset \widehat{t}Y \subset vY \subset (t+1)Y \subset sY$, por lo tanto

$$W_0^{1,p}(Y) \subset W_0^{1,p}(\widehat{t}Y) \subset W_0^{1,p}(vY), \quad W_0^{1,p}(Y) \subset W_{\text{per}}^{1,p}(\widehat{t}Y) = W_{\text{per}}^{1,p}(vY),$$

puesto que $\widehat{t}$ y v son enteros positivos y toda función de $C_0^1(Y)$ se extiende a todo $\mathbb{R}^n$ via Y-periodicidad.

Fijemos $z \in \mathbb{R}^N$. De (2.2) se obtiene después de un cambio de variable

$$A_{\frac{1}{t}}(z) = \inf\left\{ \fint_{tY} f(x, \nabla u(x) + z)\,dx \,:\quad u \in W_0^{1,p}(tY)\right\}. \tag{2.24}$$

Luego, dado $\epsilon > 0$ existe $u_\epsilon \in W_0^{1,p}(tY)$ para el cual

$$\fint_{tY} f\ (x, \nabla u_\epsilon(x) + z)\ dx\ < \frac{\epsilon}{3} + A_{\frac{1}{t}}(z). \tag{2.25}$$

Sea

$$\widetilde{u}_\epsilon(x) = \begin{cases} u_\epsilon(x)\,, & x \in tY \\ 0, & x \in \widehat{t}Y \setminus tY \end{cases} \tag{2.26}$$

Observamos que $\widetilde{u}_\epsilon \in W_0^{1,p}(\widehat{t}Y)$. Como $\widehat{t} \in \mathbb{N}$, se puede extender $\widetilde{u}_\epsilon$ a todo $\mathbb{R}^N$ via Y-periodicidad; a partir de esta extensión definimos

$$\widetilde{\widetilde{u}}_\epsilon(x) = \begin{cases} \widetilde{u}_\epsilon(x)\,, & x \in vY \\ 0, & x \in sY \setminus vY \end{cases} \tag{2.27}$$

Claramente $\widetilde{\widetilde{u}}_\epsilon(x) \in W_0^{1,p}(sY)$ es Y-periódica; en consecuencia de (2.2) inferimos

$$A_{\frac{1}{s}}(z) \leq \fint_{sY} f\, \left(x, \nabla\widetilde{\widetilde{u}}_\epsilon(x) + z\right)\, dx. \tag{2.28}$$

Sea $\alpha =\mid Y \mid$, entonces $\forall\beta > 0$: $\mid \beta Y \mid= \beta^N\alpha$. De (2.27) y (2.28) notamos que:

$$\begin{aligned} A_{\frac{1}{s}}(z) \quad &\leq \quad \frac{1}{s^N\alpha}\Big(\int_{vY} f\, (x, \nabla\widetilde{u}_\epsilon(x) + z)\, dx + \int_{sY\setminus vY} f\, (x, z)\, dx\Big) \\ &= \quad \frac{1}{s^N\alpha}\, (I_1 + I_2)\,. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Para I_1 hacemos el cambio de variable $y = \widehat{t}x$:

$$I_1 = \left(\frac{v}{\widehat{t}}\right)^N \int_{\widehat{t}Y} f\, \left(\frac{v}{\widehat{t}}, \nabla\widetilde{u}_\epsilon\left(\frac{v}{\widehat{t}}y\right) + z\right) dy.$$

Usando la Y-periodicidad de $f(\cdot, z)$ y de $\widetilde{u}_\epsilon$:

$$I_1 = \left(\frac{v}{\widehat{t}}\right)^N \int_{\widehat{t}Y} f\, (x, \nabla\widetilde{u}_\epsilon(x) + z)\, dx. \tag{2.30}$$

Donde usando (2.26) obtenemos

$$\int_{\widehat{t}Y} f\, (x, \nabla\widetilde{u}_\epsilon(x) + z)\, dx = \int_{tY} f\, (x, \nabla u_\epsilon(x) + z)\, dx + \int_{tY\setminus\widehat{t}Y} f\, (x, z)\, dx. \tag{2.31}$$

Sustituyendo (2.31) en (2.30) y ésto a su vez en (2.29) obtenemos:

$$\begin{aligned} A_{\frac{1}{s}}(z) &= \left(\frac{tv}{\widehat{ts}}\right)^N \Big(\fint_{tY} f(x, \nabla u_\epsilon(x) + z)\, dx + \frac{1}{\alpha s^N} \int_{sY \setminus vY} f(x, z)\, dx \Big) \\ &\quad + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{v}{\widehat{ts}}\right)^N \int_{tY \setminus \widehat{t}Y} f\ (x, z)\ dx, \end{aligned}$$

y como $\left(\frac{tv}{\widehat{ts}}\right) \leq 1$, $\frac{1}{s} < \frac{1}{t}$, $\frac{v}{\widehat{ts}} \leq \frac{1}{\widehat{t}} \leq \frac{1}{t}$, entonces

$$A_{\frac{1}{s}}(z) = \fint_{tY} f(x, \nabla u_\epsilon(x) + z)\, dx + \Big(\int_{sY \setminus vY} + \int_{tY \setminus \widehat{t}Y} \Big) f(x, z)\, dx. \tag{2.32}$$

Usando (2.4) y (2.10) en (2.32) obtenemos

$$A_{\frac{1}{s}}(z) \leq \frac{\epsilon}{3} + A_{\frac{1}{t}}(z) + q(z)\gamma(t)\,, \tag{2.33}$$

donde

$$0 \leq \gamma(t) \leq \left[2 - \left(1 - \frac{1}{\widehat{t}}\right)^N - \left(1 - \frac{s}{\widehat{t}}\right)^N \right].$$

Claramente $\gamma(t) \to 0$ si $t \to \infty$. Sea $m = \liminf_{t\to\infty} A_{\frac{1}{t}}(z)$; entonces, dado $\epsilon > 0$ escojamos $t > 0$ tal que

$$A_{\frac{1}{t}}(z) \leq m + \frac{\epsilon}{3} \qquad \text{y} \qquad \gamma(t)q(z) \leq \frac{\epsilon}{3}. \tag{2.34}$$

De (2.33) y (2.34) se obtiene $\forall s \geq t + 1 : \quad A_{\frac{1}{s}}(z) \leq \epsilon + m$. Concluimos finalmente con la desigualdad

$$\limsup_{t\to\infty} A_{\frac{1}{t}}(z) \leq \liminf_{t\to\infty} A_{\frac{1}{t}}(z)\,,$$

es decir, existe $A(z) = \lim_{\epsilon\to 0} A_\epsilon(z)$. □

Teorema 2.3. $\forall z \in \mathbb{R}^N$, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$B_{\frac{1}{n}}(z) = B_1(z) \tag{2.35}$$

Demostración: Fijemos $z \in \mathbb{R}^N$, $n \in \mathbb{N}$ y $g_n(z) = B_{\frac{1}{n}}(z)$. De (2.3) se tiene

$$g_n(z) = B_{\frac{1}{n}}(z) = \inf \left\{ \fint_Y f\ (ny, \nabla u(y) + z)\, dy\ :\ u \in W^{1,p}_{\text{per}}(Y) \right\}.$$

Luego, dado $\epsilon > 0$ existe $u_\epsilon \in W^{1,p}_{\text{per}}(Y)$ para el cual

$$\fint_Y f\ (ny, \nabla u_\epsilon(y) + z)\, dy\ \leq g_n(z) + \epsilon. \tag{2.36}$$

Sea $\beta \in \mathbb{Z^+}^N$, tal que $0 \leq \beta_i \leq n-1$, $\forall i \in \{1, \ldots, N\}$. Definamos $\widetilde{u}_\epsilon$ como

$$\widetilde{u}_\epsilon(x) = \frac{1}{n^N} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{Z^+}^N \\ |\alpha| \leq |\beta|}} u_\epsilon \left(x_1 + \frac{\alpha_1}{n} x_{0,1}, \ldots, x_N + \frac{\alpha_N}{n} x_{0,n} \right).$$

Como u_ϵ es Y-periódica, entonces $\widetilde{u}_\epsilon$ es $\frac{1}{n}Y$-periódica. A su vez $f_n(x,z) = f(nx,z)$ es $\frac{1}{n}Y$-periódica, por lo tanto de (2.36) se concluye :

$$\fint_Y f\ (nx, \nabla \widetilde{u}_\epsilon(x) + z)\ dx\ \leq g_n(z) + \epsilon. \tag{2.37}$$

Sea $\widetilde{\widetilde{u}}_\epsilon\,(x) = n\tilde{u}_\epsilon\,(x/n)$, entonces $\widetilde{\widetilde{u}}_\epsilon \in W^{1,p}_{\text{per}}(Y)$. Por lo tanto un cambió de variable en (2.37) nos proporciona:

$$\int_Y f\ \left(x, \nabla \widetilde{\widetilde{u}}_\epsilon\,(x) + z\right)\ dx\ \leq g_n(z) + \epsilon. \tag{2.38}$$

Por otro lado de (2.3) tenemos que

$$B_1(z) \leq \fint_Y f\ \left(x, \nabla \widetilde{\widetilde{u}}_\epsilon\,(x) + z\right)\ dx. \tag{2.39}$$

De (2.38) y (2.39) obtenemos $B_1(z) \leq B_{\frac{1}{n}}(z) + \epsilon$. Como ϵ es arbitrario, se concluye entonces:

$$\forall z \in \mathbb{R}^N\ :\quad B_1(z) \leq B_{\frac{1}{n}}(z). \tag{2.40}$$

Por otro lado, dado $\epsilon > 0$ usando (2.3) existe $u_\epsilon \in W^{1,p}_{\text{per}}(Y)$ para el cual

$$\fint_Y f\ (x, \nabla u_\epsilon(x) + z)\ dx\ \leq B_1(z) + \epsilon. \tag{2.41}$$

Sea $\widetilde{u}_\epsilon\,(x) = \frac{1}{n} u_\epsilon\,(nx)$, $\forall x \in \frac{1}{n}Y$. Entonces $\widetilde{u}_\epsilon \in W^{1,p}_{\text{per}}\left(\frac{1}{n}Y\right)$, por lo tanto

$$B_{\frac{1}{n}}(z) \leq \fint_Y f\ (nx, \nabla \widetilde{u}_\epsilon(x) + z)\ dx = \fint_Y f\ (x, \nabla u_\epsilon(x) + z)\ dx. \tag{2.42}$$

De (2.41) y (2.42) se infiere $B_{\frac{1}{n}}(z) \leq B_1(z) + \epsilon$. Pero $\epsilon > 0$ es arbitrario, entonces:

$$\forall z \in \mathbb{R}^N\ :\quad B_{\frac{1}{n}}(z) \leq B_1(z). \tag{2.43}$$

De (2.40) y (2.42) se infiere finalmente (2.35). $\square$

Teorema 2.4.

$$\forall z \in \mathbb{R}^N : \widehat{f}(z) \leq \widetilde{f}(z) = B_1(z) \tag{2.44}$$

Demostración: De (2.1) y (2.3) se tiene que $\widetilde{f}(z) = B_1(z)$. Por lo tanto sólo debemos demostrar $\widehat{f}(z) \leq B_1(z)$. De (2.3), dado $\epsilon > 0$ existe $u_\epsilon \in W^{1,p}(Y)$, Y-periódica, para la cual

$$\fint_Y f\ (x, \nabla u_\epsilon(x) + z)\ dx\ \leq B_1(x) + \epsilon. \tag{2.45}$$

Claramente podemos extender u_ϵ a todo $\mathbb{R}^N$ via Y-periodicidad. Dado $z \in \mathbb{R}^N$, definimos $\widehat{z} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ como $\widehat{z}\,(x) = \langle z, x\rangle$. Sea $\widehat{u}_\epsilon\,(x) = \widehat{z}\,(x) + \epsilon u_\epsilon\,(x/\epsilon)$, entonces claramente

$$\widehat{u}_\epsilon \in W^{1,p}(Y) \qquad \text{y} \qquad \lim_{\epsilon \to 0} \|\widehat{u}_\epsilon - \widehat{z}\|_{p,Y} = 0. \tag{2.46}$$

De (2.3), (2.4) y 2.1 se tiene que, al ser $\nabla \widehat{z} = z$:

$$|Y|\,\widehat{f}(z) = \Gamma(\sigma_\Omega) \lim_{n\to\infty} \int_Y f\left(\frac{x}{\epsilon_{h_n}}, z\right)\, dx.$$

Luego por definición de Γ-convergencia se tiene

$$|Y|\,\widehat{f}(z) \leq \liminf_{n\to\infty} \int\limits_{Y} f\left(\frac{x}{\epsilon_{h_n}}, z + \nabla \widehat{u}_{\epsilon_{h_n}}(x)\right) dx. \tag{2.47}$$

De la definición de $\widehat{u}_\epsilon$ y (2.47) se infiere:

$$\widehat{f}(z) \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{|Y|} \int\limits_{Y} f\left(\frac{x}{\epsilon_{h_n}}, z + \nabla \widehat{u}_{\epsilon_{h_n}}\left(\frac{x}{\epsilon_{h_n}}\right)\right) dx. \tag{2.48}$$

Al cambiar variables y usar la Y-periodicidad de f obtenemos:

$$\widehat{f}(z) \leq \liminf_{n\to\infty} (\epsilon_{h_n})^N \left[\frac{1}{\epsilon_{h_n}} + 1\right]^N \fint\limits_{Y} f\left(x, z + \nabla u_\epsilon(x)\right) dx. \tag{2.49}$$

Reemplazando (2.45) en (2.49) resulta

$$\widehat{f}(z) \leq B_1(z) + \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, se infiere finalmente (2.44). $\square$

Teorema 2.5. $\forall z \in \mathbb{R}^N$*:*

$$\widetilde{f}(z) = B_1(z) = A(z) = \lim_{\epsilon\to 0} B_\epsilon(z) \tag{2.50}$$

Demostración: Fijemos $z \in \mathbb{R}^N$. De (2.1) y la definición de Γ-convergencia, dado que la función nula pertenece a $W^{1,p}(Y)$, resulta que existe $\{u_n\} \subset W^{1,p}(Y)$ con $|u_n|_{p,Y} \to 0$ para la cual:

$$\limsup_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega} f\left(\frac{y}{\epsilon_{h_n}}, \nabla u_n(y) + z\right) dy \leq \widehat{f}(z)\,|Y|\,.$$

Si $\widehat{z}(x) = \langle z, x\rangle$ luego $\nabla \widehat{z} = z$, $\nabla u_n + z = \nabla(u_n + \widehat{z})$ y $\sigma_\Omega(u_n + \widehat{z}, \widehat{z}) \to 0$, por lo tanto

$$\limsup_{n\to\infty} \fint\limits_{Y} f\left(\frac{y}{\epsilon_{h_n}}, \nabla u_n(y) + z\right) dy \leq \widehat{f}(z). \tag{2.51}$$

Sea $v \in W_0^{1,p}(Y)$, $v > 0$ en Y, y sea $v_n = \max\{-v, \min\{u_n, v\}\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Claramente

$$\{v_n\} \subset W_0^{1,p}(Y) \qquad \text{y} \qquad \|v_n\|_{p,Y} \to 0. \tag{2.52}$$

Sea $E_n = \{x \in Y : u_n(x) \neq v_n(x)\}$. Como $\|u_n - v_n\|_{p,Y} \to 0$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} |E_n| = 0. \tag{2.53}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}\int_Y f(y, \nabla v_n(y) + z)dy &= \int_{Y\setminus E_n} f(y, \nabla v_n(y) + z)dy + \int_{E_n} f(y, \nabla v_n(y) + z)dy \\ &= \int_{Y\setminus E_n} f(y, \nabla u_n(y) + z)dy + \int_{\{x:v_n(x)=v(x)\}} f(y, \nabla v(y) + z)dy \\ &\quad + \int_{\{x:v_n(x)=-v(x)\}} f(y, -\nabla v(y) + z)dy.\end{aligned}$$

Usando (2.4) y la desigualdad clásica $(|a| + |b|)^p \leq 2^{p-1} (|a|^p + |b|^p)$ para $p \geq 1$, se obtiene

$$\begin{aligned}\int_Y f\,(y, \nabla v_n(y) + z)\,dy \leq &\int_Y f\,(y, \nabla u_n(y) + z)\,dy \\ &+ \int_{E_n} (a(y) + 2^p (|\nabla v|^p + |z|^p))\,dy.\end{aligned} \tag{2.54}$$

De (2.51), (2.53) y (2.54) obtenemos

$$\limsup_{n\to\infty} ⨍_Y f\,(y, \nabla v_n(y) + z)\,dy \leq \widehat{f}(z). \tag{2.55}$$

Usando (2.5) se obtiene

$$\limsup_{n\to\infty} B_{\epsilon_{h_n(}}(z) \leq \limsup_{n\to\infty} A_{\epsilon_{h_n}}(z). \tag{2.56}$$

De (2.51, (2.53) y (2.54) inferimos:

$$\limsup_{n\to\infty} A_{\epsilon_{h_n}}(z) \leq \widehat{f}(z). \tag{2.57}$$

Juntando (2.51), (2.44) del 2.4 y (2.57) se deduce finalmente:

$$\limsup_{n\to\infty} B_{\epsilon_{h_n}}(z) \leq \limsup_{n\to\infty} A_{\epsilon_{h_n}}(z) \leq \widehat{f}(z) \leq B_1(z). \tag{2.58}$$

Por otro lado usando (2.35) del Teorema 2.3 se obtienen:

$$\widehat{f}(z) = B_1(z) \leq \lim_{n\to\infty} B_{\frac{1}{n}}(z) \leq \limsup_{n\to\infty} B_{\frac{1}{n}}(z) \leq \lim_{\epsilon\to\infty} B_\epsilon(z). \tag{2.59}$$

De (2.58) y (2.59) se concluye (2.50). □

Observación: En los teoremas anteriores no sólo se evidencia que $\widehat{f} = \widetilde{f}$, si no a su vez que la Γ-convergencia es independiente de la sucesión $\{\epsilon_n\}$ escogida, por lo tanto se concluye con el siguiente resultado.

Teorema 2.6. . *Dados $N \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$; $a \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ Y-periódica; $\{g_r\}_{r>0} \subset L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$; $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ la cual satisface las condiciones (a1)-(a3).*
Entonces $\forall \Omega \in \mathcal{A}^N$, $\forall u \in W^{1,p}(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \int_Y \tilde{f}\,(\nabla u)\,dx &= \Gamma(\sigma_\Omega)\lim_{\epsilon\to 0}\int_Y \tilde{f}\left(\frac{x}{\epsilon}, \nabla u(x)\right)dx \\ &= \Gamma(\tau_\Omega)\lim_{\epsilon\to 0}\int_Y f\left(\frac{x}{\epsilon}, \nabla u(x)\right)dx, \end{aligned} \tag{2.60}$$

donde $\widetilde{f} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es la función convexa definida por (2.1).

Demostración: Consecuencia del Teorema 2.1, junto con los Teoremas 2.2 a 2.5, los cuales manifiestan la independencia del Γ-límite de la sucesión ϵ_n. □

3 Homogeneización en el caso $\int_\Omega f(x, \frac{x}{\epsilon}, \nabla u)\,dx$

En esta sección se dará una fórmula explícita para la Γ-convergencia de la familia de funcionales:

$$J_\epsilon(u) = \int_Y f\left(x, \frac{x}{\epsilon}, \nabla u(x)\right)dx$$

cuando $\epsilon \to 0$, donde $f \in \widetilde{\mathcal{H}}(N, a, p, b, \omega)$.

Dados $N \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$; $a \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ Y-periódica; $\omega : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continua, creciente, con $\omega(0) = 0$; $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua; $\{g_r\}_{r>0} \subset L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$. Sea $f \in \widetilde{\mathcal{H}}(N, a, p, b, \omega)$.
Bajo tales condiciones definimos $\widetilde{f} : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}$ como:

$$\widetilde{f}(x,z) = \inf \left\{ \fint_Y f(x, y, \nabla u(y) + z)\, dy \ : \ u \in W^{1,p}_{\text{per}}(Y) \right\}. \tag{3.1}$$

Sean $N \in \mathbb{N}$ y $\Omega \in \mathcal{A}^N$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, consideramos las siguientes coberturas abiertas de Ω, definidas como

$$\mathcal{L}_k = \left\{ \Omega \cap \prod_{j=1}^{N} \left(\alpha_j 2^{-k}, (\alpha_j + 1)\, 2^{-k} \right) \ : \ (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in {\mathbb{Z}^+}^N \right\}. \tag{3.2}$$

Como $\bar{\Omega}$ es compacto, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $\widehat{k} \in \mathbb{N}$ tal que

$$\Omega \subset \bar{\Omega} \subset \bigcup_{i=1}^{\widehat{k}} A_{k,i}\, , \qquad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{3.3}$$

Escojemos puntos

$$x_{k,i} \in A_{k,i}, \quad \forall k \in \mathbb{N}\, , \quad \forall i \in \{1, \dots, \widehat{k}\}. \tag{3.4}$$

Definimos las funciónes $S_k : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ como:

$$S_k(x,y,z) = \sum_{i=1}^{\widehat{k}} \chi\left(A_{k,i}\right)(x) f\left(x_{k,i}, y, z\right)\, , \tag{3.5}$$

donde $\chi\left(A_{k,i}\right)(x) = \begin{cases} 1\, , & \text{si } x \in A_{k,i} \\ 0\, , & \text{si } x \notin A_{k,i}. \end{cases}$.

Teorema 3.1. *Si $f \in \mathcal{H}(N, a, p, b, \omega)$ y $\{\epsilon_n\} \subset (0, \infty)$ con $\epsilon_n \to 0$, entonces existen $\{h_n\} \subset \mathbb{N}$ monótona creciente y $\widehat{f} : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ tales que $\forall \Omega \in \mathcal{A}^N$, $\forall u \in W^{1,p}(\Omega)$:*

$$\begin{aligned} \int_Y \widehat{f}\, (x, \nabla u(x))\, dx &= \Gamma\left(\sigma_\Omega\right) \lim_{n \to \infty} \int_Y f\left(x, \frac{x}{\epsilon_{h_n}}, \nabla u\left(x\right)\right) dx \\ &= \Gamma\left(\tau_\Omega\right) \lim_{n \to \infty} \int_\Omega f\left(x, \frac{x}{\epsilon_{h_n}}, \nabla u\left(x\right)\right) dx \end{aligned} \tag{3.6}$$

Demostración: Está demostrado en el artículo [1] sobre la Γ-convergencia, al tomar $f_\epsilon(x,z) = f\left(x, \frac{x}{\epsilon}, z\right)$. □

Teorema 3.2.

$$\forall y, z \in \mathbb{R}^N : S_k(\cdot, y, z) \textit{ converge uniformemente sobre } \Omega \textit{ a } f(\cdot, y, z) \tag{3.7}$$

Demostración: Sólo se mostrara el caso $1 \leq p < \infty$, pues el caso $p = \infty$ es similar.

De (3.3), (3.4) y (3.5) tenemos que:

$$\sup_{x\in\Omega} |S_k(x,y,z) - f(x,y,z)| = \sup_{1\leq i\leq \widehat{k}} \sup_{x\in A_{k,i}} |S_k(x_{k,i},y,z) - f(x,y,z)| . \tag{3.8}$$

Usando (1.7) y (3.5) en (3.8) se obtiene

$$(3.8) \leq \sup_{1\leq i\leq \widehat{k}} \sup_{x\in A_{k,i}} \omega(|x - x_{k,i}|)(a|y| + |z|^p)\left(\|b\|_{\infty,\bar{\Omega}} + 1\right). \tag{3.9}$$

Pero de (3.2) y de los hechos; $\omega : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continua, creciente, con $\omega(0) = 0$ se concluye finalmente:

$$(3.9) \leq \sup_{1\leq i\leq \widehat{k}} \sup_{x\in A_{k,i}} \sup_{t\in[0,\sqrt{n}2^{-k}]} \omega(t)(a|y| + |z|^p)\left(\|b\|_{\infty,\bar{\Omega}} + 1\right). \tag{3.10}$$

En conclusión se infiere

$$\sup_{x\in\Omega} |S_k(x,y,z) - f(x,y,z)| \leq 0 ,$$

lo cual implica (3.7). □

Teorema 3.3. *$\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall u \in W^{1.p}(\Omega)$:*

$$\begin{aligned} &\int_Y \sum_{i=1}^{\widehat{k}} \chi(A_{k,i})(x)\, \widetilde{f}(x_{k,i}, \nabla u(x))\, dx \\ &= \Gamma(\sigma_\Omega) \lim\nolimits_{\epsilon\to 0} \int_Y S_k\left(x, \tfrac{x}{\epsilon}, \nabla u(x)\right) dx \\ &= \Gamma(\tau_\Omega) \lim\nolimits_{\epsilon\to 0} \int_\Omega S_k\left(x, \tfrac{x}{\epsilon}, \nabla u(x)\right) dx \end{aligned} \tag{3.11}$$

Donde $\widetilde{f}$ es dada por (3.1).

Demostración: Para cada $k \in \mathbb{N}$, la función S_k satisface las hipótesis del teorema 3.1. Por lo tanto existe una función boreliana $\hat{f} : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ tal que $\forall A \in \mathcal{A}(\Omega)$ y $\forall u \in W^{1,p}(A)$:

$$\begin{aligned}\int\limits_A \hat{f}(x, \nabla u(x))dx &= \Gamma\left(\sigma_A\right) \lim_{n\to 0} \int\limits_A S_k\left(x, \frac{x}{\epsilon_{h_n}}, \nabla u\left(x\right)\right) dx \\ &= \Gamma\left(\tau_A\right) \lim_{n\to 0} \int\limits_A S_k\left(x, \frac{x}{\epsilon_{h_n}}, \nabla u\left(x\right)\right) dx. \qquad (3.12)\end{aligned}$$

Esto nos dice que (3.11) quedará bien demostrado si se cumple que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall i \in \{1, \dots, k\}$, $\forall u \in W^{1,p}(A_{k,i})$:

$$\int\limits_{A_{k,i}} \hat{f}\ (x, \nabla u(x))\ dx = \int\limits_{A_{k,i}} \tilde{f}\ (x_{k,i}, \nabla u(x))\ dx. \qquad (3.13)$$

Para demostrar (3.13) fijemos $k \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \dots, \hat{k}\}$ y $u \in W^{1,p}(A_{k,i})$.
Usando (3.12) podemos escribir:

$$\begin{aligned}\int\limits_{A_{k,i}} \hat{f}\ (x, \nabla u(x))\, dx &= \Gamma\left(\sigma_{A_{k,i}}\right) \lim_{n\to 0} \int\limits_{A_{k,i}} S_k\left(x, \frac{x}{\epsilon_{h_n}}, \nabla u\left(x\right)\right) dx \\ &= \Gamma\left(\tau_{Ak,i}\right) \lim_{n\to 0} \int\limits_{A_{k,i}} S_k\left(x, \frac{x}{\epsilon_{h_n}}, \nabla u\left(x\right)\right) dx. \qquad (3.14)\end{aligned}$$

Reemplazando (3.5) en (3.14) obtenemos:

$$\begin{aligned}\int\limits_{A_{k,i}} \hat{f}\ (x, \nabla u(x))\, dx &= \Gamma\left(\sigma_{A_{k,i}}\right) \lim_{n\to 0} \int\limits_{A_{k,i}} f\left(x_{k,i}, \frac{x}{\epsilon_{h_n}}, \nabla u\left(x\right)\right) dx \\ &= \Gamma\left(\tau_{Ak,i}\right) \lim_{n\to 0} \int\limits_{A_{k,i}} f\left(x_{k,i}, \frac{x}{\epsilon_{h_n}}, \nabla u\left(x\right)\right) dx. \qquad (3.15)\end{aligned}$$

Pero $f(x_{k,i}, \cdot, \cdot) \in \mathcal{H}(N, a, p)$ satisface las hipótesis del Teorema 2.6. Así, para $f_{k,i}(y, z) = f_{k,i}(x_{k,i}, y, z)$ concluimos de (2.60), (3.6) y (3.15) que

$$\begin{aligned}
\int\limits_{A_{k,i}} \hat{f}\ (x, \nabla u(x))\ dx &= \Gamma\left(\sigma_{A_{k,i}}\right) \lim_{\epsilon\to 0} \int\limits_{A_{k,i}} f_{\ k,i}\left(\frac{y}{\epsilon}, \nabla u\,(y)\right) dy \\
&= \Gamma\left(\tau_{Ak,i}\right) \lim_{\epsilon\to 0} \int\limits_{A_{k,i}} f_{\ k,i}\left(\frac{y}{\epsilon}, \nabla u\,(y)\right) dy \\
&= \int\limits_{A_{k,i}} \tilde{f}_{\ k,i}\left(\nabla u\,(y)\right) dy. \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

De donde, según (2.1), $\forall z \in \mathbb{R}^N$:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_{k,i}(z) = \inf &\left\{ \fint\limits_Y f_{k,i}(y, \nabla u(y) + z)\, dy \ :\ u \in W^{1,p}_{\text{per}}(Y) \right\} \\
&= \inf \left\{ \fint\limits_Y f(x_{k,i}, y, \nabla u(y) + z)\, dy \ :\ u \in W^{1,p}_{\text{per}}(Y) \right\}. \qquad (3.17)
\end{aligned}$$

Comparando (3.17) con (3.1) resulta que:

$$\tilde{f}_{k,i}(z) = \tilde{f}(x_{k,i}, z). \qquad (3.18)$$

De (3.16) y (3.13) se concluye que

$$\int\limits_{A_{k,i}} \hat{f}\ (x, \nabla u(x))\ dx = \int\limits_{A_{k,i}} \tilde{f}\ (x_{k,i}, \nabla u(x))\ dx. \qquad (3.19)$$

Así (3.19) demuestra (3.13), $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall i \in \{1, \ldots, \hat{k}\}$ y $\forall \in W^{1,p}(A_{k,i})$; en consecuencia esto hace que los límites (3.12) sean independientes de la suceción $\{\epsilon_n\}$, lo cual demuestra finalmente (3.11). $\square$

Teorema 3.4. *Dadas las funciones $f \in \tilde{\mathcal{H}}(N, a, p, b, \omega)$ y $\tilde{f} : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ definida por (3.1), entonces $\tilde{f}$ satisface:*

(1) $\forall x_1, x_2, z \in \mathbb{R}^N$*:*

$$\left|\tilde{f}(x_1, z) - \tilde{f}(x_2, z)\right| \leq \omega\left(|x_1 - x_2)|\right) \left(\fint\limits_Y a(y)\, dy + \hat{f}(x_1, z)\right) \qquad (3.20)$$

(2) *(i) Si* $1 \le p < \infty$*, entonces* $\forall x, z \in \mathbb{R}^N$*:*

$$0 \le \tilde{f}(x,z) \le b(x)\Big(\fint_Y a(y)\,dy + |z|^p \Big) \tag{3.21}$$

(ii) Si $p = \infty$*, entonces* $\forall r > 0$*,* $\exists \gamma_r \in \mathbb{R}$ *tal que:*

$$\forall x, z \in \mathbb{R}^N\ , \quad |z| \le r: \qquad 0 \le \tilde{f}\,(x,z) \le b\,(x)\,\gamma_r \tag{3.22}$$

Demostración: Como la función nula pertenece a $W^{1,p}_{\text{per}}(Y)$, entonces de (3.1) se obtiene

$$0 \le \tilde{f}\,(x,z) \le \fint_Y f(x,y,z)\,dy. \tag{3.23}$$

Si $1 \le p < \infty$, usamos (1.7) en (3.23) para obtener:

$$0 \le \tilde{f}(x,z) \le b(x)\Big(\fint_Y a(y)\,dy + |z|^p \Big).$$

Esto demuestra (3.21) para el caso $1 \le \infty$.

Si $p = \infty$, usamos (1.8) en (3.23) para obtener:

$$0 \le \tilde{f}(x,z) \le \fint_Y g_r(y) b(x)\,dy = b(x)\gamma_r.$$

Esto demuestra (3.22) para el caso $p = \infty$.

Sean $x_1, x_2, z \in \mathbb{R}^N$. Dado $\epsilon > 0$, por la definición (3.1) existirá $u \in W^{1,p}_{\text{per}}(Y)$ tal que

$$\fint_Y f(x_1, y, \nabla u(y) + z)\,dy \le \tilde{f}\,(x_1, z) + \epsilon. \tag{3.24}$$

Del mismo (3.1), dado este u:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x_2,z) &\le \fint_Y f(x_2, y, \nabla u(y) + z)\,dy \\ &= \fint_Y [f(x_2,y,\nabla u(y)+z) - f(x_1,y,\nabla u(y)+z)]\,dy + \\ &\quad + \fint_Y f(x_1,y,\nabla u(y)+z)\,dy. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Usando (2.6) del teorema 2.1 y (3.24) en (3.25) se observa:

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x_2,z) &\leq \omega(|x_2-x_1|)\fint_Y [a(y)+f(x_1,y,\nabla u(y)+z)]\,dy+\hat{f}\,(x_1,z)+\epsilon\\ &\leq \hat{f}\,(x_1,z)+\omega\left(|x_2-x_1|\right)\hat{f}\,(x_1,z)+\omega\left(|x_2-x_1|\right)\epsilon\\ &\quad +\omega\left(|x_2-x_1|\right)\fint_Y a(y)dy+\epsilon.\end{aligned}$$

Como ϵ es arbitrario, se intercambian los roles de x_1, x_2 y queda demostrado (3.20). □

Teorema 3.5. *Dados $N\in\mathbb{N}$; $1\leq p\leq\infty$; $a\in L^1_{\text{loc}}\left(\mathbb{R}^N\right)$ es Y-periódica; $\{g_r\}_{r>0}\subset L^1_{\text{loc}}\left(\mathbb{R}^N\right)$ y $f\in\tilde{\mathcal{H}}\,(N,a,p,b,\omega)$.*
Si $\tilde{f}:\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ se define como en (3.1), entonces
$\forall\Omega\in\mathcal{A}^N$, $\forall u\in W^{1,p}\,(\Omega)$:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \tilde{f}\,\left(x,\nabla u(x)\right)dx &= \Gamma\left(\sigma_\Omega\right)\lim_{\epsilon\to0}\int_\Omega f\,\left(x,\frac{x}{\epsilon},\nabla u\left(x\right)\right)\,dx\\ &= \Gamma\left(\tau_\Omega\right)\lim_{\epsilon\to0}\int_\Omega f\,\left(x,\frac{x}{\epsilon},\nabla u\left(x\right)\right)\,dx \qquad (3.26)\end{aligned}$$

Demostración: Consideremos la familia de funcionales definidos para cada $\epsilon>0$ como:

$$F_\epsilon\left(\Omega,u\right)=\int_\Omega f\,\left(x,\nabla u\left(x\right)\right)\,dx\,,$$

donde $f_\epsilon\left(x,z\right)=f\left(x,\frac{x}{\epsilon},z\right)$. El teorema 3.1 y (3.6) nos proporcionan la existencia de una sucesión estrictamente creciente $\{h_n\}\subset\mathbb{N}$ y de un funcional $F_\infty(\Omega,u)$ tales que $\forall\Omega\in\mathcal{A}^N$, $\forall u\in W^{1,p}(\Omega)$:

$$\begin{aligned}F_\infty(\Omega,u) &= \Gamma\left(\sigma_\Omega\right)\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_{\epsilon_{h_n}}\,\left(x,\nabla u\left(x\right)\right)\,dx\\ &= \Gamma\left(\tau_\Omega\right)\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_{\epsilon_{h_n}}\,\left(x,\nabla u\left(x\right)\right)\,dx. \qquad (3.27)\end{aligned}$$

Fijemos $\Omega \in \mathcal{A}^N$ y definamos para $\epsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}$:

$$F_{\epsilon,k}(\Omega, u) = \int\limits_{\Omega} S_k\left(x, \frac{x}{\epsilon}, \nabla u(x)\right)\, dx\,, \qquad u \in W^{1,p}(\Omega). \tag{3.28}$$

Usando (3.5), tenemos que $\forall m \in \mathbb{N}, \forall u \in W^{1,p}(\Omega)$:

$$\left|F_{\epsilon_{h_n},m}(\Omega, u) - F_{\epsilon_{h_n}}(\Omega, u)\right| \leq \omega\left(2^{-m}\sqrt{N}\right)\left(\int\limits_{\Omega} a(x)\, dx + F_{\epsilon_{h_n},m}(\Omega, u)\right).$$

Sea $\lambda = \int\limits_{\Omega} a(x)\, dx$, entonces

$$\begin{aligned} & F_{\epsilon_{h_n},m}(\Omega, u) - \omega\left(2^{-m}\sqrt{N}\right)\left(\lambda + F_{\epsilon_{h_n},m}(\Omega, u)\right) \\ \leq \ & F_{\epsilon_{h_n}}(\Omega, u) \\ \leq \ & F_{\epsilon_{h_n},m}(\Omega, u) + \omega\left(2^{-m}\sqrt{N}\right)\left(\lambda + F_{\epsilon_{h_n},m}(\Omega, u)\right). \end{aligned} \tag{3.29}$$

Usando (3.27) en (3.29) con $n \to \infty$ y usando (3.7) en (3.29):

$$F_m(\Omega, u) - \omega\left(2^{-m}\sqrt{N}\right)(\lambda + F_m(\Omega, u)) \leq$$
$$F_\infty(\Omega, u) \leq F_m(\Omega, u) + \omega\left(2^{-m}\sqrt{N}\right)(\lambda + F_m(\Omega, u)).$$

Como $F_\infty(\Omega, u) = (\Gamma)\lim_{m\to\infty} F_m(\Omega, u)$, entonces $\forall u \in W^{1,p}(\Omega)$:

$$F_\infty(\Omega, u) = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{\hat{k}} \chi(A_{k,i})(x)\tilde{f}(x_{k,i}, \nabla u(x))\, dx. \tag{3.30}$$

Así, $\forall z \in \mathbb{R}^N$:

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{i=1}^{\hat{k}} \chi(A_{k,i})(x)\tilde{f}(x_{k,i}, z) - \tilde{f}(x, z) \right\|_{L^\infty(\Omega)} \\ \leq \ & \omega\left(2^{-m}\sqrt{N}\right)\left[\left(\|b\|_{\infty,\Omega} + 1\right)\left(\fint\limits_{\Omega} a(y)dy + |z|^p\right)\right]. \end{aligned} \tag{3.31}$$

De (3.11), (3.30) y (3.31) finalmente se obtiene:

$$F_\infty(\Omega, u) = \int\limits_{\Omega} \tilde{f}(x, \nabla u(x))\, dx.$$

$\square$

4 Homogeneización en el caso $\int\limits_\Omega f(x, \frac{x}{\epsilon}, u, \nabla u)dx$

Ahora deseamos dar una fórmula explícita para el operador de Γ-convergencia para la familia de funcionales:

$$J_\epsilon(u) = \int\limits_\Omega f\left(x, \frac{x}{\epsilon}, u(x), \nabla u(x)\right) dx$$

cuando $\epsilon \to 0$, donde $f \in \mathcal{H}(N, a, p, b, \omega)$.

Dados $N \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$; $a \in L^1_{\text{loc}}\left(\mathbb{R}^N\right)$ Y-periódica; $\omega : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continua, creciente y tal que $\omega(0) = 0$; $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua; $\{g_r\} \subset L^1_{\text{loc}}\left(\mathbb{R}^N\right)$, sea $f \in \mathcal{H}(N, a, p, b, \omega)$ (es decir, $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ que satisfaga (c1) a (c6)). Bajo tales condiciones definimos $\hat{f} : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ como

$$\tilde{f}(x, u, z) = \inf\left\{ \fint\limits_Y f(x, y, u, \nabla\omega(y) + z)\, dy \ : \ \omega \in W^{1,p}_{\text{per}}(Y) \right\}. \tag{4.1}$$

Teorema 4.1. *Si $f \in \mathcal{H}(N, a, p, b, \omega)$ y $\{\epsilon_n\} \subset (0, \infty)$ con $\epsilon_n \to 0$, entonces existen $\{h_n\} \subset \mathbb{N}$ monótona creciente y $\hat{f} : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, tales que $\forall \Omega \in \mathcal{A}^N$, $\forall u \in W^{1,p}(\Omega)$:*

$$\begin{aligned}
\int\limits_\Omega \hat{f}\ (x, u(x), \nabla u(x))\ dx &= \Gamma(\sigma_\Omega) \lim_{n\to\infty} \int\limits_\Omega f\left(x, \frac{x}{\epsilon_{h_n}}, u(x), \nabla u(x)\right) dx \\
F(\Omega, u) &= \Gamma(\tau_\Omega) \lim_{n\to\infty} \int\limits_\Omega f\left(x, \frac{x}{\epsilon_{h_n}}, u(x), \nabla u(x)\right) dx
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Demostración: Ver [1]. □

Teorema 4.2. *Dados $N \in \mathbb{N}$; $1 \leq p \leq \infty$; $a \in L^1_{\text{loc}}\left(\mathbb{R}^N\right)$ Y-periódica; $\{g_r\}_{r>0} \subset L^1_{\text{loc}}\left(\mathbb{R}^N\right)$; $f \in \mathcal{H}(N, a, p, b, \omega)$, entonces $\forall \Omega \in \mathcal{A}^N$, $\forall u \in W^{1,p}(\Omega)$:*

$$\begin{aligned}
\int\limits_\Omega \tilde{f}\ (x, u(x), \nabla u(x))\, dx &= \Gamma(\sigma_\Omega) \lim_{\epsilon\to 0} \int\limits_\Omega f\left(x, \frac{x}{\epsilon}, u(x), \nabla u(x)\right) dx \\
&= \Gamma(\tau_\Omega) \lim_{\epsilon\to 0} \int\limits_\Omega f\left(x, \frac{x}{\epsilon}, u(x), \nabla u(x)\right) dx
\end{aligned}$$

donde $\hat{f} : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *está dada por (4.1).*

Demostración: Consideremos el funcional:

$$F(\Omega, u) = \int_{\Omega} \hat{f}\ (x, u(x), \nabla u(x))\ dx, \tag{4.3}$$

donde $\hat{f} : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ está dada por el teorema 4.1.

Para cada $u \in C^1(\mathbb{R}^N)$ consideramos $f_u : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dada como

$$f_u\,(x, y, z) = f\,(x, y, u(x), z)\,. \tag{4.4}$$

Entonces $f_u \in \tilde{\mathcal{H}}(N, a, p, b, \omega)$. Por el teorema 3.5:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \tilde{f}_u\ (x, \nabla u(x))\, dx &= \Gamma\,(\sigma_\Omega) \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\Omega} f_u\ \left(x, \frac{x}{\epsilon}, \nabla u\,(x)\right)\ dx \\ &= \Gamma\,(\tau_\Omega) \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\Omega} f_u\ \left(x, \frac{x}{\epsilon}, \nabla u\,(x)\right)\ dx\,, \end{aligned} \tag{4.5}$$

donde, según (3.1):

$$\tilde{f}_u(x, z) = \inf \left\{ \fint_{Y} f_u(x, y, \nabla w(y) + z)\, dy\ :\ w \in W^{1,p}(Y) \right\}.$$

De (4.4) se tiene:

$$\tilde{f}_u(x, z) = \inf \left\{ \fint_{Y} f(x, y, u(x), \nabla w(y) + z)\, dy\ :\ w \in W^{1,p}(Y) \right\}.$$

Concluimos que $\forall \Omega \in \mathcal{A}^N$, $\forall u \in W^{1,p}(\Omega)$:

$$\int_{Y} \tilde{f}(x, u(x), \nabla u(x))\, dx = \int_{Y} \hat{f}(x, u(x), \nabla u(x))\, dx.$$

Por lo tanto existe $M \in \Omega$, con $|M| = 0$ para el cual

$$\forall x \in \Omega \setminus M : \quad \tilde{f}(x, u, z)\ = \hat{f}(x, u, z)\ , \qquad \forall z \in \mathbb{R}^N, \forall u \in \mathbb{R}\ .$$

Luego haciendo los reemplazos

$$\tilde{f}_u(x, \nabla u(x))\ = \hat{f}(x, u(x), \nabla u(x))\,,$$

$$f_u\left(x, \frac{x}{\epsilon}, \nabla u(x)\right) = f\left(x, \frac{x}{\epsilon}, u(x), \nabla u(x)\right)$$

en (4.5), queda demostrado el Teorema. $\square$

Agradecimientos

Con verdadero agradecimiento: (a) al Prof. Robert Kohn del Courant Institute of Mathematical Sciences, por haberme motivado al estudio de la Homogeneización Matemática iniciado con las aplicaciones de esta teoría a la Ciencia de los Materiales; (b) al colega Prof. Diomedes Bárcenas por sus valiosos comentarios al revisar una versión preliminar de este trabajo; (c) al Comité Organizador de las XI-Jornadas de Matemáticas realizadas en la Universidad de Oriente y en especial a los profesores Raúl Naulin y Jackes Laforgue, por haberme brindado la oportunidad de participar y exponer este trabajo en Cumaná; (d) a la Biblioteca de la Universidad de los Andes, por haberme facilitado la bibliografía necesaria para el estudio de los casos coercivos y de la teoría de Γ-convergencia.

Referencias

[1] Buttazzo, G., Dal Maso, G., Γ-*limits of integral functionals*, Ann. di Mat. Pura e Applicata, (4), **122** (1979), 1–60.

[2] Giaquinta, M., Modica, G., *Remarks on the regularity of the minimizers of certain degenerate functionals*, Manuscripta Math., **57** (1986), 55–99.

[3] De Giorgi, E., Dal Maso, G., Γ-*convergence and calculus of variations*, Proc. Meeting on Mathematical Theory of Optimization, Santa Margherita, Ligure, 1981.

[4] Marcellini, P., *Periodic Solutions and Homogenization of Nonlinear Variational Problems*, Ann. di Mat. Pura e Applicata, (4), CXVII (1978), 139–152.

[5] Marcellini, P., Sbordone, C. *Sur quelques questions de G-convergence et d'homogéneisation non linéaire*, C. R. Acad. Sc. Paris, **284** (1977), 535–537.

[6] Dal Maso, G., *An Introduction to* Γ-*convergence*, Birkhäuser, Boston, 1993.

[7] Dal Maso, G., Modica, L., *A General Theory of Variational Functional Analysis*, In "Topics in Functional Analysis 1980–81", Quaderno Sc. Norm. Sup. Pisa, 149–221, 1981.