Divulgaciones Matemáticas Vol. 7 No. 1 (1999), pp. 37–47

Ecuaciones en Diferencias Escalares con Argumento Avanzado

Scalar Difference Equations with Advanced Argument

Lolimar Díaz (lolidiaz@sucre.udo.edu.ve)
Raúl Naulin (rnaulin@sucre.udo.edu.ve)
Departamento de Matemáticas
Universidad de Oriente
Apartado 285, Cumaná 6101-A
Venezuela

Resumen

En el presente trabajo mostramos algunos resultados sobre existencia de las soluciones para la ecuación en diferencias con avance

$$y(n+1) = a(n)y(n) + b(n)y(n+2), \quad n \in \mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Palabras y frases clave: Ecuación en diferencias con avance, existencia, unicidad, solución aproximada.

Abstract

In this paper we show some results of existence of solutions for the difference equation with advance

$$y(n+1) = a(n)y(n) + b(n)y(n+2), \quad n \in \mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Key words and phrases: difference equation with advance, existence, uniqueness, approximate solution.

1 Introducción

En los últimos tiempos, se ha observado un creciente interés en el tratamiento de ecuaciones diferenciales con avance. Esto se debe a la ampliación del campo de las aplicaciones de estas ecuaciones en problemas industriales [6].

Recibido 1998/09/25. Revisado 1999/01/22. Aceptado 1999/02/09.
MSC (1991): Primary 39A10, 34K25; Secondary 39A99.

En este trabajo comentaremos algunas propiedades de estas ecuaciones en su versión discreta.

Concretamente, consideraremos ecuaciones en diferencias con argumento avanzado (EDA)

$$y(n+1) = A(n)y(n) + B(n)y(n+2) \tag{1}$$

donde las matrices de la sucesión $\{A(n)\}$ son invertibles para todo valor de $n \in \mathbf{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Parece ser razonable imponer esta condición en un estudio incipiente de esta ecuación. De no ser así surgen complicaciones difíciles de manejar. Para ser más concretos consideremos el ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y(n+1) & = & (1-b(n))y(n) + b(n)y(n+2), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \\ \\ y(0) & = & \xi, \end{array} \right.$$

donde

$$b(n) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & n = 3k+1, \\ 0, & \text{en otras partes.} \end{array} \right.$$

Se demuestra fácilmente que cualquier sucesión $\{\ y(n)\}$ tal que $y(2k) = y(2k+1)$, $k \in \mathbf{N}$ satisface este problema para cualquier condición inicial $y(0) = \xi$. Así, se pueden escoger infinitas soluciones linealmente independientes. Esto muestra que el espacio de soluciones de la ecuación 1 podría ser infinito dimensional de no cumplirse la condición de invertibilidad señalada.

Otra de las razones por la cual se exige la invertibilidad de las matrices $A(n)$ es la necesidad de la prolongabilidad de las soluciones hacia atrás: si se conoce una solución $y(n)$ de 1 para valores $n \geq n_0 > 0$, entonces esta solución se puede extender para todo $n \in \{0, 1 \ldots, n_0 - 1\}$ mediante la fórmula

$$y(n) = A^{-1}(n) \left[y(n+1) - B(n)y(n+2) \right].$$

Esta propiedad juega un papel importante en el estudio de estas ecuaciones [2, 3].

En general, consideraremos que la sucesión matricial $\{B(n)\}$ admite matrices que no son invertibles. La invertibilidad de todas las matrices $B(n)$ reduce la ecuación 1 a una ecuación en diferencias de orden 2, que ha sido objeto de una intensa investigación [1]. De esta manera el problema que estamos describiendo tiene sus propias especificidades, algunas de las cuales queremos describir en esta trabajo.

En comparación con la teoría de ecuaciones en diferencias sin argumento desviado, el problema con valor inicial

$$\begin{cases} y(n+1) = A(n)y(n) + B(n)y(n+2) \\ y(0) = \xi \end{cases} \tag{2}$$

en general, no tiene solucion. Examinemos esta situación con mayor detalle. Supongamos que $\{B(n)\}$ es invertible para $n \in \{0, 1, 2, \ldots, N\}$, $N \geq 2$. Entonces una solución de 2 puede ser definida en $n \in \{0, 1, 2, \ldots, N+2\}$. Para poder extender esta solucion a $N+3$, es necesario que $y(N+3)$ satisfaga:

$$B(N+1)y(N+3) = y(N+2) - A(N+1)y(N+1).$$

Es decir, el vector $y(N+2) - A(N+1)y(N+1)$ debe estar en la imagen del operador lineal que define la matriz $B(N+1)$. En algunos ejemplos que presentamos a continuación, veremos el papel que juega esta condición en problemas de existencia y unicidad del problema 2 en el caso de ecuaciones escalares.

2 Ejemplos

Consideremos el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y(n+1) = (-1)^n y(n) + b(n)y(n+2), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \\ y(0) = \xi. \end{cases}$$

donde

$$b(n) = 1, \quad n \in \{0, 1, 2, 3\}, \quad b(n) = \frac{1 - (-1)^n}{2}, \quad n \geq 4.$$

Cualquier solución de este problema, en el intervalo $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, tiene la forma

$$y(0) = \xi, y(1) = \eta, y(2) = \eta - \xi, y(3) = -\xi, y(4) = -\eta, y(5) = -\eta - \xi,$$

donde η es una constante arbitraria. Para $n = 4$ debe cumplirse

$$b(4)y(6) = y(5) - y(4).$$

De acuerdo al definición de $b(4)$ esta última ecuación implica

$$\xi = 0.$$

Esto significa que la única solución posible del problema con valor inicial es aquella que arranca desde $\xi = 0$. Si $\xi = 0$. ¿Cuántas soluciones se pueden esperar para el problema de valor inicial 2?. Para $n = 5$ debe cumplirse

$$y(7) = y(6) - \eta,$$

donde $y(6)$ esta definida arbitrariamente. Para $n = 6$ se debe cumplir

$$0 = y(7) - y(6) = \eta.$$

Esto implica que la única solución del problema de valor inicial debe cumplir $\xi = 0$ y $\eta = 0$. Siguiendo con este análisis, se obtiene que la única solución posible de esta ecuación con avance es la solución trivial.

En cualquier ejemplo de ecuación con avance donde esté demostrada la existencia de la solución del problema 2, se plantea el problema de la unicidad de las soluciones. Por ejemplo, consideremos el siguiente problema

$$y(n+1) = a(n)y(n) + b(n)y(n+3),\ y(0) = \xi,$$

con las sucesiones $\{a(n)\}$, $\{b(n)\}$ definidas por $a(n) = (-1)^n$, $b(n) = \frac{1-a(n)}{2}$. Se puede verificar que para cualquier valor inicial ξ, este problema tiene dos soluciones y se obtiene una única solución al dar una segunda condición en $n = 2$. El estudio de la unicidad de las soluciones puede resultar muy complicado y no existe una metodología para atacarlo. En las ecuaciones en diferencias sin argumento desviado, los problemas de unicidad se reducen a la estimación de las sucesiones que satisfacen ciertas desigualdades integrales o diferenciales [1]. Estas teorías no se han desarrollado para desigualdades con contienen avance. Por ejemplo los autores desconocen la solución de la desigualdad tipo Gronwall

$$x(n) \le a(n) + \sum_{i=0}^{n-1} b(n)x(i+2).$$

En general, la solución del problema 2 no es única. Lo sorprendente de estas ecuaciones es que existen ejemplos donde hay existencia de soluciones, hay unicidad de estas soluciones para una condición inicial dada y la respectiva ecuación no se reduce a una ecuación de orden 2.

3 Ecuaciones escalares

En este trabajo restringiremos la atención a las ecuaciones con avance, de tipo escalar.

Una forma de intentar resolver el problema 2 es el método de ir del "presente al futuro". Este método, que hemos utilizado en los ejemplos de la introducción, presenta serias dificultades para describir el comportamiento de las soluciones en el infinito. Otra estrategia de estudio podría ser venirnos del "infinito al presente". Esto significa suponer a priori conocida la solución hasta el infinito, y luego deducir aquellas condiciones necesarias que ayuden a determinar esta solución. Esto, necesariamente, conduce a la búsqueda de la solución como el punto fijo de un cierto operador y en consecuencia, la determinación del espacio donde debe actuar este operador. Expliquemos esto en el caso de la ecuación escalar

$$y(n+1) = a(n)y(n) + b(n)y(n+2). \tag{3}$$

La fórmula de variación de parámetros para la ecuación [1]

$$y(n+1) = a(n)y(n) + f(n),$$

establece la equivalencia de la ecuación 3 con la ecuación integral

$$y(n) = \Phi(n)\xi + \sum_{m=0}^{n-1} \Phi(n)\Phi^{-1}(m+1)b(m)y(m+2), \tag{4}$$

donde

$$\Phi(n) = \prod_{m=0}^{n-1} a(m).$$

En el uso de los símbolos $\sum$ y $\prod$ es conveniente la siguiente definición

$$\sum_{j=m}^{n} A_j = 0, \ \prod_{j=m}^{n} A_j = I, \text{ si } m > n.$$

La parte derecha de la ecuación 4 define un operador que actúa sobre sucesiones definidas sobre $\mathbf{N}$. El siguiente teorema ilustra como puede ser usada esta idea.

Teorema 1. *Supongamos que*

$$\sum_{m=0}^{n} \prod_{s=m+1}^{n} |a(s)| \leq M, \forall n \in \mathbf{N}, \tag{5}$$

y

$$M \sup\{|b(n)| : n \in \mathbf{N}\} < 1, \tag{6}$$

entonces para cualquier $n_0 \in \mathbf{N}$*, el problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y(n+1) &= a(n)y(n) + b(n)y(n+2), \\ \\ y(n_0) &= \xi, \end{cases} \tag{7}$$

tiene una única solución $\{y(n)\}$ *en el espacio* ℓ^∞*.*

Demostración. Mediante un cálculo directo se muestra que cualquier solución de la ecuación integral

$$y(n) = \Phi(n)\left[\Phi^{-1}(n_0)\xi + \sum_{m=n_0}^{n-1} \Phi^{-1}(m+1)b(m)y(m+2)\right], \quad n \geq n_0,$$

es solución del problema 7. Entonces definamos el operador $\mathcal{U}$ mediante la ecuación

$$\mathcal{U}(y)(n) = \Phi(n)\Phi^{-1}(n_0)\xi + \Phi(n)\sum_{m=n_0}^{n-1} \Phi^{-1}(m+1)b(m)y(m+2), \tag{8}$$

para cualquier $y \in \ell^\infty(\mathbf{N}_{n_0}, V^r)$, donde $\mathbf{N}_{n_0} = \{n_0, n_0+1, n_0+2, \dots\}$.
De la condición 5 se obtiene que

$$|\Phi(n)\Phi^{-1}(n_0)| \leq M, \tag{9}$$

y

$$\sum_{m=n_0}^{n-1} |\Phi(n)\Phi^{-1}(m+1)||b(m)||y(m+2)| \leq M|\{b(n)\}|^\infty|y|^\infty,$$

implicando que el operador $\mathcal{U}$ es acotado. En consecuencia

$$\mathcal{U} : \ell^\infty(\mathbf{N}_{n_0}, V^r) \to \ell^\infty(\mathbf{N}_{n_0}, V^r).$$

Fácilmente se muestra que el operador $\mathcal{U}$ definido por 8 cumple con la siguiente estimación

$$|\mathcal{U}(y)(n) - \mathcal{U}(z)(n)| \leq M|\{b(n)\}|^\infty|y-z|^\infty,$$

para cualquier $y, z \in \ell^\infty(\mathbf{N}_{n_0}, V^r)$. De la condición 6, se obtiene que el operador $\mathcal{U}$ es una contracción que actúa de $\ell^\infty(\mathbf{N}_{n_0}, V^r)$ en si mismo. Por lo tanto, la ecuación 8 tiene un único punto fijo, que es la única solución del problema 7 en el espacio ℓ^∞. $\square$

Un ejemplo no trivial que ilustra las condiciones del Teorema 1 es el siguente:

$$y(n+1) = n^{-1}y(n) + b(n)y(n+2).$$

En este caso la condición 5 toma la forma

$$\prod_{s=m+1}^{n} \frac{1}{s} \le (m+1)^{m-n}.$$

De donde

$$\sum_{m=0}^{n} \prod_{s=m+1}^{n} s^{-1} \le \sum_{m=0}^{n} (m+1)^{m-n} \le \sum_{m=0}^{n} 2^{m-n} \le 2, \forall n \in \mathbf{N}.$$

De acuerdo al Teorema 1, podemos asegurar la existencia de una única solución acotada para el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y(n+1) &= n^{-1}y(n) + b(n)y(n+2), \\ y(n_0) &= \xi, \end{cases}$$

si la sucesión $\{b(n)\}$ cumple

$$2 \sup\{|b(n)| : n \in \mathbf{N}\} < 1.$$

El espacio ℓ^∞, en cual se ha buscado la solución del problema, fue determinado por las propiedades del sistema sin avance

$$x(n+1) = a(n)x(n). \tag{10}$$

La condición 5 es una condición fuerte de estabilidad exponencial para el sistema 10. Otros tipos de estabilidad son también posibles de ser considerados y esto conducirá al tratamiento de la ecuación 1 en otros espacios secuenciales [3, 2]. Debemos prevenir al lector, que la unicidad que establece el Teorema 1, ocurre en el espacio ℓ^∞. Es posible que el problema de valor inicial 3 tenga más de una solución en otro espacio secuencial.

4 Cálculo aproximado de la solución

Una vez establecida la existencia de una solución del problema 3 tenemos necesariamente que preocuparnos por el cálculo de esta solución, porque el Teorema 1 tiene un carácter implícito. A continuación proponemos, bajo las condiciones del Teorema 1, un método para el cálculo aproximado de las soluciones. Concretamente vamos a resolver el siguiente problema: dado ε, un número positivo, buscamos un intervalo de números naturales $\overline{0,N}$ y una sucesión $w_N : \overline{0,N} \to V$ tal que $w(0) = \xi$ y

$$|w(n,\xi) - w_N(n)| < \varepsilon,\ n \in \overline{0,N}. \tag{11}$$

donde $w(n,\xi)$ representa a la solución de $\mathring{t}$res en el espacio ℓ^∞. Para abreviar la escritura de las fórmulas denotaremos

$$E(m) = \Phi^{-1}(m)b(m).$$

Consideremos el operador

$$\mathcal{T}_N : \ell^\infty(\mathbf{N}, V^{N+1}) \to \ell^\infty(\mathbf{N}, V^{N+1}),$$

definido por

$$\mathcal{T}_N(w)(n) = \begin{cases} \Phi(n)\xi + \displaystyle\sum_{m=0}^{n-1} \Phi(n)E(m)w(m+2),\ 0 \le n \le N-1, \\ \\ \Phi(N)\xi + \displaystyle\sum_{m=0}^{N-2} \Phi(N)E(m)w(m+2) + b(N)w(1),\ n = N. \end{cases}$$

La definición de $\mathcal{T}_N(w)(N)$ produce algunos comentarios debido a la presencia del coeficiente $b(N)w(1)$. La inclusión de $b(N)w(1)$ permite definir w sin ambigüedad. Enfatizamos sobre el importante hecho de la ecuación $\mathring{t}$res es una ecuación de segundo orden si $b(n) \neq 0$ para todo $n \in \mathbf{N}$. Así, el problema de valor inicial 7 requiere dos condiciones iniciales para tener solución única. En la forma que planteamos nuestro problema, el operador $\mathcal{T}_N$ actúa sobre sucesiones definidas sobre un intervalo finito $\overline{0,N}$, donde no es posible una condición en ∞. Estos comentarios ayudan a explicar por qué hemos incluido, mas bien de manera artificial, la coordenada $w(1)$ de w en la definición de $\mathcal{T}_N$.

Si dotamos al espacio finito dimensional V^{N+1} con la norma

$$|w|_N = \max\{|w(j)| : 0 \le j \le N\},$$

obtenemos la estimación

$$|\mathcal{T}_N(w_1) - \mathcal{T}_N(w_2)|_N \le M|\{b(n)\}|_\infty |w_1 - w_2|_N.$$

De aquí, la estimación 6 implica que el operado $\mathcal{T}_N$ tiene un único punto fijo en V_N al cual denotaremos por w_N. Más adelante utilizaremos la estimación:

$$|w_N|_N = |\mathcal{T}_N(w_N)|_N \leq |\xi| + M|\{b(n)\}|_\infty |w_N|_N. \tag{12}$$

Por lo tanto

$$|w_N|_N \leq \frac{|\xi|}{1 - M|\{b(n)\}|_\infty}$$

En [3] se obtuvo que la solución $w(n, \xi)$ es un punto fijo del operador

$$\mathcal{T}(w)(n) = \Phi(n)\xi + \sum_{m=0}^{n-1} \Phi(n)\Phi^{-1}(m+1)b(m)w(m+2) \tag{13}$$

en el espacio ℓ^∞. En la parte siguiente, asumiremos V^{N+1} esta inmerso en ℓ^∞ de la siguiente manera: el vector $w \in V^N$ esta identificado con $w \in \ell^\infty$ definido por

$$w(n) = \begin{cases} w(n), & 0 \leq n \leq N \\ \\ 0, & n > N. \end{cases}$$

De acuerdo a las definiciones de $\mathcal{T}$ and $\mathcal{T}_N$, obtenemos

$$\mathcal{T}(w)(n) - \mathcal{T}_N(w)(n) = 0, \text{ if } 1 \leq n \leq N-1,$$

y para $n \in \mathbf{N}$,

$$\mathcal{T}(w)(n) - \mathcal{T}_N(w)(n) = -b(N)w(1).$$

De aquí que

$$\max_{0 \leq n \leq N} |\mathcal{T}(w)(n) - \mathcal{T}_N(w)(n)| \leq |b(N)||w|_N.$$

Apliquemos esta estimación a w_N y usemos 12 para obtener:

$$\max_{0 \leq n \leq N} |\mathcal{T}(w_N)(n) - w_N(n)| \leq \frac{|\xi|}{1 - M|\{b(n)\}|_\infty} |b(N)|. \tag{14}$$

Consideremos el problema 7 junto a la condición

$$\lim_{n \to \infty} b(n) = 0. \tag{15}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\max_{0\le n\le N}|w(n,\xi)-w_N(n)| &\le \max_{0\le n\le N}|\mathcal{T}(w_N)(n)-w_N(n)|\\ &+ \max_{0\le n\le N}|\mathcal{T}(w(\cdot,\xi))(n)-\mathcal{T}(w_N)(n)|\\ &\le \frac{|\xi|}{1-M|\{b(n)\}|_\infty}|b(N)|\\ &+ M|\{b(n)\}|_\infty \max_{0\le n\le N}|w(n,\xi)-w_N(n)|,\end{aligned}$$

de donde

$$\max_{0\le n\le N}|w(n,\xi)-w_N(n)|\le \frac{|\xi|}{(1-M|\{b(n)\}|_\infty)^2}|b(N)|. \tag{16}$$

Luego, para cualquier ε dado, escogemos N tal que

$$\frac{|\xi|}{(1-M|\{b(n)\}|_\infty)^2}|b(N)|<\varepsilon,$$

para que 11 se satisfaga. Esta estimación prueba lo siguiente

Teorema 2. *Si las condiciones* 5, 15, 6 *se cumplen, entonces para un número positivo* ε*, hay un* $N\in\mathbf{N}$ *tal que* $|w(n,\xi)-w_N(n)|\le\varepsilon$ *para* $n\in\overline{0,N}$.

Ahora, la ecuación $w=\mathcal{T}_N(w)$ es equivalente al siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcl} w(1) &=& a(0)\xi+b(0)w(2)\\ w(2) &=& a(1)w(1)+b(1)w(3)\\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ w(N-1) &=& a(N-2)w(N-2)+b(N-2)w(N-1)\\ w(N) &=& \Psi(N)\xi+w(N-1)+b(N)w(1)\end{array}\right. \tag{17}$$

Este sistema se puede resolver mediante un esquema iterativo:

$$\left\{\begin{array}{rcl} w_k &=& \mathcal{T}(w_{k-1}),\\ w_0 &=& 0,\end{array}\right.$$

el cual que converge con velocidad $(M|\{b(n)\}|_\infty)^k$.

Agradecimiento

Los autores expresan su gratitud a la Comisión de Investigación de la Universidad de Oriente por su apoyo al Proyecto CI-025-00730/95.

Referencias

[1] Agarwal, R. *Difference Equations and Inequalities. Theory, Methods and Applications*, Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker, New York, 1992.

[2] Díaz L., *Ecuaciones en Diferencias con Argumentos Avanzados*, Trabajo de Grado de Maestría, Postgrado en Matemáticas de la UDO, 1998.

[3] Díaz, L., Naulin, R., *Linear Difference Equations with Advanced Arguments*, remitido para su publicación (1998).

[4] Díaz, L., Naulin, R., *Approximate Solutions of Difference Systems with Advanced Arguments*, remitido para su publicación (1998).

[5] Díaz, L., Naulin, R., *Dichotomies for Difference Systems with Advance*, preprint (1998).

[6] Kato, T., McLeod, J., *The Functional-Differential Equations*, Bull. Amer. Math. Soc., **77**(1971), 891–937.

[7] Sugiyama, S., *On Some Problems on Functional Differential Equations with Advanced Arguments*, Proceedings US-Japan Seminar on Differential and Functional Equations, Benjamin, New-York, 1967.