Divulgaciones Matemáticas v. 6, No. 1 (1998), 81–83.

Problemas y Soluciones

Problems and solutions

Editor: José Heber Nieto
Departamento de Matemática y Computación
Facultad Experimental de Ciencias. Universidad del Zulia
Apartado Postal 526. Maracaibo 4011. Venezuela.
(`jhnieto@luz.ve`)

Las soluciones y los problemas propuestos, incluyendo sus soluciones (si se conocen), deben dirigirse al editor, en español o inglés, por correo electrónico o bien mecanografiadas, a la dirección dada más arriba.

Solutions and proposed problems (including their solutions, if known) should be sent to the editor, in Spanish or English, by e-mail or typewritten, to the address given above.

1 Problemas propuestos

11. *Propuesto por el editor.*

    Dados tres enteros r, s y t mayores que 1, ¿existirá siempre un grupo finito con dos elementos x e y tales que los órdenes de x, y y xy sean r, s y t respectivamente?

    (Given three integers r, s and t greater than 1, is there always a finite group with two elements x and y such that the orders of x, y and xy are r, s and t respectively?)

2 Soluciones

5. *(Propuesto por el editor en el vol. 3 (1995), p. 129.)*

    Pruebe que para todo entero n existe una matriz simétrica de 4×4 cuyos elementos diferentes son diez enteros consecutivos y cuyo determinante es n.

Solución por Oswaldo Larreal (olarreal@hydra.math.luz.ve)

$$\begin{vmatrix} n+5 & n+6 & n+7 & n+8 \\ n+6 & n+9 & n+11 & n+10 \\ n+7 & n+11 & n+14 & n+12 \\ n+8 & n+10 & n+12 & n+13 \end{vmatrix} = n.$$

6. *(Propuesto por el editor en el vol. 4 (1996), p. 99.)*

Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y $X \subset \mathbb{R}$ un conjunto con complemento numerable. Pruebe que si la restricción de f a X es inyectiva entonces f es inyectiva.

Solución por Francisco G. Arenas (farenas@ualm.es) y M. A. Sánchez-Granero (misanche@ualm.es), Universidad de Almería, Almería, España.

La idea de la demostración es probar primero que f debe ser estrictamente monótona en X (es decir, si $a < b$ en X entonces $f(a) < f(b)$) y entonces por densidad de X en $\mathbb{R}$, f debe ser estrictamente monótona en $\mathbb{R}$, luego inyectiva.

Paso 1. f es estrictamente monótona en X.

Supongamos que no fuese así, entonces existen $a < b < c$ en X tales que, por ejemplo, $f(a) < f(b)$ y $f(c) < f(b)$ (el otro caso es análogo). Puesto que $f([a,c] \cap (\mathbb{R} \setminus X))$ es numerable, debe existir $u \in ([f(a), f(b)] \cap [f(c), f(b)]) \cap (\mathbb{R} \setminus f([a,c] \cap (\mathbb{R} \setminus X)))$ (puesto que $[f(a), f(b)] \cap [f(c), f(b)]$ es no numerable), y como f es continua, por el Teorema de los valores intermedios, existen $r \in [a,b]$ y $s \in [b,c]$ tales que $f(r) = u = f(s)$.

Veamos que $r \in X$. Si $r \notin X$, entonces $r \in [a,c] \setminus X$, con lo que $u = f(r) \in f([a,c] \setminus X)$, lo que contradice la elección de u. Análogamente se prueba que $s \in X$. Entonces $f(r) = u = f(s)$ con $r, s \in X$, lo que contradice que f es inyectiva en X.

Paso 2. f es estrictamente monótona en $\mathbb{R}$.

Simple consecuencia de la densidad de X en $\mathbb{R}$ y la continuidad de f.

Paso 3. f es inyectiva.

Consecuencia de lo anterior.

Ademas la función continua $f : [-\pi, \pi] \to S^1$ definida como $f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ es inyectiva en $[-\pi, \pi[$, no lo es en $[-\pi, \pi]$, y $\mathbb{R} \setminus [-\pi, \pi[$ es un punto, así que parece que este resultado no es generalizable a otros espacios diferentes de $\mathbb{R}$.

Comentario del Editor: Es interesante observar que este resultado no es cierto si solamente se exige que X sea denso. Como contraejemplo basta tomar $X = \mathbb{Q}$ y la función f definida mediante $f(x) = -x$ si $x \leq 0$ y $f(x) = \sqrt{2}x$ si $x > 0$. Invitamos a los lectores a encontrar alguna generalización válida.